ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р 50779.28— 2017 (МЭК 61710:2013)

Статистические методы

СТЕПЕННАЯ МОДЕЛЬ. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ

(IEC 61710:2013, Power law model — Goodness of-fit tests and estimation methods, MOD)

Издание официальное

Москва
Стандартинформ
2020

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

1 ПОДГОТОВЛЕН Открытым акционерным обществом «Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем» (АО «НИЦ КД») на основе собственного перевода на русский язык англоязычной версии стандарта, указанного в пункте 4

2 ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 125 «Применение статистических методов»

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 10 августа 2017 г. № 863-ст

4 Настоящий стандарт является модифицированным по отношению к международному стандарту МЭК 61710:2013 «Степенная модель. Критерии согласия и методы оценки» (IEC 61710:2013 «Power law model — Goodness of-fit tests and estimation methods», MOD) путем изменения отдельных фраз, слов, ссылок, которые выделены в тексте стандарта курсивом, а также путем внесения технических отклонений, указанных во введении к настоящему стандарту.

Международный стандарт разработан Техническим комитетом ТС 56 «Dependability» Международной электротехнической комиссии (IEC).

Наименование настоящего стандарта изменено относительно наименования указанного международного стандарта для приведения в соответствие с ГОСТ Р 1.5—2012 (пункт 3.5).

Сведения о соответствии ссылочного национального стандарта международному стандарту, использованному в качестве ссылочного в примененном международном стандарте, приведены в дополнительном приложении ДА

5 ВЗАМЕН ГОСТ Р 50779.28—2007 (МЭК 61710:2000)

6 ПЕРЕИЗДАНИЕ. Июль 2020 г.

*Правила применения настоящего стандарта установлены в статье 26 Федерального закона от 29 июня 2015 г. № 162-ФЗ «О стандартизации в Российской Федерации». Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодном (по состоянию на 1 января текущего года) информационном указателе «Национальные стандарты», а официальный текст изменений и поправок — в ежемесячном информационном указателе «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ближайшем выпуске ежемесячного информационного указателя «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет (*gost.e-ecolog.ru

© Стандартинформ, оформление, 2017, 2020

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

Содержание

1 Область применения 1
2 Нормативные ссылки 1
3 Термины и определения 1
4 Обозначения 1
5 Степенная модель 2
6 Требования к данным 3
7 Статистические оценки и критерии 5
Приложение А (справочное) Степенная модель. Общие сведения 17
Приложение В (справочное) Числовые примеры 18
Приложение С (справочное) Байесовский подход к анализу степенной модели 26
Приложение ДА (справочное) Сведения о соответствии ссылочного национального стандарта международному стандарту, использованному в качестве ссылочного в примененном международном стандарте 38
Библиография 38

Введение

В настоящем стандарте приведено описание степенной модели и даны рекомендации по ее использованию. Степенная модель является одной из наиболее используемых моделей надежности восстанавливаемых объектов. В настоящем стандарте установлены методы определения оценок параметров степенной модели, критерии проверки соответствия ей данных, а также методы построения доверительных интервалов для параметра потока отказов и предикционных интервалов для наработок до отказа. Исходные данные представляют собой набор наработок между отказами восстанавливаемого объекта или группы идентичных объектов. Наблюдение за наработками объекта завершают в момент последнего отказа или в момент цензурирования. Все выходные данные зависят от типа рассматриваемого объекта.

Некоторые методы требуют применения компьютерных программ, поскольку являются весьма сложными. Представленные в настоящем стандарте алгоритмы могут быть использованы для создания компьютерных программ.

В настоящем стандарте в разделе «Нормативные ссылки» ссылка на международный стандарт заменена ссылкой на национальный стандарт.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

СТЕПЕННАЯ МОДЕЛЬ. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ

Statistical methods. Power law model. Goodness of-fit tests and estimation methods

Дата введения — 2018—12—01

1 Область применения

В настоящем стандарте установлены методы определения точечной оценки параметров степенной модели, доверительных интервалов для параметра потока отказов, предикционных интервалов для наработок до отказов и критерии согласия для степенной модели на основе данных о наработках восстанавливаемых объектов. При этом предполагают, что данные о наработках до отказа исследуемых объектов или некоторой группы идентичных объектов должны быть получены в одинаковых условиях (например, при одинаковой нагрузке или в одинаковых условиях окружающей среды).

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использована нормативная ссылка на следующий стандарт:

ГОСТ Р 50779.10 (ИСО 3534-1:93) Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения*

Примечание — При пользовании настоящим стандартом целесообразно проверить действие ссылочных стандартов в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет или по ежегодному информационному указателю «Национальные стандарты», который опубликован по состоянию на 1 января текущего года, и по выпускам ежемесячного информационного указателя «Национальные стандарты» за текущий год. Если заменен ссылочный стандарт, на который дана недатированная ссылка, то рекомендуется использовать действующую версию этого стандарта с учетом всех внесенных в данную версию изменений, если заменен ссылочный стандарт, на который дана датированная ссылка, то рекомендуется использовать версию этого стандарта с указанным выше годом утверждения (принятия). Если после утверждения настоящего стандарта в ссылочный стандарт, на который дана датированная ссылка, внесено изменение, затрагивающее положение, на которое дана ссылка, то это положение рекомендуется применять без учета данного изменения. Если ссылочный стандарт отменен без замены, то положение, в котором дана ссылка на него, рекомендуется применять в части, не затрагивающей эту ссылку.

3 Термины и определения

В настоящем стандарте применены термины по *ГОСТ Р 50779.10*.

4 Обозначения

В настоящем стандарте применены следующие обозначения:

β — параметр формы степенной модели;

* Заменен. В Российской Федерации действует ГОСТ Р ИСО 3534-1—2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей».

Издание официальное

$\hat{\beta}$ — оценка параметра формы степенной модели;

β_{LB}, β_{UB} — нижняя и верхняя доверительные границы параметра β;

C^2 — статистика критерия согласия Крамера-Мизеса;

$C^2_{1-\gamma}(M)$ — критическое значение статистики критерия согласия Крамера-Мизеса для уровня γ;

χ^2 — статистика критерия согласия хи-квадрат;

$\chi^2_\gamma(\nu)$ — квантиль χ^2-распределения с ν степенями свободы уровня γ;

d — количество интервалов для групп отказов;

$E[N(t)]$ — математическое ожидание количества отказов за время t;

$E[t_j]$ — математическое ожидание наработки до j-го отказа;

$\hat{E}[N[t(i)]$ — оценка математического ожидания количества отказов за время $t(i)$;

$\hat{E}[t_j]$ — оценка математического ожидания наработки до j-го отказа;

F_γ — квантиль F-распределения с (ν_1, ν_2) степенями свободы уровня γ;

i — общий индекс;

j — общий индекс;

k — количество объектов;

L, U — множители, используемые при вычислении границ доверительных интервалов для параметра потока отказов;

λ — параметр масштаба степенной модели;

$\hat{\lambda}$ — оценка параметра масштаба степенной модели;

M — параметр статистического критерия Крамера-Мизеса;

N — количество отказов;

N_j — количество отказов j-го объекта;

$N(t)$ — суммарное количество отказов за время t;

$N[t(i)]$ — суммарное количество отказов за время $t(i)$;

R — разность между порядковым номером будущего (прогнозируемого) отказа и порядковым номером последнего (наблюдаемого) отказа;

T — суммарная наработка;

T^* — продолжительность испытаний с ограниченным временем наблюдений;

T_j — полная суммарная наработка j-го объекта;

T_{RL}, T_{RU} — нижняя и верхняя предикционные границы для наработки до R-го будущего отказа;

$\hat{T}_{N+1}$ — оценка медианы наработки до $(N+1)$-го отказа;

t_i — наработка до i-го отказа;

t_{ij} — наработка до i-го отказа j-го объекта;

t_N — продолжительность испытаний с ограниченным количеством отказов;

t_{Nj} — наработка до N-го отказа j-го объекта;

$r(i-1)$, $r(i)$ — конечные точки i-го интервала наработок для сгруппированных отказов;

$z(t)$ — параметр потока отказов в момент времени t;

$\hat{z}(t)$ — оценка параметра потока отказов в момент времени t;

z_{LB}, z_{UB} — нижняя и верхняя доверительные границы для параметра потока отказов.

5 Степенная модель

Статистические методы для степенной модели используют данные о количестве отказов и наработках, полученные при испытаниях или эксплуатации. Ниже приведены основные уравнения степенной модели. Общие сведения о степенной модели приведены в приложении А, а примеры ее применения — в приложении В.

Математическое ожидание суммарного количества отказов за время t:

$$E[N(t)] = \lambda t^{\beta}, \quad \lambda > 0, \beta > 0, \quad t > 0,$$

где λ — параметр масштаба;

β — параметр формы ($0 < \beta < 1$ соответствует уменьшающемуся параметру потока отказов; $\beta = 1$ соответствует постоянному параметру потока отказов; $\beta > 1$ соответствует увеличивающемуся параметру потока отказов).

Параметр потока отказов в момент времени t:

$$z(t) = \frac{d}{dt} E\left[N(t)\right] = \lambda \beta t^{\beta - 1}, \ t > 0.$$

Таким образом, параметры λ и β влияют на параметр потока отказов в заданный момент времени.

В 7.2 приведены методы определения оценки максимального правдоподобия для параметров λ и β. В 6.3 приведены критерии согласия для степенной модели, а в 7.4 и 7.5 — методы определения доверительного интервала. В 7.6 приведены методы определения предикционного интервала, а в 7.7 — критерии проверки равенства параметров формы. Модель проста для оценки, но если $\beta < 1$, теоретически $z(0) = \infty$ ($z(t)$ стремится к бесконечности при t стремящемся к нулю) и $z(\infty) = 0$ ($z(t)$ стремится к нулю при t, стремящемся к бесконечности). Однако эти теоретические ограничения не влияют на практическое использование модели.

6 Требования к данным

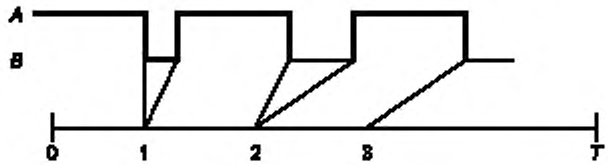
6.1 Общие положения

6.1.1 Вариант 1. Известны наработки до каждого отказа одного или нескольких объектов из одной совокупности

Обычно методы оценки предполагают, что наблюдаемые наработки определяются точными моментами появления отказа единственного восстанавливаемого объекта или набора одинаковых восстанавливаемых объектов. На рисунках 1—3 показано, как определяют наработки в трех общих случаях.

6.1.2 Вариант 1a). Один восстанавливаемый объект

Для одного восстанавливаемого объекта, наблюдаемого с момента времени 0 до момента времени T, соответствующая наработка t_i является временем функционирования объекта (исключая время ремонта и простоя) до возникновения i-го отказа, как показано на рисунке 1.



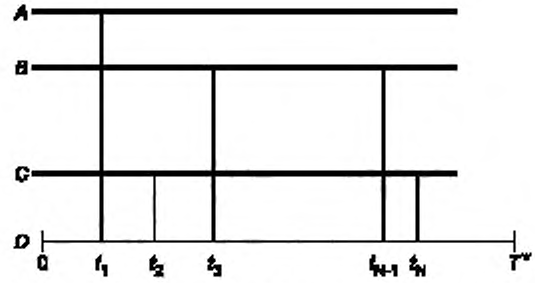
A — наработка; *B* — простой

Рисунок 1 — Один восстанавливаемый объект

Испытания с ограниченным временем наблюдений проводят до достижения наработки T^*, которая не совпадает с моментом возникновения отказа, а испытания с ограниченным количеством отказов, проводят до момента возникновения N-го отказа, т.е. до наработки t_N. Для обработки результатов испытаний с ограниченным временем наблюдений и с ограниченным количеством отказов, используют различные формулы.

6.1.3 Вариант 1b). Несколько идентичных восстанавливаемых объектов, наблюдаемых в течение одного и того же интервала времени

Предполагается, что имеется k объектов из одной совокупности, то есть объекты являются идентичными и функционируют в одинаковых условиях (окружающей среды и нагрузки). Если объекты наблюдают до достижения наработки T^*, которая не совпадает с моментом возникновения отказа (испытания, ограниченным временем наблюдений), тогда данные о наработках объединяют, отражая моменты отказов (t_i, $i = 1, 2 \ldots, N$) всех k объектов на одной оси времени, как показано на рисунке 2.

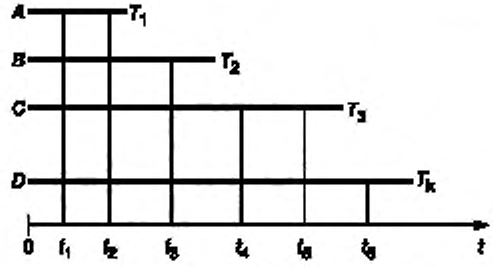


A — 1-й объект; *B* — 2-й объект; *C* — *k*-й объект; *D* ··· объединенный процесс

Рисунок 2 — Несколько идентичных восстанавливаемых объектов, наблюдаемых в течение одного и того же интервала времени

6.1.4 Вариант 1c). Несколько идентичных восстанавливаемых объектов, наблюдаемых в течение различных интервалов времени

Если не все объекты функционируют в течение одного и того же интервала времени, то можно считать, что моменты прекращения наблюдений удовлетворяют условию $T_1 < T_2 < ... < T_k$. Данные об отказах объединяют, отражая все моменты возникновения отказов всех объектов *k* на общей оси, как показано на рисунке 3. Наработки до отказа t_i, $i = 1, 2, ..., N$, где N — общее количество отказов, исследуют совместно по всем *k* объектам.



A — 1-й объект; *B* — 2-й объект; *C* — 3-й объект; *D* — *k*-й объект; *t* — время

Рисунок 3 — Несколько восстанавливаемых объектов, наблюдаемых в течение различных интервалов времени

6.2 Вариант 2. Известны интервалы наработок для групп отказов одного или нескольких объектов из одной совокупности

Этот альтернативный метод используют, когда имеется хотя бы два объекта и данные состоят из известных интервалов времени, в течение которых произошло известное количество отказов.

Период наблюдений представляет собой [интервал (0, *T*)], разделенный на *d* интервалов $0 < t, t(1) < t(2) < ... < t(d)$. При этом *i*-й интервал — это период времени от $t(i - 1)$ до $t(i)$, $i = 1, 2, ..., d$, где $t(0) = 0$, $t(d) = T$. Важно отметить, что продолжительности интервалов времени и количество отказов в каждом из них могут быть неодинаковыми.

6.3 Вариант 3. Известны наработки до каждого отказа нескольких восстанавливаемых объектов из различных совокупностей

Предполагается, что существует *k* объектов, которые не принадлежат к одной совокупности и их необходимо сравнить. Если каждый объект рассмотреть отдельно, необходимо использовать вариант 1a) в 6.1.2.

Если должно быть выполнено прямое сравнение систем в качестве расширения 6.1 необходимо использовать следующие обозначения:

t_{ij} — время возникновения *i*-го отказа для процесса, соответствующего *j*-му объекту;

N_j — количество наблюдаемых отказов *j*-го объекта;

t_{Nj} — время возникновения *N*-го отказа *j*-го объекта,

где $i = 0, 1, 2, ..., N_j$ и $j = 1, 2, ... k$.

7 Статистические оценки и критерии

7.1 Краткий обзор

В варианте 1 (известны наработки до каждого отказа) дано описание испытаний с ограниченным количеством отказов с одним восстанавливаемым объектом, т. е., когда $k = 1$. Все результаты соответствуют одному объекту. Формулы для данных с ограниченным количеством отказов, предполагают, что k идентичных объектов наблюдают в течение одного интервала времени. Методы определения точечных оценок для всех вышеупомянутых случаев приведены в 7.2.1. Соответствующие методы для случая, когда все объекты наблюдают в различные отрезки времени, приведены в 7.2.2. Методы для случая испытаний с ограниченным временем наблюдений для групп отказов приведены в 7.2.3.

Соответствующий критерий согласия, описанный в 7.3, следует применять после определения точечных оценок параметра в соответствии с 7.2. Эти критерии и методы (см. 7.4—7.7) для определения интервальных оценок различают только случай известных наработок до каждого отказа [все ситуации варианта 1, т. е. 1a), 1b) и 1c)] и случай известных интервалов наработок для групп отказов (вариант 2).

Для выборок, объем которых составляет менее 10 единиц, методы определения приближенных оценок следует применять с большой осторожностью.

7.2 Точечная оценка

7.2.1 Варианты 1a) и 1b). Известны наработки до каждого отказа

Метод применяют только в тех случаях, когда зафиксированы наработки для каждого отказа в соответствии с 6.1.2 и 6.1.3.

Этап 1. Вычисляют сумму:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{T^*}{t_j}\right) \text{ (испытания с ограниченным временем наблюдений),}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{t_N}{t_j}\right) \text{ (испытания с ограниченным количеством отказов).}$$

Этап 2. Вычисляют несмещенную оценку параметра формы β:

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \text{ (испытания с ограниченным временем наблюдений),}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \text{ (испытания с ограниченным количеством отказов).}$$

Этап 3. Вычисляют оценку параметра масштаба λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k\left(T^*\right)^{\beta}} \text{ (испытания с ограниченным временем наблюдений),}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\left(t_N\right)^{\beta}} \text{ (испытания с ограниченным количеством отказов).}$$

Этап 4. Вычисляют оценку параметра потока отказов $z(t)$ в момент времени $t > 0$:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}.$$

Оценка $\hat{z}(t)$ является оценкой параметра потока отказов в точке t из диапазона данных. Оценки для будущих значений t могут быть получены точно так же, но их следует использовать с обычными предостережениями, связанными с экстраполяцией.

Этап 5. На основе N выявленных отказов, последний из которых произошел в момент времени t_N, можно получить оценку медианы наработки до $(N + 1)$-го отказа:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0{,}5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}}\right] \text{ (испытания с ограниченным временем наблюдений),}$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0.5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}/N - 2}\right]$$ (испытания с ограниченным количеством отказов).

7.2.2 Вариант 1c). Известны наработки до каждого отказа

Метод применяют только в случае, когда известны наработки до каждого отказа в соответствии с 6.1.4.

Этап 1. Собирают данные о наработках до отказа t_i, $i = 1, 2, ..., N$, где N — общее количество отказов по k объектам и T_j ($j = 1, 2, ..., k$) — время окончания наблюдений за j-м объектом.

Этап 2. Оценка максимального правдоподобия $\hat{\beta}$ для параметра формы β является решением уравнения

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{N} \ln t_i - \frac{N\sum_{j=1}^{k} T_j^{\beta} \ln T_j}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\beta}} = 0,$$

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{N} \ln t_i - \frac{N\sum_{j=1}^{k} T_j^{\beta} \ln T_j}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\beta}} - 0.$$

Для решения уравнения используют итеративный метод.

Этап 3. Вычисляют оценку параметра масштаба λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\beta}}.$$

Этап 4. Вычисляют оценку параметра потока отказов $z(t)$ для времени $t > 0$:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}.$$

Оценка $\hat{z}(t)$ является оценкой параметра потока отказов в точке t из диапазона данных. Оценки для будущих значений t могут быть получены точно так же, но их следует использовать с обычными предостережениями, связанными с экстраполяцией.

7.2.3 Вариант 2. Известны интервалы наработок для групп отказов

Метод применяют, когда набор данных состоит из известных интервалов времени, в течение которых произошло известное количество отказов в соответствии с 6.2.

Этап 1. Из набора данных выбирают количество отказов N_i, зафиксированных в i-м интервале $[t(i-1), t(i)]$, $i = 1, 2, ..., d$. Общее количество отказов:

$$N = \sum_{i=1}^{d} N_i.$$

Этап 2. Оценка максимального правдоподобия $\hat{\beta}$ параметра формы β является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{d} N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d)\right] = 0.$$

Очевидно, что $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ и $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$. После нормализации членов $t(.)$ относительно $t(d)$ член $\ln t(d)$ исчезает. Для решения уравнения относительно $\hat{\beta}$ используют итеративный метод.

Этап 3. Вычисляют оценку параметра масштаба λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}.$$

Этап 4. Вычисляют оценку параметра потока отказов $z(t)$ в произвольный момент времени $t > 0$:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}.$$

Оценка $\hat{z}(t)$ является оценкой параметра потока отказов в точке t из диапазона данных. Оценки для будущих значений t могут быть получены точно так же, но их следует использовать с обычными предостережениями, связанными с экстраполяцией.

7.3 Критерии согласия

7.3.1 Случай 1. Известны наработки до каждого отказа

7.3.1.1 Критерий Крамера-Мизеса

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1 или 7.2.2, этап 2.

Этап 2. Вычисляют статистику критерия согласия Крамера-Мизеса:

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^{M}\left[\left(\frac{t_j}{T}\right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M}\right)\right]^2,$$

где $M = N$ и $T = T^*$ (испытания с ограниченным временем наблюдений),

$M = N - 1$ и $T = t_N$ (испытания с ограниченным количеством отказов).

Этап 3. Определяют по таблице 1 критическое значение критерия Крамера-Мизеса $C^2_{0,90}(M)$ для уровня значимости 10 %.

Таблица 1 — Критические значения критерия согласия Крамера-Мизеса для уровня значимости 10 %

M	Критическое значение статистики $C^2_{0,90}(M)$
3	0,154
4	0,155
5	0,160
6	0,162
7	0,165
8	0,165
9	0,167
10	0,167
11	0,169
12	0,169
13	0,169
14	0,169
15	0,169
16	0,171
17	0,171
18	0,171
19	0,171
20	0,172
30	0,172
≥ 60	0,173
Примечание 1 — Для испытаний с ограниченной наработкой $M = N$. Примечание 2 — Для испытаний с ограниченным количеством отказов $M = N - 1$.	

Этап 4. Если

$$C^2 > C^2_{0,90}(M),$$

гипотезу о соответствии данных степенной модели отклоняют. В противном случае принимают решение о соответствии данных степенной модели как рабочую гипотезу.

7.3.1.2 Графический метод

Если известны наработки до каждого отказа, для получения дополнительной информации о соответствии данных степенной модели можно использовать графический метод. Он требует построения графика математического ожидания наработки до j-го отказа $E(t_j)$ в соответствии с наблюдаемыми наработками до j-го отказа. Более подробное описание метода приведено в приложениях А и В.

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1, этап 2 и $\hat{\lambda}$ в соответствии с 7.2.1, этап 3.

Этап 2. Вычисляют оценку математического ожидания наработки до j-го отказа, для $j = 1, 2, ..., N$

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

Этап 3. Изображают график $\hat{E}(t_j)$ в зависимости от t_j в идентичных линейных координатах. Визуальная согласованность точек графика с прямой, проходящей через начало координат под углом 45° является субъективной мерой применимости модели.

7.3.2 Вариант 2. Известны интервалы наработок для групп отказов

7.3.2.1 Критерий χ^2

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.3, этап 2 и $\hat{\lambda}$ в соответствии с 7.2.3, этап 3.

Этап 2. Вычисляют математическое ожидание количества отказов в интервале времени $[t(i-1), t(i)]$:

$$e_i = \hat{\lambda}\left\{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}\right\}.$$

Этап 3. Для каждого интервала e_i не должно быть менее 5. В случае необходимости, смежные интервалы необходимо объединять до выполнения критерия. Для d интервалов (после объединения при необходимости) и с соответствующими значениями N_i вычисляют статистику χ^2 аналогично 7.2.3:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}.$$

Этап 4. Определяют критическое значение $\chi^2_{0,90}(d-2)$, используя таблицу χ^2-распределения с $(d-2)$ степенями свободы и уровнем значимости 10 % (см. таблицу 2).

Этап 5. Если тестовая статистика χ^2 превышает критическое значение $\chi^2_{0,90}(d-2)$, гипотезу о соответствии степенной модели сгруппированным данным отклоняют. В противном случае соответствие данных степенной модели принимают как рабочую гипотезу.

Критерий χ^2 является критерием для больших выборок, поскольку для выявления отклонения от степенной модели он требует больших наборов данных.

Таблица 2 — Квантили χ^2-распределения

Степени свободы ν	$\chi^2_{0,05}(\nu)$	$\chi^2_{0,90}(\nu)$	$\chi^2_{0,95}(\nu)$
2	0,10	4,61	5,99
4	0,71	7,78	9,49
6	1,64	10,65	12,59
8	2,73	13,36	15,51
10	3,94	15,98	18,31
12	5,23	18,55	21,03
14	6,57	21,06	23,69
16	7,96	23,54	26,30
18	9,39	25,99	28,87
20	10,85	28,41	31,41

Окончание таблицы 2

Степени свободы v	$\chi^2_{0,05}(v)$	$\chi^2_{0,90}(v)$	$\chi^2_{0,95}(v)$
22	12,34	30,81	33,92
24	13,85	33,20	36,42
26	15,38	35,56	38,89
28	16,92	37,92	41,34
30	18,49	40,26	43,77
32	20,09	42,57	46,17
34	21,70	44,88	48,57
36	23,30	47,19	50,96
38	24,91	49,50	53,36
40	26,51	51,81	55,76
42	28,16	54,08	58,11
50	34,76	63,17	67,51
52	36,45	65,42	69,82
60	43,19	74,40	79,08
62	44,90	76,63	81,37
70	51,74	85,53	90,53
72	53,47	87,74	92,80
80	60,39	96,58	101,88
82	62,14	98,78	104,13
90	69,13	107,57	113,15
92	70,89	109,76	115,39
100	77,93	118,50	124,34
102	79,70	120,68	126,57
110	86,79	129,38	135,48
112	88,57	131,56	137,70
120	95,71	140,23	146,57
122	97,49	142,40	148,78
200	168,28	226,02	233,99
z_p	–1,64	+ 1,28	+ 1,64

Примечание 1 — Линейная интерполяция промежуточных значений является достаточно точной.

Примечание 2 — Для больших значений v используют приближение $\chi^2_p = \left[\left(z_p + \sqrt{2v-1} \right)^2 \right] / 2$ (z_p — квантиль нормированного нормального распределения уровня p).

7.3.2.2 Графический метод

Если набор данных состоит из известных интервалов времени, в течение которых произошло известное количество отказов, то для получения дополнительной информации о соответствии данных степенной модели можно использовать графический метод. Метод предусматривает построение математического ожидания количества отказов в соответствии с наблюдаемым количеством отказов в точках границ интервалов. Более подробно описание метода приведено в приложении А.

Этап 1. Для каждой точки $t(i)$ вычисляют наблюдаемое количество отказов в интервале от 0 до $t(i)$:

$$N\left[t(i)\right] = \sum_{j=1}^{i} N_j.$$

Этап 2. Вычисляют оценку математического ожидания количества отказов $E\,[N\,[t(i)]]$:

$$\hat{E}\,[N\,[t(i)]] = \hat{\lambda}t(i)^{\hat{\beta}}.$$

Этап 3. Строят график $\hat{E}\,[N\,[t(i)]]$ в соответствии с $N\,[t(i)]$ в идентичных линейных координатах. Визуальная согласованность точек с прямой, проходящей под углом 45° через начало координат, является субъективной мерой применимости модели.

7.4 Доверительные интервалы для параметра формы

7.4.1 Вариант 1. Известны наработки до каждого отказа

Параметр формы β степенной модели определяет характер изменения параметра потока отказов во времени. Если $0 < \beta < 1$, то параметр потока отказов убывает. Если $\beta = 1$, то параметр потока отказов является постоянным. Если $\beta > 1$, то параметр потока отказов увеличивается.

При построении двустороннего доверительного интервала для β на основе известных наработок, следует выполнить приведенные ниже шаги.

7.4.1.1 Двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 %. Данные с ограниченным временем наблюдений

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1, этап 2 или в соответствии с 7.2.2, этап 2.

Этап 2. Вычисляют значения D_L и D_U:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}(2N)}{2(N-1)},$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}(2N)}{2(N-1)}.$$

Значения квантиля χ^2- распределения приведены в таблице 2.

Этап 3. Вычисляют нижнюю и верхнюю доверительные границы интервала:

$$\beta_{LB} = D_L\hat{\beta},$$

$$\beta_{UB} = D_U\hat{\beta}.$$

Этап 4. Двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид

$$(\beta_{LB}, \beta_{UB}).$$

Примечание — Значения величин β_{LB} и β_{UB} являются таже нижней и верхней границами односторонних доверительных интервалов для β с уровнем доверия 95 %.

7.4.1.2 Двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 %. Данные с ограниченным количеством отказов

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1, этап 2.

Этап 2. Вычисляют значения D_L и D_U:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}\,(2(N-1))}{2(N-2)},$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}\,(2(N-1))}{2(N-2)}.$$

Значения квантилей χ^2- распределения приведены в таблице 2.

Этап 3. Вычисляют нижнюю и верхнюю доверительные границы интервала:

$$\beta_{LB} = D_L\hat{\beta},$$

$$\beta_{UB} = D_U\hat{\beta}.$$

Этап 4. Двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид

$$(\beta_{LB}, \beta_{UB}).$$

Примечание — Значения β_{LB} и β_{UB} являются также нижней и верхней границами односторонних доверительных интервалов для β с уровнем доверия 95 %.

7.4.2 Вариант 2. Известны наработки для групп отказов

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.3, этап 2.

Этап 2. Вычисляют значения $P(i)$:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)}, \quad i = 1, 2, ..., d.$$

Этап 3. Вычисляют значение A:

$$A = \sum_{i=1}^{d} \frac{[P(i)]^{\beta} \ln[P(i)]^{\beta} - [P(i-1)]^{\beta} \ln[P(i-1)]^{\beta}}{[P(i)]^{\beta} - [P(i-1)]^{\beta}}.$$

Этап 4. Вычисляют значение C:

$$C = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Этап 5. Для определения приближенного двустороннего доверительного интервала для β с уровнем доверия 90 % вычисляют значение S:

$$S = \frac{1.64C}{\sqrt{N}},$$

где N — общее количество отказов.

Этап 6. Вычисляют нижнюю и верхнюю доверительные границы интервала

$$\beta_{LB} = \hat{\beta}(1 - S),$$

$$\beta_{UB} = \hat{\beta}(1 + S).$$

Этап 7. Двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид

$$(\beta_{LB}, \beta_{UB}).$$

Примечание — Значения β_{LB} и β_{UB} — являются также нижней и верхней границами односторонних доверительных интервалов для β с уровнем доверия 95 %.

7.5 Доверительные интервалы для параметра потока отказов

7.5.1 Вариант 1. Известны наработки до каждого отказа

Этап 1. Вычисляют $\hat{z}(t)$ в соответствии с 7.2.1, этап 4 или в соответствии с 7.2.2, этап 4.

Этап 2. Для двустороннего доверительного интервала с уровнем доверия 90 % с помощью таблицы 3 (испытания с ограниченным временем наблюдений) и таблицы 4 (испытания с ограниченным количеством отказов) определяют значения L и U для объема выборки N.

Этап 3. Вычисляют нижнюю и верхнюю доверительные границы интервала:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{U},$$

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{L}.$$

Этап 4. Двусторонний доверительный интервал для $z(t)$ с уровнем доверия 90 % имеет вид

$$(z_{LB}, z_{UB}).$$

Примечание — Значения z_{LB} и z_{UB} являются нижней и верхней границами односторонних доверительных интервалов для $z(t)$ с уровнем доверия 95 %.

Таблица 3 — Коэффициенты L и U для двусторонних доверительных интервалов с уровнем доверия 90 % при испытаниях с ограниченной наработкой

N	L	U	N	L	U
3	0,175	6,490	21	0,570	1,738
4	0,234	4,460	22	0,578	1,714
5	0,281	3,613	23	0,586	1,692
6	0,320	3,136	24	0,593	1,672
7	0,353	2,826	25	0,600	1,653
8	0,381	2,608	26	0,606	1,635
9	0,406	2,444	27	0,612	1,619
10	0,428	2,317	28	0,618	1,604
11	0,447	2,214	29	0,623	1,590
12	0,464	2,130	30	0,629	1,576
18	0,543	1,825	70	0,745	1,336
19	0,552	1,793	80	0,759	1,311
20	0,561	1,765	100	0,783	1,273

Примечание 1 — Для $N > 100$

$$L = \frac{N-1}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2};$$

$$U = \frac{N-1}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2}.$$

Примечание 2 — Линейная интерполяция промежуточных значений дает достаточно точные результаты.

7.5.2 Вариант 2. Известны наработки до каждого отказа

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}(t)$ в соответствии с 7.2.3, этап 4.

Этап 2. Вычисляют значения $P(i)$:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)},\ i = 1, 2..., d.$$

Этап 3. Вычисляют значение A:

$$A = \sum_{i=1}^{d} \frac{[P(i)]^{\beta}\ln[P(i)]^{\beta} - [P(i-1)]^{\beta}\ln[P(i-1)]^{\beta}}{[P(i)]^{\beta} - [P(i-1)]^{\beta}}.$$

Таблица 4 — Коэффициенты L и U для двусторонних доверительных интервалов с уровнем доверия 90 % при испытаниях с ограниченным количеством отказов

N	L	U	N	L	U
3	0,1712	4,746	10	0,4706	2,216
4	0,2587	3,825	11	0,4891	2,127
5	0,3174	3,254	12	0,5055	2,053
6	0,3614	2,892	13	0,5203	1,991
7	0,3962	2,644	14	0,5337	1,937
8	0,4251	2,463	15	0,5459	1,891
9	0,4495	2,324	16	0,5571	1,876

Окончание таблицы 4

N	L	U	N	L	U
17	0,5674	1,814	28	0,6452	1,578
18	0,5769	1,781	29	0,6503	1,566
19	0,5857	1,752	30	0,6551	1,553
20	0,5940	1,726	35	0,6763	1,501
21	0,6018	1,701	40	0,6937	1,461
22	0,6091	1,680	45	0,7085	1,428
23	0,6160	1,659	50	0,7212	1,401
24	0,6225	1,641	60	0,7422	1,360
25	0,6286	1,623	70	0,7587	1,327
26	0,6344	1,608	80	0,7723	1,303
27	0,6400	1,592	100	0,7938	1,267

Примечание 1 — Для $N > 100$

$$L \approx \frac{N-2}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1};$$

$$U \approx \frac{N-2}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1}.$$

Примечание 2 — Линейная интерполяция промежуточных значений дает достаточно точные результаты.

Этап 4. Вычисляют значение D:

$$D = \sqrt{\frac{1}{A}+1}.$$

Этап 5. Для определения приближенного двустороннего доверительного интервала для $z(t)$ с уровнем доверия 90 % вычисляют значение S:

$$S = \frac{1{,}64D}{\sqrt{N}},$$

где N — общее количество отказов.

Этап 6. Вычисляют нижнюю и верхнюю доверительные границы интервала:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{1+S},$$

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{1-S}.$$

Этап 7. Двусторонний доверительный интервал для $z(t)$ с уровнем доверия 90 % имеет вид

$$(z_{LB}, z_{UB}).$$

Примечание — Значения z_{LB} и z_{UB} являются также нижней и верхней границами односторонних доверительных интервалов для $z(t)$ с уровнем доверия 95 %.

7.6 Предикционные интервалы для наработки до будущих отказов единственного объекта

7.6.1 Предикционный интервал для наработки до следующего отказа

Вариант 1. Известны наработки до каждого отказа

Двусторонний предикционный интервал с уровнем доверия 90 % для наработки до $(N + 1)$-го отказа T_{N+1}, т. е. до будущего отказа, следующего за N наблюдаемыми отказами при известных наработках до отказов $t_1, t_2, ..., t_N$ определяют в соответствии со следующей процедурой.

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1, этап 2, или в соответствии с 7.2.2, этап 2.

Этап 2. Вычисляют нижнюю и верхнюю границы предикционного интервала для T_{N+1}:

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{1}{N\hat{\beta}}} - 1}{N\hat{\beta}/N - 1}\right]$$ (испытания с ограниченным временем наблюдений),

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{1}{N\hat{\beta}}} - 1}{N\hat{\beta}/N - 2}\right]$$ (испытания с ограниченным количеством отказов),

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{1}{N\hat{\beta}}} - 1}{N\hat{\beta}/N - 1}\right]$$ (испытания с ограниченным временем наблюдений),

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{1}{N\hat{\beta}}} - 1}{N\hat{\beta}/N - 2}\right]$$ (испытания с ограниченным количеством отказов).

Этап 3. Определяют двусторонний предикционный интервал для T_{N+1} с уровнем доверия 90 % — (T_{1L}, T_{1U}).

Примечание — Границы T_{1L} и T_{1U} являются также нижней и верхней границами односторонних предикционных интервалов для T_{N+1} с уровнем доверия 95 %.

7.6.2 Предикционный интервал для наработки до *R*-го будущего отказа

Вариант 1. Известны наработки до каждого отказа

Приближенный двусторонний предикционный интервал с уровнем доверия 90 % для наработки до $(R + N)$-го отказа T_{N+R}, т. е. для R-го будущего отказа после N отказов с известными наработками до отказов $t_1, t_2, ..., t_N$, определяют в соответствии со следующей процедурой.

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}$ в соответствии с 7.2.1, этап 2, или в соответствии с 7.2.2, этап 2

Этап 2. Вычисляют значение G

$$G = \left[\frac{(N-0{,}5)(N+R-0{,}5)}{NR}\right]\ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right].$$

Этап 3. Вычисляют значение V

$$V = 2NG\ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right].$$

Этап 4. Вычисляют нижнюю и верхнюю границы предикционного интервала для T_{N+R}:

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)}{2N(N-1)G\hat{\beta}F_{0{,}95}(2(N-1),V')}\right]$$ (испытания с ограниченным количеством отказов),

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V}{2NG\hat{\beta}F_{0{,}95}(2(N-1),V')}\right]$$ (испытания с ограниченным временем наблюдений),

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)F_{0{,}95}(V',2(N-1))}{2N(N-1)G\hat{\beta}}\right]$$ (испытания с ограниченным количеством отказов),

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{VF_{0{,}95}(V',2(N-1))}{2NG\hat{\beta}}\right]$$ (испытания с ограниченным временем наблюдений).

Значения квантилей F-распределения приведены в таблице 5. Знаком V' обозначено значение V, округленное до целого числа.

Этап 5. Определяют двусторонний предикционный интервал для T_{N+R} с уровнем доверия 90 % — (T_{RL}, T_{RU}).

Примечание — Границы T_{RL} и T_{RU} являются также нижней и верхней границами односторонних предикционных интервалов для T_{N+R} с уровнем доверия 95 %.

Таблица 5 — Квантили F-распределения уровня 0,95 $F_{0,95}(\nu_1, \nu_2)$

ν_2	ν_1										
	2	4	6	8	10	20	30	40	60	120	∞
2	19,00	19,20	19,30	19,40	19,40	19,40	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
4	6,94	6,39	6,16	6,04	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
6	5,14	4,53	4,28	4,15	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
8	4,46	3,84	3,58	3,44	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
10	4,10	3,48	3,22	3,07	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
12	3,89	3,26	3,00	2,85	2,75	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
14	3,74	3,11	2,85	2,70	2,60	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,59	2,49	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
18	3,55	2,93	2,66	2,51	2,41	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
20	3,49	2,87	2,60	2,45	2,35	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
30	3,32	2,69	2,42	2,27	2,16	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	3,23	2,61	2,34	2,18	2,08	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	3,15	2,53	2,25	2,10	1,99	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,07	2,45	2,18	2,02	1,91	1,66	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
∞	3,00	2,37	2,10	1,94	1,83	1,57	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00
Примечание — Линейная интерполяция для промежуточных значений дает достаточно точные результаты.											

7.7 Проверка гипотез о равенстве параметров формы $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$

7.7.1 Вариант 3. Известны наработки до каждого отказа двух объектов из различных совокупностей

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}_1$ для 1-го объекта и $\hat{\beta}_2$ для 2-го объекта в соответствии с 7.2.1, этап 2.

Этап 2. Вычисляют значения S_1 и S_2:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1 - 1} \ln\left[\frac{t_{N_1}}{t_{i1}}\right],$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_2 - 1} \ln\left[\frac{t_{N_2}}{t_{i2}}\right].$$

Этап 3. Вычисляют значение F:

$$F = \frac{S_1 (N_2 - 1)}{S_2 (N_1 - 1)}.$$

Этап 4. Если выполняется неравенство

$$\frac{1}{F_{0,95}\left(2(N_2 - 1), 2(N_1 - 1)\right)} < F < F_{0,95}\left(2(N_1 - 1), 2(N_2 - 1)\right),$$

нулевая гипотеза о равенстве значений β_1 и β_2 с уровнем значимости 10 % не может быть отклонена. В противном случае принимают решение, что на основе имеющихся данных параметры формы моделей двух объектов статистически различны. Квантили F-распределения приведены в таблице 5.

7.7.2 Вариант 3. Известны наработки до каждого отказа трех или более объектов из различных совокупностей

Этап 1. Вычисляют $\hat{\beta}_j$ для объекта j, $j = 1, 2, ..., k$ в соответствии с 7.2.1, этап 2.

Этап 2. Вычисляют значение S_j:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j - 1} \ln\left[\frac{t_{N_j}}{t_{ij}}\right].$$

Этап 3. Вычисляют значение N:

$$N = \sum_{j=1}^{N_j} N_j .$$

Этап 4. Вычисляют значение W:

$$W = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2(N_j - 1)} - \frac{1}{2(N-k)}\right].$$

Этап 5. Вычисляют значение Y:

$$Y = 2(N-k)\ln\left[\left(\frac{1}{N-k}\right)\sum_{j=1}^{k} S_j\right] - \sum_{j=1}^{k} 2(N_j - 1)\ln\left[\frac{S_j}{N_j - 1}\right].$$

Этап 6. Если выполняется неравенство

$$\frac{Y}{W} < \chi^2_{0,90}(k-1),$$

нулевая гипотеза о равенстве значений β не может быть отклонена с уровнем значимости 10 %. В противном случае принимают решение, что параметры формы моделей, соответствующих различным объектам, статистически различны. Квантили χ^2-распределения приведены в таблице 2.

Приложение А
(справочное)

Степенная модель. Общие сведения

Степенную модель часто используют для анализа надежности восстанавливаемых объектов. Она особенно удобна для объектов, время ремонта которых незначительно и надежность которых остается неизменной после отказа и последующего ремонта. Степенная модель также применима для объектов, надежность которых может улучшаться. Степенная модель впервые исследована в [1].

В [1] сформулирована основная вероятностная модель как негомогенный процесс Пуассона $[N(t),\ t > 0]$ с математическим ожиданием

$$E\,[N(t)] = \lambda\, t^{\beta}$$

и параметром потока отказов

$$z(t) = \lambda\, \beta\, t^{\beta-1}.$$

Модель Пуассона дает вероятность того, что $N(t)$ примет конкретное значение

$$Pr\left[N(t) = n\right] = \frac{\left(\lambda t^{\beta}\right)^{n} e^{-\lambda t^{\beta}}}{n!} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Кроме того, для этой модели

$$E[\lambda t_j^{\beta}] = j,\ (j = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где t_j — наработка до j-го отказа. Модель дает полезное приближение первого порядка для математического ожидания наработки до j-го отказа

$$E\left[t_j\right] = \left(\frac{j}{\lambda}\right)^{1/\beta}.\ (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если $\beta = 1$, то $z(t) = \lambda$ и наработки между последовательными отказами подчиняются экспоненциальному распределению со средним $1/\lambda$ (гомогенный процесс Пуассона) с постоянным параметром потока отказов. Функция $z(t)$ является убывающей при $\beta < 1$ (повышение надежности) и возрастающей при $\beta > 1$ (снижение надежности).

Приложение В
(справочное)

Числовые примеры

В.1 Введение

Следующие примеры показывают применение методов, приведенных в разделе 7. В примере 1 рассмотрены данные наработок для единственного объекта, когда наблюдения завершаются отказом. В примере 2 рассмотрены данные о наработках для каждого отказа нескольких идентичных объектов, когда наблюдения ограничены фиксированным временем. В примере 3 рассмотрены данные наработок для каждого отказа двух объектов из различных совокупностей. В примере 4 рассмотрены группы отказов единственного объекта. Во всех примерах показано использование соответствующих методов настоящего стандарта. При необходимости применены критерии согласия. Примеры допускается использовать для проверки компьютерных программ, предназначенных для расчетов в соответствии с методами раздела 7.

Все вычисления в примерах выполнены с использованием пакета программ. Хотя результаты вычислений приведены с двумя или тремя десятичными знаками, промежуточные вычисления были получены с двойной точностью (с четырьмя или шестью десятичными знаками). Если бы промежуточные вычисления были получены с меньшим количеством десятичных знаков, то результаты вычислений из-за ошибок округления отличались бы от представленных ниже результатов.

Все доверительные интервалы соответствуют уровню доверия 90 %, и аналогично все статистические критерии выполнены для уровня значимости 10 %. Они соответствуют основным значениям таблиц 1—5. Однако если соответствующие значения взяты из других таблиц или получены с помощью программного обеспечения, то значения уровня доверия и уровня значимости могут быть выбраны в соответствии с пожеланиями пользователя.

В.2 Пример 1

Последовательные моменты отказов (в часах) программного обеспечения, являющегося частью большой системы, приведены в таблице В.1

Таблица В.1 — Наработки до отказов системы программного обеспечения

0,2; 4,2; 4,5; 5;0; 5,4; 6,1; 7,9; 14,8; 19,2; 48,6; 85,8; 108,9; 127,2; 129,8; 150,1; 159,7; 227,4; 244,7; 262,7; 315,3; 329,6; 404,3; 486,2
Примечание — $t_N = 486{,}2$ ч, $N = 23$.

Тенденция расположения отказов в начале координат на рисунке В.1 указывает на снижение параметра потока отказов.

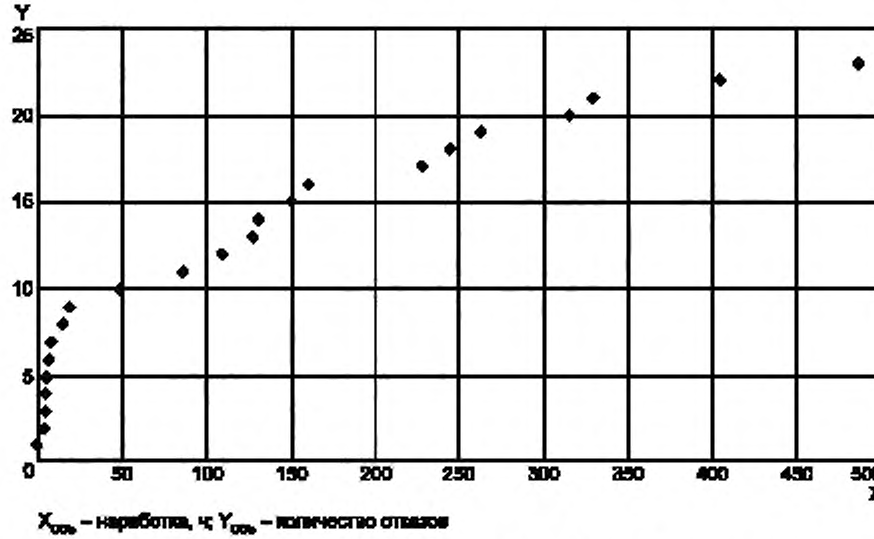


Рисунок В.1 — Количество отказов в соответствии с наработкой системы программного обеспечения

В соответствии с 7.2.1 оценки параметров модели степенного закона

$\hat{\lambda}$ = 2,17;

$\hat{\beta}$ = 0,38.

Критерий согласия

В соответствии с 7.3.1.2, график, приведенный на рисунке В.2, показывает случайное рассеивание относительно прямой под углом 45° к оси ординат, указывающее хорошее соответствие данных степенной модели. В таблице В.2 представлены ожидаемые и полученные в ходе испытаний значения наработок до отказа, нанесенные на график, представленный на рисунке 2. Ожидаемые значения наработок получены с помощью вычислений, приведенных в 7.3.1.2, этап 2.

В соответствии с 7.3.1.1 C^2 = 0,063, M = 22. Для уровня значимости 10 % критическое значение из таблицы 1 равно 0,172. Так как 0,063 < 0,172, можно заключить, что степенная модель хорошо согласуется с данными.

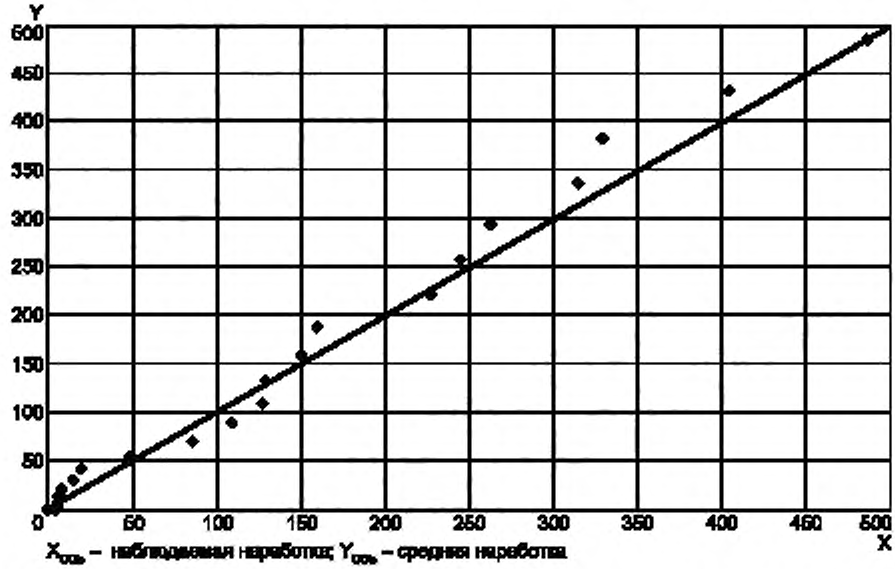


Рисунок В.2 — Средние и наблюдаемые наработки до отказа для системы программного обеспечения

Таблица В.2 — Вычисленные значения суммарных наработок до отказа, представленные на рисунке В.2

Отказ	Полученное значение (ч)	Ожидаемое значение (ч)
1	0,2	0,130
2	4,2	0,803
3	4,5	2,326
4	5,0	4,946
5	5,4	8,881
6	6,1	14,326
7	7,9	21,465
8	14,8	30,468
9	19,2	41,496
10	48,6	54,705
11	85,8	70,242
12	108,9	88,250
13	127,2	108,866
14	129,8	132,224

Окончание таблицы В.2

Отказ	Полученное значение (ч)	Ожидаемое значение (ч)
15	150,1	158,454
16	159,7	187,681
17	227,4	220,028
18	244,7	255,617
19	262,7	294,564
20	315,3	336,983
21	329,6	382,989
22	404,3	432,692
23	486,2	486,200

Доверительный интервал для β

В соответствии с 7.4.1 двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 %: (0,27; 0,55). Поскольку интервал включает значения меньше единицы, это указывает на уменьшение параметра потока отказов.

Доверительный интервал для параметра потока отказов

В соответствии с 7.5.1 двусторонний доверительный интервал с уровнем доверия 90 % в момент времени t = 450 ч — (0,011; 0,031) (отказы/ч).

Предикционный интервал для будущей наработки

В соответствии с 7.6.1 двусторонний предикционный интервал для наработки до 24-го отказа: (488,93; 690,30) ч. В соответствии с 7.6.2 двусторонний предикционный интервал с уровнем доверия 90 % для наработки до 25-го отказа: (504,68; 845,30) ч.

В.3 Пример 2

Пять идентичных систем были запущены в эксплуатацию в одно и то же время в идентичных условиях. Отказавшая система мгновенно восстанавливалась и возвращалась в эксплуатацию. Время ремонта незначительно по сравнению с наработкой. Каждую систему наблюдали в течение 1850 ч эксплуатации. Наработки до отказа приведены в таблице В.3.

Таблица В.3 — Наработки до отказов пяти систем (A, B, C, D, E)

A	B	C	D	E
96	552	1056	1560	
1224	1224			
1392	1570			

Результат объединения наработок после анализа данных представлен в таблице В.4.

Таблица В.4 — Объединенные наработки до отказов пяти идентичных систем

Номер отказа	Наработка, ч
1	96
2	552
3	1056
4	1224
5	1224
6	1392
7	1560
8	1570

График

Впадина на рисунке В.3 указывает возможное увеличение параметра потока отказов.

Оценка параметров

В соответствии с 7.2.1 оценки параметров модели

$$\hat{\lambda} = 3{,}16 \cdot 10^{-4},$$

$$\hat{\beta} = 1{,}13.$$

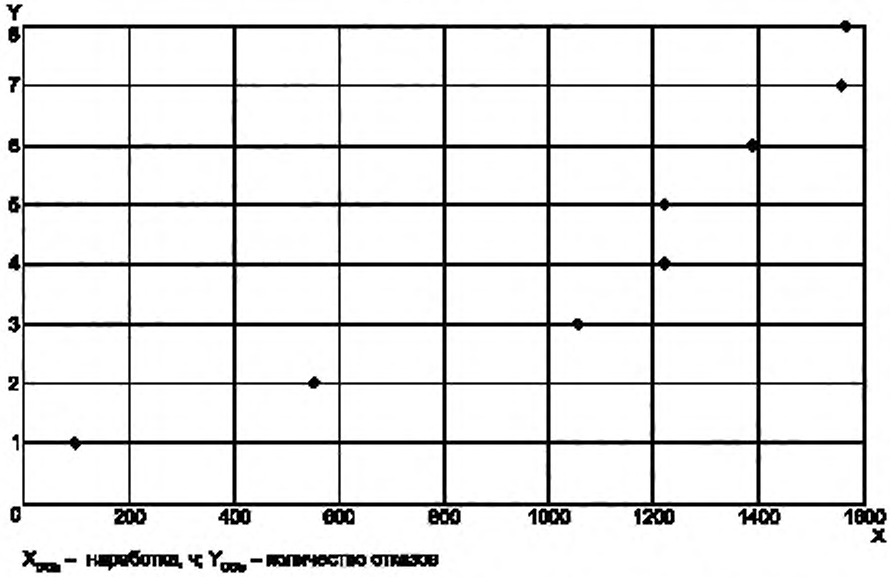


Рисунок В.3 — Количество отказов в соответствии с наработками до отказа для пяти идентичных систем

В соответствии с 7.3.1.1 $C^2 = 0{,}115$, $M = 8$. Для уровня значимости 10 % критическое значение из таблицы 1 равно 0,165. Поскольку 0,115 < 0,165, можно сделать вывод, что степенная модель согласуется с данными. Этот результат противоречит субъективному заключению. Это означает, что восьми отказов недостаточно для отклонения степенной модели. Кроме того, приведенные ниже доверительные интервалы, основанные на этой модели, следует интерпретировать с обычными предостережениями для столь малого набора данных.

Доверительный интервал для β

В соответствии с 7.4.1 двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 %: (0,64; 2,13). Поскольку этот интервал включает значение 1, можно заключить, что нет оснований предполагать, что параметр потока отказов не постоянен.

Доверительный интервал для параметра потока отказов

В соответствии с 7.5.1 двусторонний доверительный интервал для параметра потока отказов с уровнем доверия 90 % на момент времени t = 1000 ч имеет вид $(3{,}46 \cdot 10^{-4}; 23{,}70 \cdot 10^{-4})$ (отказы/ч).

В.4 Пример 3

Изготовитель провел испытания продукции двух возможных поставщиков А и В. После каждого отказа испытуемые объекты были немедленно восстановлены и возвращены на испытания. Наработки до отказа приведены в таблице В.5.

Таблица В.5 — Наработки до отказа в часах для продукции поставщиков А и В

Наработка до отказа (поставщик А)	Наработка до отказа (поставщик В)
600	400
1100	650
1500	900
1750	1100

Окончание таблицы В.5

Наработка до отказа (поставщик А)	Наработка до отказа (поставщик В)
2000	1500
2500	2100
3100	2700
3500	
3800	
4500	
Примечание — t_N = 4500 ч, N = 10.	Примечание — t_N = 2700 ч, N = 7.

График

Данные, представленные на рисунке В.4, указывают на постоянство параметра потока отказов продукции каждого поставщика, хотя продукция поставщика В имеет несколько более высокую интенсивность отказов, чем продукция поставщика А.

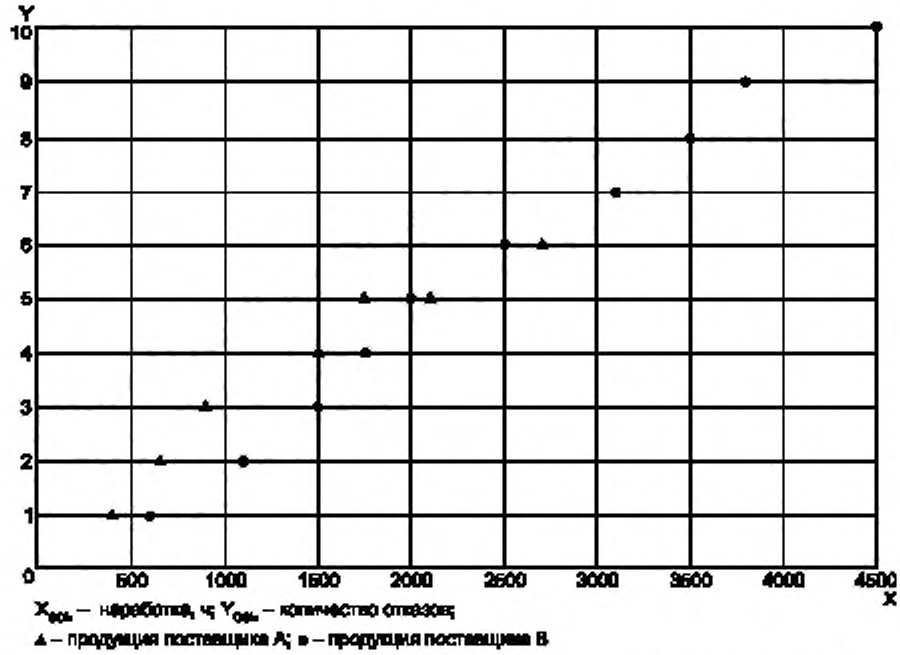


Рисунок В.4 — Количество отказов и наработка для продукции поставщиков А и В

Оценка параметров

В соответствии с 7.2.1 оценки параметров степенной модели для продукции поставщика А:

$\hat{\lambda} = 1{,}53 \times 10^{-3}$,

$\hat{\beta} = 1{,}04$.

Оценки параметров степенной модели для продукции поставщика В:

$\hat{\lambda} = 11{,}59 \times 10^{-3}$,

$\hat{\beta} = 0{,}81$.

Критерий согласия

В соответствии с 7.3.1.1 для продукции поставщика А C^2 = 0,047, M = 9. Для уровня значимости 10 % критическое значение из таблицы 1 равно 0,167. Поскольку 0,047 < 0,167, можно сделать вывод, что данные хорошо согласуются со степенной моделью. Для продукции поставщика В C^2 = 0,072 с M = 6. Для уровня значимости 10 % критическое значение из таблицы 1 равно 0,162. Поскольку 0,072 < 0,162, можно сделать вывод, что данные хорошо согласуются со степенной моделью.

Доверительный интервал для β

В соответствии с 7.4.1 для продукции поставщика А двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид (0,61; 1,88). Для продукции поставщика В двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид (0,42; 1,70). Так как оба интервала содержат значение 1, можно сделать вывод, что нет оснований предполагать, что параметры потока отказов не постоянны. Поскольку интервалы перекрываются, можно заключить, что нет статистических различий между значениями параметров формы.

Доверительный интервал для параметра потока отказов

В соответствии с 7.5.1 для продукции поставщика А двусторонний доверительный интервал для параметра потока отказов с уровнем доверия 90 % в момент времени t = 2500 ч имеет вид ($1{,}02 \cdot 10^{-3}$; $4{,}80 \cdot 10^{-3}$) отказ/ч. Для продукции поставщика В двусторонний доверительный интервал для параметра потока отказов с уровнем доверия 90 % в момент времени t = 2500 ч имеет вид ($0{,}81 \cdot 10^{-3}$; $5{,}38 \cdot 10^{-3}$) отказ/ч. Поскольку интервалы пересекаются, нет оснований предполагать различие между параметрами потока отказов этих двух поставщиков.

Проверка равенства параметров формы

В соответствии с 7.7.1 F = 0,83, а из таблицы 5 $1/F_{0,95}(12,18)$ = 0,43 и $F_{0,95}(18,12)$ = 2,58. Поскольку 0,43 < 0,83 < 2,58, можно сделать вывод, что нет статистических различий между параметрами формы этих двух поставщиков с уровнем значимости 10 %.

В.5 Пример 4

Отказы системы генераторов на морском судне приведены в таблице В.6. Данные об отказах зафиксированы в девяти интервалах, т.е. d = 9 – 1 = 8.

Таблица В.6 — Данные сгруппированных отказов системы генераторов

Наработка в точке конца интервала (год)	Количество отказов в интервале	Суммарное количество отказов
0,0	0	0
2,5	4	4
3,5	5	9
4,5	4	13
5,5	2	15
6,5	14	29
7,5	11	40
8,5	9	49
9,5	10	59
10,33	14	73

График

Впадина на рисунке В.5 указывает на увеличение параметра потока отказов.

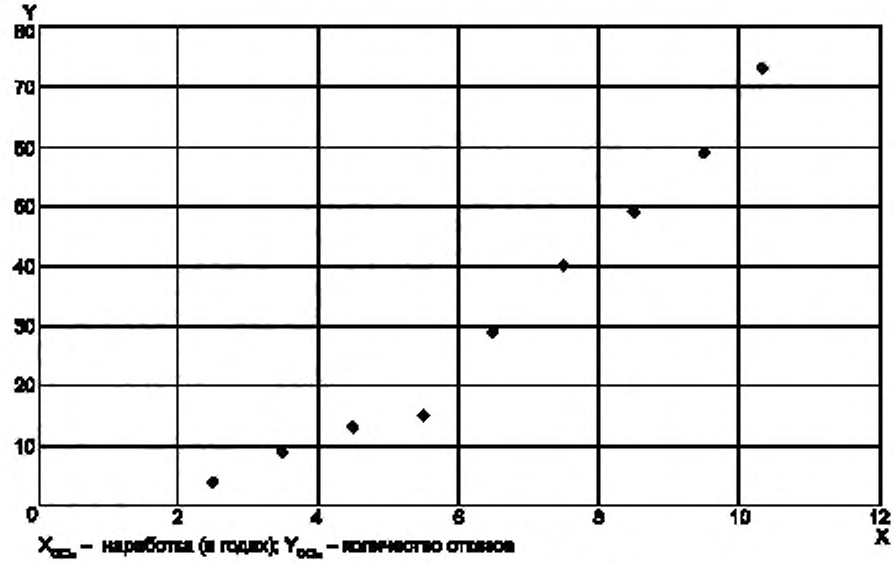
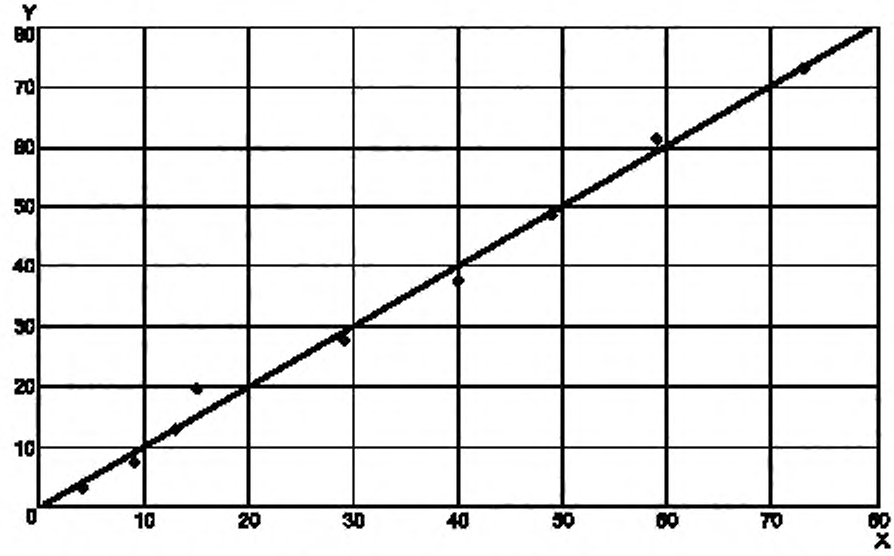


Рисунок В.5 — Суммарное количество отказов и наработка для системы генераторов морских судов



$X_{ось}$ — наблюдаемое суммарное количество отказов; $Y_{ось}$ — среднее суммарное количество отказов

Рисунок В.6 — Среднее и наблюдаемое суммарное количество отказов для системы генераторов морских судов

Оценка параметров

В соответствии с 7.2.3 оценки параметров степенной модели

$\hat{\lambda} = 0{,}57$,

$\hat{\beta} = 2{,}08$.

Критерий согласия

В соответствии с 7.3.2.2 график среднего и наблюдаемого суммарного количества отказов на рисунке В.6 показывает случайные отклонения относительно прямой, расположенной под углом в 45° к оси X, подтверждающие хорошее согласование данных со степенной моделью.

Таблица В.7 — Вычисленные значения ожидаемого количества отказов, представленные на рисунке В.6

Суммарная наработка на конец исследуемого периода (год)	Полученное суммарное количество отказов	Ожидаемое суммарное количество отказов
2,5	4	4,52
3,5	9	7,04
4,5	13	12,12
5,5	15	18,7
6,5	29	26,83
7,5	40	36,55
8,5	49	47,91
9,5	59	60,92
10,33	73	73,00

В соответствии с 7.3.2.1 статистика $\chi^2 = 9,74$. Критическое значение в соответствии с таблицей $2 - \chi^2_{0,90}(6) = 10,65$.

Поскольку статистика меньше критического значения, можно сделать вывод, что данные хорошо согласуются со степенной моделью для уровня значимости 10 %.

Доверительный интервал для β

В соответствии с 7.4.2 двусторонний доверительный интервал для β с уровнем доверия 90 % имеет вид (1,67; 2,49). Так как этот интервал включает значения больше 1, это указывает на увеличение параметра потока отказов.

Оценка параметра потока отказов

В соответствии с 7.5.2 для $t = 11$ лет оценка параметра потока отказов равна 15,74 отказы/год, а доверительный интервал с уровнем доверия 90 % имеет вид (12,34; 21,74) (отказы/год).

Приложение С
(справочное)

Байесовский подход к анализу степенной модели

С.1 Общие положения

Методы, представленные в основной части настоящего стандарта, основаны на классическом подходе к получению статистических оценок. Это означает, что параметры степенной модели λ и β рассматривают как фиксированные, но неизвестные. Классический метод, подобный методу «максимального правдоподобия», используют для получения оценок двух указанных параметров на основе наблюдений о суммарных наработках до отказа восстанавливаемого объекта.

Альтернативу классическому подходу составляет подход Байеса. Согласно байесовскому подходу, параметры λ и β рассматривают как ненаблюдаемые случайные величины. Это влияет на этапы процесса определения оценок параметров. В процессе определения оценок параметров степенной модели с помощью подхода Байеса можно выделить следующие этапы.

a) Выбор закона распределения вероятностей на основе имеющейся информации о каждом из параметров λ и β, выполненный до начала сбора данных. Выбранное распределение вероятностей называют априорным распределением.

b) Получение наблюдаемых значений суммарных наработок до отказа рассматриваемого восстанавливаемого объекта.

c) Получение оценок параметров степенной модели, используя апостериорное вероятностное распределение, найденное с помощью теоремы Байеса. Апостериорное распределение отражает знание о параметрах λ и β, имеющееся после того, как были собраны интересующие данные.

Значения, соответствующие апостериорному распределению вероятностей, пропорциональны значениям априорного распределения, умноженным на значения так называемой «функции правдоподобия», которая отображает меру того, что наблюдаемые значения подчиняются предполагаемому закону распределения (наблюдаемые наработки до отказа подчиняются степенному закону распределения). В общем случае это может быть выражено следующим образом:

апостериорное распределение $\propto$ функция правдоподобия $\times$ априорное распределение.

В таблице С.1 представлены признанные достоинства и недостатки байесовского похода к получению оценок параметров в сравнении с классическим подходом. На практике, при применении подхода Байеса, наибольшую озабоченность вызывает выбор априорного распределения. Так как выбор априорного распределения влияет на значения полученных оценок, то должно существовать четкое обоснование выбора априорного распределения, до того как были получены данные испытаний. Оно необходимо для сохранения целостности анализа данных. В противном случае существует серьезный риск того, что априорное распределение будет использовано для манипулирования данными, путем выбора несоответствующего распределения для получения желаемых оценок параметров. В данном случае, для выбора априорного распределения может быть рекомендовано привлечение независимого аналитика, который на основании информации, полученной от экспертов в соответствующих областях должен провести не менее строгий анализ данных, чем при получении данных в ходе испытаний.

Математическое представление апостериорного распределения зависит от выбора априорного распределения, что оказывает влияние на сложность вычислений при определении оценок. При классическом подходе при определении оценок используют только функцию максимального правдоподобия, как показано в основной части стандарта. Для получения байесовских оценок используют различные математические представления и процедуры, зависящие от вида априорного и апостериорного распределения. Специалист-аналитик должен дать соответствующие рекомендации по выбору априорного распределения, согласующегося, как с имеющейся технической информацией, так и позволяющего производить необходимые вычисления для получения оценок искомых параметров. Получать байесовские оценки можно с помощью соответствующего программного обеспечения.

Таблица С.1 — Достоинства и недостатки классического и байесовского подходов

	Классический подход	Байесовский подход
Достоинства	Хорошо изучен и принят в различных отраслях промышленности Следует принципу того, что данные должны быть объективными	Учитывает информацию, имеющуюся в наличии до сбора данных Правомерность применения источников информации для получения априорного распределения может быть отслежена

Окончание таблицы С.1

	Классический подход	Байесовский подход
Недостатки	Принятые предположения могут не иметь четкого обоснования Для получения более точных оценок требуются выборки большего объема	Субъективность выбора априорного распределения, приводящая к выбору распределения, влияющего не должным образом на получение апостериорного распределения Сложность вычислений, которые, обычно, не могут быть проведены с помощью аналитических методов

С.2 Байесовские оценки для степенной модели

Рассмотрим степенную модель с параметром потока отказов в момент времени t:

$$z(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}.$$

Пусть $Pr(\lambda, \beta)$ представляет собой априорную вероятность соответствующих значений параметров λ и β. В соответствии с основным содержанием настоящего стандарта, пусть t_i представляет собой соответствующую суммарную наработку до i-го отказа восстанавливаемого объекта, где $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Следует отметить, что наблюдения t_i, $i = 1, \ldots, N$, должны быть сделаны только после того, как будет задана $Pr(\lambda, \beta)$. Апостериорное распределение будет представлять информацию о параметрах условной модели по наблюдаемым наработкам до отказа. Апостериорное распределение обозначают $Pr(\lambda, \beta \mid t)$, где $\lambda, \beta \mid t$ указывает на условность распределения (для обозначения условности используют символ «|»), при этом вероятности определенных значений λ и β зависят от значения наработок до отказов t_i, $i = 1, \ldots, N$. Апостериорное распределение представляют следующим образом

$$Pr(\lambda,\beta|t) = \frac{Pr(\lambda,\beta) f(t|\lambda,\beta)}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Pr(\lambda,\beta) f(t|\lambda,\beta)\, d\lambda\, d\beta},$$

где $f(t|\lambda, \beta)$ представляет собой функцию правдоподобия, которая задана при помощи функции условной плотности совместного распределения вероятностей случайных величин t_i, $i = 1, \ldots, N$, при заданных значениях λ и β.

Пусть T обозначает соответствующую суммарную наработку восстанавливаемого объекта. Функция правдоподобия для процесса, описываемого степенной моделью, задана следующим образом:

$$f(t|\lambda,\beta) = \lambda^N \beta^N \left(\prod_{i=1}^{N} t_i\right)^{\beta-1} e^{-\lambda T^{\beta}}. \qquad (C.1)$$

Примечание 1 — В случае ограничения данных по количеству отказов T равно t_N.

Выбор априорного распределения должен давать представление о характере неопределенности значения оцениваемого параметра. Функциональное представление априорного распределения, обычно, производит специалист-аналитик на основе изучения составляющих проблемной ситуации; информации, получаемой от технических экспертов, имеющих знания о функционировании аналогичных систем; результатов испытаний и других подобного рода данных.

Существует много различных функциональных представлений априорного распределения для степенной модели (см. обзор в [2]). В данном приложении не поставлена задача рассмотрения всех возможных априорных распределений для степенной модели. Здесь представлены два практических примера, иллюстрирующих два различных вида априорного распределения и вычисления байесовских оценок для степенной модели. Для прозрачности процесса определения байесовских оценок, дано детальное поэтапное описание каждой моделируемой ситуации.

Примечание 2 — Представленные примеры имеют отношение не только к выбору вида соответствующего априорного распределения. Множество представлений априорного распределения для степенной модели приводит к достаточно сложным вычислениям, требующим участия специалиста, владеющего методами работы с соответствующим программным обеспечением. При выборе априорного распределения опираются на выводы, полученные соответствующим специалистом-аналитиком.

Априорное распределение должно быть задано до начала проведения сбора данных, хотя в примерах, описывающих различные стадии байесовского анализа, этот период может быть несколько скрыт.

С.3 Числовые примеры

С.3.1 Общие сведения

Представленные числовые примеры показывают применение процесса получения байесовских оценок к степенной модели. Существует компьютерное программное обеспечение, позволяющее выполнять требуемые вычисления. Вычисленные значения представлены с четырьмя десятичными знаками. Оба примера следуют обычному формату, который начинается с анализа проблемы, и дальнейшего применения трех стадий байесовского анализа, описанных в С.1.

Примечание — Этапы анализа представлены в порядке их последующего применения, однако, хорошей практикой является привлечение специалиста-аналитика для комплексного определения априорного распределения и получения математической модели апостериорного распределения, а также соответствующих оценок параметров.

С.3.2 Получение байесовской оценки увеличения безотказности в период начала функционирования новой системы

Описание проблемы

Новая система поступила в эксплуатацию, и будет эксплуатироваться непрерывно. Все сбои аппаратного обеспечения, возникшие в период начала функционирования были устранены путем применения соответствующих корректирующих действий. Для определения возрастания безотказности необходимо получать оценки любых изменений параметра потока отказов. Степенная модель обеспечивает правдоподобное представление данной проблемы, так как она может улавливать изменения параметра потока отказов в ходе функционирования системы. Специалист, ответственный за функционирование системы, владеет информацией о работе систем подобного вида и результатах, проведенных для их изучения испытаний.

Этап 1. Выбор априорного распределения

Перед вводом системы в эксплуатацию, специалист-аналитик рассматривает будущий процесс функционирования системы и анализирует представленные техническими специалистами предположения о возможных истинных значениях параметров степенной модели. Специалист-аналитик рассматривает возможное математическое представление априорного распределения, до того как сделает выводы о соответствии истине предположений технических специалистов о неопределенности параметров модели.

В рассматриваемом примере, аналитик решает репараметризовать степенную модель в терминах $\eta = \lambda T^{\beta}$ исходя из представленных ниже соображений. Во-первых, новый параметр η представляет среднее количество отказов за суммарную наработку T, что является более значимым для интерпретации и подтверждения выводов, сделанных на основе данных, предоставленных техническими специалистами. Во-вторых, данная репараметризация позволяет выразить функцию правдоподобия как произведение двух независимых функций, которые поддерживают выводы, полученные путем анализа информации, предоставленной техническими специалистами, а также облегчает проведение необходимых вычислений. Функция правдоподобия, первоначально представленная формулой (С.1), может быть выражена следующим образом:

$$f\left(t\,|\eta,\beta\right) = \prod_{i=1}^{N} t_i^{\beta-1}\left[\beta^N e^{-\beta\sum_{i=1}^{N}\ln\frac{T}{t_i}}\right]\left[\eta^N e^{-\eta T^{\beta}}\right], \qquad (С.2)$$

где $Pr(\beta)$ – $\mathrm{Gamma}\left(N+1,\sum_{i=1}^{N}\ln\frac{T}{t_i}\right)$ и $Pr(\eta) \sim \mathrm{Gamma}\ (N = 1,1)$.

Примечание 1 — *Gamma (a, b)* обозначает гамма-распределение с параметрами *a* и *b*. Pr(β) обозначает распределение вероятностей параметра β. Pr(η) обозначает распределение вероятностей параметра η.

Аналитику необходимо выбрать распределение, отражающее предварительные знания о параметрах β и η. В обоих случаях гамма-распределение выбрано по двум причинам. Во-первых, оно обеспечивает гибкость реагирования на характеристики неопределенности априорных значений параметров. Во-вторых, гамма-распределение обеспечивает так называемое «сопряжение», что позволяет упростить вычисления, необходимые для получения апостериорных оценок.

В предположении, что параметры β и η статистически независимы, неопределенность их истинных значений может быть представлена априорными гамма-распределениями:

$$\pi(\beta) \sim \mathrm{Gamma}(a_{\beta}b_{\beta}) \text{ и } \pi(\eta) \sim \mathrm{Gamma}\ (a_{\eta}b_{\eta}). \qquad (С.3)$$

Можно получить значения так называемых «гиперпараметров» $(a_{\beta},b_{\beta},a_{\eta},b_{\eta})$ и проверить соответствие гамма-распределения представлению характеристик неопределенности параметров β и η, полученных путем анализа информации, предоставленной техническими специалистами. Затем, от новых параметров можно вернуться к обычным параметрам степенной модели λ и β, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$\pi(\eta, \beta) = \pi(\eta)\pi(\beta) = \pi(\lambda|\beta)\pi(\beta) = \pi(\lambda., \beta), \qquad (С.4)$$

где $\pi(\lambda) \sim \mathrm{Gamma}(a_{\eta}b_{\eta}T^{\beta})$ и совместное априорное распределение является сопряженным.

Один подход к изучению неопределенности параметра β использует табличный бланк, представленный в таблице С.2а. Данную таблицу заполняет технический эксперт, его просят распределить 20 жетонов, каждый стоимостью 5 %, по классам, представленным в данной таблице, отображающим возможность того, что скорость роста β принадлежит данному классу. Таблица С.2b представляет собой заполненный вариант таблицы С.2а, где эксперт определил, что неопределенность истинного значения β лежит между 0 и 0,6, при этом соответствующим модальным классом является класс значений 0,3—0,4.

Примечание 2 — Техническому эксперту было сообщено, что не существует точного ответа на заданный ему вопрос, что обеспечило честность суждений относительно неопределенности значений параметров.

Примечание 3 — Количество жетонов и, следовательно, их стоимость выбраны так, чтобы отражать разбиение данных, соответствующих априорному распределению. Например, стоимость всего распределения составляет 100 %, таким образом, если стоимость одного жетона составляет 5 %, то для получения 100 % необходимо 20 жетонов. Если процентная стоимость жетона падает (возрастает), то, следовательно, возрастает (уменьшается) количество жетонов.

Примечание 4 — В данном примере возможные значения параметра формы заранее заданы в таблице. Данные значения можно не вносить в таблицу, если существует некоторое опасение, что значения будут воздействовать на действия технического эксперта как некий «якорь».

Подобный процесс может быть использован для получения оценки среднего значения количества отказов за суммарную наработку T. Таблица С.3а представляет бланк таблицы для параметра η. Во-первых, технический эксперт должен был определить значимые классы диапазона значений η для системы, находящейся в эксплуатации два года, при этом суммарная наработка системы составила 20000 ч, т. е. T = 20000 ч. Жетоны были распределены по классам в соответствии с предположениями эксперта, о том, что истинное значение может принадлежать любому классу данной таблицы. Таблица С.3b представляет собой заполненную экспертом таблицу. Предположение эксперта состоит в том, что истинное значение среднего количества отказов может лежать между 10000 и 100000, модальным классом является класс 300000 отказов.

Аналитик должен преобразовать субъективные частоты, представленные в таблицах С.2 и С.3 в априорное распределение с соответствующими параметрами. Для получения априорного распределения в соответствии с формулой (С.1) аналитик должен подобрать подходящее гамма-распределение, согласующееся с данными, полученными от технического эксперта. Для субъективных распределений параметров β и η могут быть использованы стандартные алгоритмы выбора подходящего распределения. Гамма-распределение с параметрами a_β = 6,7956 и b_β = 1/0,0448 = 22,3214 было найдено для представления субъективного распределения параметра β. Наилучшее приближение субъективного распределения параметра η — среднего количества отказов, произошедших до того как суммарная наработка составила T = 20000 ч. дает гамма-распределение с параметрами a_η = 17,7566 и b_η = 1/1447,408 = 0,000691.

Выбранное гамма-распределение должно быть проверено на степень согласованности с данными. На рисунках С.1 и С.2 представлены графики двух гамма-распределений. Подобные графики должны быть показаны техническому эксперту для получения его заключения о том, что характеристики функции, используемой для обобщения неопределенностей приемлемы. Если это не так, то аналитик должен пересмотреть процесс выбора априорного распределения, для того чтобы убедиться, что учтено мнение технического эксперта.

Примечание 5 — Это может быть проделано при помощи моделирования различных выходов испытаний (например, нет отказов, небольшое количество отказов или большое количество отказов) и представления данных результатов техническому эксперту.

В таблицах С.4 и С.5 представлены данные о значениях подобранного гамма-распределения и полученных субъективных вероятностях. Их соответствие не является абсолютным, так как оба подобранных гамма-распределения недооценивают модальный класс субъективного распределения, но имеют лучшее соответствие на концах распределения. Данное положение соответствует осторожной стратегии, используемой для выбора априорных параметров. Должны быть вычислены итоговые статистики, такие как математическое ожидание и стандартное отклонение абсолютного отклонения (ошибки) выбранного распределения от субъективного. На основе этих данных аналитик получит возможность выбрать подходящее распределение среди конкурирующих возможных распределений для приближения данных, а также оценить является ли ошибка приближения приемлемой. В данном примере математическое ожидание абсолютной ошибки составило порядка 0,05, что было отнесено к приемлемым значениям.

Таблица С.2 — Матрица для получения субъективного распределения параметра формы β

Таблица С.2a — Незаполненная матрица

Possible value of β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,5)	> 0,5

Таблица С.2b — Заполненная матрица

			●		
			●		
		●	●		
		●	●		
		●	●		
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
Possible value of β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,5)	> 0,5

Таблица С.3 — Матрица для получения субъективного распределения среднего количества отказов (параметра η)

Таблица С.3a — Незаполненная матрица

Possible value of $\eta(\times 10^{-4})$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	$2\frac{1}{2}$

Таблица С.3b — Заполненная матрица

					●			
					●			
				●	●			
			●	●	●	●		
		●	●	●	●	●		
		●	●	●	●	●	●	●
Possible value of $\eta(\times 10^{-4})$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	10

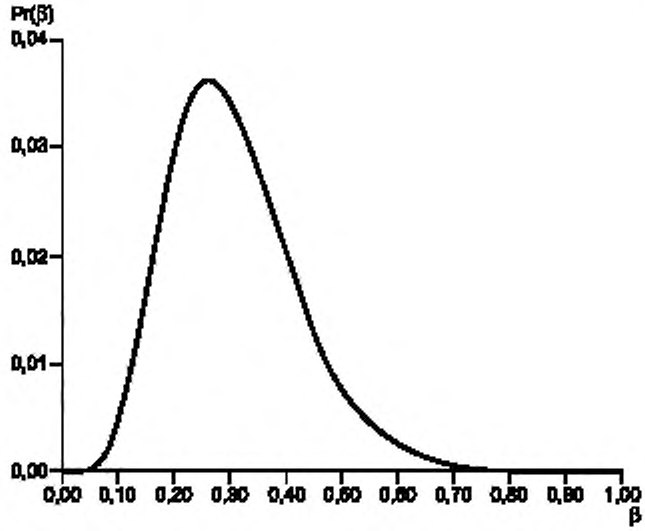


Рисунок С.1 — График подобранного гамма-распределения (6,7956; 0,0448) для параметра формы степенной модели

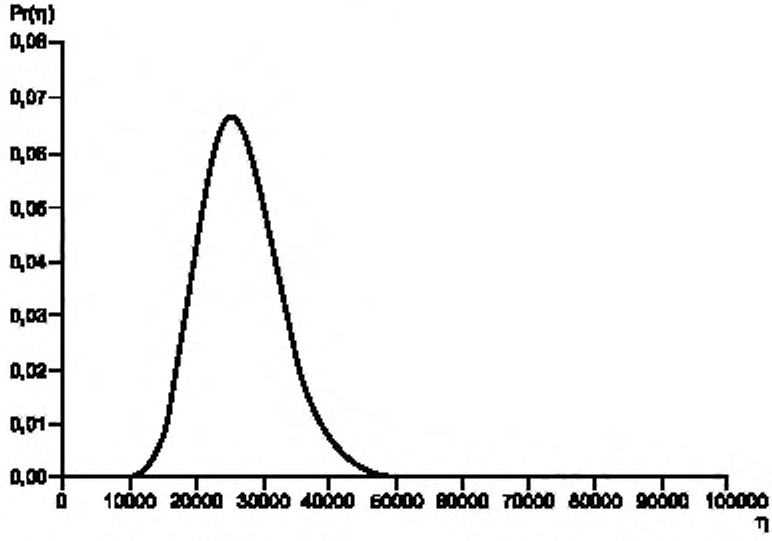


Рисунок С.2 — График подобранного гамма-распределения (17,7566; 1447,408) среднего количества отказов для степенной модели

Таблица С.4 — Сравнение подобранного априорного гамма-распределения и субъективного распределения для параметра формы β

Интервал возможных значений β	Субъективное распределение частот	Субъективное распределение вероятностей	Подобранное гамма-распределение (6,7956; 0,0448)	Разность значений подобранного гамма-распределения и субъективного распределения
0—0,2	3	0,15	0,1853	–0,0353
0,2—0,3	6	0,30	0,3488	–0,0488
0,3—0,4	8	0,40	0,2726	0,1274
0,4—0,6	3	0,15	0,1758	–0,0258
> 0,6	0	0	0,0175	–0,0175
—			Математическое ожидание абсолютной ошибки Стандартное отклонение	0,0501 0,0722

Таблица С.5 — Сравнение подобранного априорного гамма-распределения и субъективного распределения для количества отказов за время T = 20000 ч (параметра η)

Интервал возможных значений для η	Субъективное распределение частот	Субъективное распределение вероятностей	Подобранное гамма-распределение (17,7566, 1447,408)	Разность значений подобранного гамма-распределения и субъективного распределения
0—10000	2	0,10	0,0004	0,0996
10000—20000	3	0,15	0,1748	–0,0248
20000—25000	4	0,20	0,3103	–0,1102
25000—30000	6	0,30	0,2871	0,0129
30000—50000	3	0,15	0,2269	–0,0769
50000—80000	1	0,05	0,0006	0,0494
80000—100000	1	0,05	0	0,0500
			Математическое ожидание абсолютной ошибки Стандартное отклонение	0,06065 0,0749

Этап 2. Получение данных в процессе испытаний

В таблице С.6 представлены суммарные наработки до соответствующих отказов для каждого аппаратного элемента системы, подвергавшегося корректирующим действиям за первые два года работы системы. Суммарная наработка системы составила T = 20000 ч.

Таблица С.6 — Наработки до отказа, полученные в процессе испытаний системы

Наименование элемента	Количество отказов	Суммарная наработка до отказа
A	4	34 ч, 1876 ч, 11143 ч, 12429 ч
B	2	10910 ч, 12241 ч
C	1	1719 ч
D	3	798 ч, 1634 ч, 2692 ч
E	1	156 ч
F	2	384 ч, 1078 ч
G	1	415 ч
H	2	11785 ч, 20200 ч

Окончание таблицы С.6

Наименование элемента	Количество отказов	Суммарная наработка до отказа
I	5	1 ч, 32 ч, 2878 ч, 15973 ч, 18840 ч
J	1	1 ч
K	1	1235 ч
L	1	8286 ч
M	2	862 ч, 2074 ч
N	5	158 ч, 546 ч, 2828 ч, 2971 ч, 12961 ч
O	3	4102 ч, 6523 ч, 13576 ч
P	1	15 ч, 178 ч
Q	4	700 ч, 1647 ч, 4121 ч, 12464 ч
R	5	18 ч, 45 ч, 575 ч, 611 ч,13994 ч
S	8	5 ч, 11 ч, 226 ч, 1991 ч, 3089 ч, 3989 ч, 5589 ч, 16850 ч

Этап 3. Байесовские оценки параметров, полученные по апостериорному распределению

На основе выбранного априорного распределения и данных испытаний получают апостериорное распределение, на основе которого затем определяют байесовские оценки параметров степенной модели. Для степенной модели, с заданной формулой (С.1) функцией правдоподобия и априорным распределением, заданным формулой (С.4), апостериорное распределение имеет следующий вид:

$$Pr(\lambda,\beta|t) = \text{Gamma}\left(a_\beta + N, b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln\frac{T}{t_i}\right) \times \text{Gamma}\left(a_\eta + N, b_\eta + 1\right). \quad (C.5)$$

Из таблицы С.6 следует, что общее количество отказов $N = 52$. В соответствии с оценками параметров, по подобранным гамма-распределениям и, соответственно, формуле (С.5) для параметров апостериорного распределения получают следующие оценки:

$$a_\beta + N = 6{,}7956 + 52 = 58{,}7956,$$

$$b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln\frac{T}{t_i} = 22{,}2816 + 146{,}4683 = 168{,}7499,$$

$$a_\eta + N = 17{,}7566 + 52 = 69{,}7566,$$

$$b_\eta + 1 = 0{,}000691 + 1 = 1{,}000691.$$

Байесовская оценка параметра формы β имеет вид:

$$\beta = \frac{a_\beta + N}{b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln\frac{T}{t_i}} = \frac{58{,}7956}{168{,}7499} = 0{,}3484. \quad (C.6)$$

Байесовская оценка параметра η имеет вид:

$$\hat{\eta} = \frac{a_\eta + N}{b_\eta + 1} = \frac{69{,}7566}{1{,}000691} = 69{,}7085$$

откуда:

$$\hat{\lambda} = \frac{\eta}{T^\beta} = \frac{69{,}7085}{20000^{0{,}3484}} = 2{,}2117. \quad (C.7)$$

Заключительные замечания

В таблице С.7 представлены оценки параметров, полученные с помощью байесовского и классического подходов. Процесс получения классических оценок здесь не представлен, но он содержит этапы, подобные этапам, приведенным в основной части настоящего стандарта. Оценки, полученные с помощью обоих подходов, показывают, что значение параметра потока отказов системы уменьшается с увеличением суммарной наработки, что согласуется с ростом безотказности системы. Байесовская оценка повышения безотказности выше,

чем классическая оценка, так как априорное гамма-распределение для параметра формы влияет на оцениваемое значение параметра, также как и данные испытаний.

Выбор функционального представления априорного распределения, методы, используемые для выявления и подтверждения субъективных вероятностей и подход, используемый для подбора параметрического распределения имеет важное значение, так как оказывает влияние на получаемые оценки. В данном примере, априорное распределение влияет на байесовский параметр формы. Правдоподобие всех предположений, сделанных в ходе анализа, должно быть обосновано.

Таблица С.7 — Оценки параметров степенной модели

Параметр	Байесовская оценка	Классическая оценка
β	0,3484	0,3467
λ	2,2117	1,6715

С 3.3 Байесовский прогноз количества отказов функционирующей системы

Описание проблемы

Необходимо определить оценку среднего количества отказов, которые произойдут за следующие 6000 ч работы системы, после того, как система уже функционировала 10000 ч. Для описания характера возможного изменения параметра потока отказов, с течением календарного времени, выбрана степенная модель. Технические сведения об эксплуатационных требованиях и техническом обслуживании будут использованы специалистом-аналитиком при выборе априорного распределения вероятного количества и связанной с этим неопределенности.

Этап 1. Выбор априорного распределения

Аналитик запрашивает у технического эксперта данные о характерном количестве отказов, которое он ожидал к 10000 часам функционирования системы с учетом разброса этого значения.

Согласно предположениям технического эксперта, в среднем, может произойти 30 отказов. При этом технический эксперт сделал предположение, что вероятность того, что произойдет менее пяти или более 85 отказов, очень мала. Приблизительный вид распределения количества отказов согласно информации, полученной от технического эксперта, представлен на рисунке С.3.

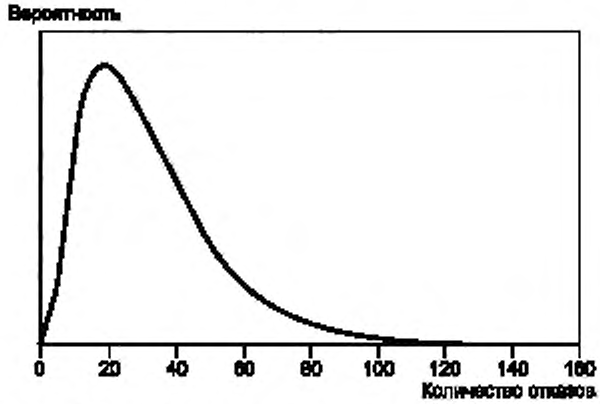


Рисунок С.3 — Субъективное распределение количества отказов

Аналитику необходимо преобразовать информацию о субъективном распределении в математическое представление априорного распределения. Задачей аналитика является выбор математического представления распределения, которое как соответствует субъективному распределению, полученному по предположениям технического эксперта, так и позволяет производить вычисления, необходимые для получения оценок параметров. Принятый подход состоит в репараметризации степенной модели, с помощью функции параметра потока отказов:

$$z(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}, \qquad (С.8)$$

где $\theta = \lambda^{-\beta}$ и совместная вероятность β и θ имеет вид:

$$Pr(\theta,\beta;a,b,T) = g(\beta)\frac{\beta}{\theta}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta a}\exp\left[-b\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta}\right], \qquad (С.9)$$

где $g(\beta)$ — априорное распределение β и $\Gamma(.)$ обозначает гамма-функцию. Данный вид априорного распределения был предложен несколькими авторами (см. [3]) и аналитиками, считающими, что он достаточно гибок для распознавания характера неопределенности среднего количества отказов, предложенного техническим специалистом. Гиперпараметры априорного распределения, представленные в формуле (С.9), *a*, *b* для наработки *T*, могут быть получены путем анализа информации, предоставленной техническим специалистом. Аналитик может непосредственно взять 30 отказов в качестве математического ожидания гамма-распределения. Стандартное отклонение характеризует разброс данных, а для асимметричных распределений, таких, как представленное на рисунке С.3, стандартное отклонение приблизительно равно четверти размаха данных. Так как размах среднего количества отказов, по предположениям технического эксперта составляет 85 – 5 = 80, то стандартное отклонение равно 20.

Так как математическое ожидание и стандартное отклонение гамма-распределения могут быть соотнесены с его параметрами, получаем значения *a* и *b*:

$$a = \frac{\text{мат.ожид.}^2}{\text{дисперсия}} = \frac{30^2}{20^2} = 2{,}25, \quad b = \frac{\text{мат.ожид.}}{\text{дисперсия}} = \frac{30}{20^2} = 0{,}075.$$

Аналитик может построить график функции гамма-распределения с параметрами (2,25; 0,075) и предложить техническому специалисту удостовериться, что данное распределение согласуется с его предположениями. Если выбранное распределение не согласуется с мнением технического эксперта, аналитик должен пересмотреть выбор априорного распределения.

Для полного определения совместного распределения, заданного формулой (С.9) в соответствии с предположениями технического специалиста определяют распределение параметра формы β, путем анализа изменений параметра потока отказов. Технический эксперт уверен, что значение параметра потока отказов не будет возрастать с ростом значений суммарной наработки, но будет ли более вероятным убывание значения параметра потока отказов или его константное состояние, технический эксперт прогнозировать не может. Аналитик на основе данной информации выбрал равномерное распределение при $0{,}5 < \beta < 1$:

$$g(\beta) = \frac{1}{0{,}5} \quad 0{,}5 < \beta < 1,$$

так как для данной функции не важны значения параметра формы, не соответствующие невозрастанию значения параметра потока отказов.

Этап 2. Получение данных в процессе испытаний

Данные об отказах получены в процессе испытаний. За 10000 часов суммарной наработки получено 30 соответствующих отказов ($N = 30$). Суммарные наработки до отказов приведены в таблице С.8.

Этап 3. Байесовские оценки параметров, полученные по апостериорному распределению

Для степенной модели данных, при выбранном априорном распределении, можно получить и представить прогноз среднего количества отказов *M* для временного интервала в будущем, обозначенного как: (t_N, $t_N + S$)

$$Pr(M|t) = \frac{cb^a\Gamma(N+M+a)}{M!\Gamma(a)} \int_0^\infty g(\beta)\beta^N T^{\beta a} u^\beta \left\{ \frac{[(t_N+s)^\beta - t_n^\beta]^M}{[bT^\beta + (t_N+s)^\beta]^{N+M+a}} \right\} d\beta, \qquad (C.10)$$

где N — это количество полученных отказов за заданную наработку $u = \prod_{i=1}^{N} t_i$ и c — нормирующая константа, заданная следующим образом:

$$c = \left[\int_0^\infty g(\beta) \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\beta^N u^\beta T^{a\beta} \Gamma(N+a)}{\left(t_N^\beta + T^\beta\right)^{N+\beta}} d\beta \right]^{-1}.$$

Подстановка соответствующих данных в формулу для априорного распределения и применение формулы (С.10) к данным испытаний дает апостериорное распределение количества отказов для интервала времени в будущем, так, если наработка к последнему полученному отказу составила 8690 часов, $t_{30} = (8690, t_{30} + s = 8690 + 6000)$, то

$$Pr(M|t) = \frac{c0{,}075^{2{,}25}\Gamma(30+M+2{,}25)}{M!\Gamma(2{,}25)} \int_0^\infty \frac{1}{2{,}5^{30}} \beta^{30} 10000^{2{,}25\beta} u^\beta \left\{ \frac{\left[(8690+6000)^\beta - 8690^\beta\right]}{\left[0{,}075(10000)^\beta + (8690+6000)^\beta\right]^{30+2{,}25+M}} \right\}^M d\beta,$$

где $u = \prod_{i=1}^{N} t_i = 3{,}7463 \cdot 10^{107}$ и $c = [3{,}5887 \cdot 10^{-20}]^{-1}$.

Таблица С.8 — Наработка до отказа системы в эксплуатации

Порядковый номер отказа	Суммарная наработка до отказа
1	860
2	1258
3	1317
4	1422
5	1B97
6	2D11
7	2122
8	2439
9	3203
10	3298
11	3902
12	3910
13	4000
14	4247
15	4411
16	4456
17	4517
18	4B99
19	4910
20	5676
21	5755
22	6137

На рисунке С.4 представлены апостериорные вероятности количества отказов за следующие 6000 часов функционирования системы M. На рисунке С.5 представлена кумулятивная функция апостериорного распределения вероятностей количества отказов за следующие 6000 часов функционирования системы. Апостериорное распределение имеет математическое ожидание равное 18,24, что с наибольшей вероятностью предполагает 19 отказов за следующие 6000 часов функционирования системы. По апостериорному распределению также можно получить 95 %-ные границы для количества отказов. Например, верхняя 95 %-ная граница соответствует 95 %-ному процентилю апостериорного распределения, который соответствует значению 28. Это означает, что только в 5 % случаев за следующие 6000 часов функционирования системы количество отказов будет превосходить значение 28.

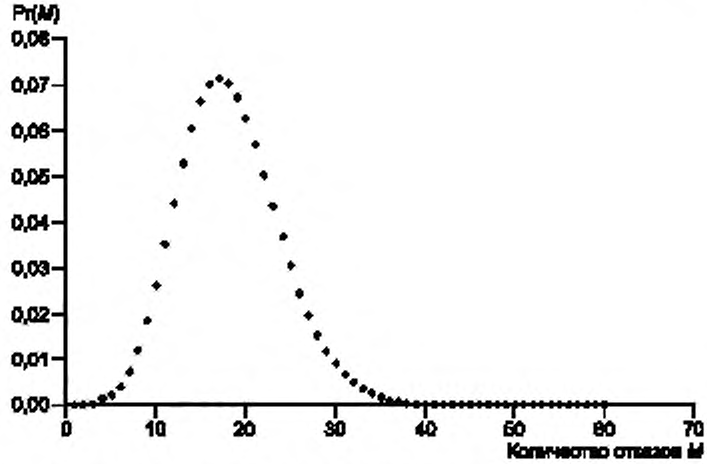


Рисунок С.4 — График апостериорного распределения вероятностей количества отказов *M*

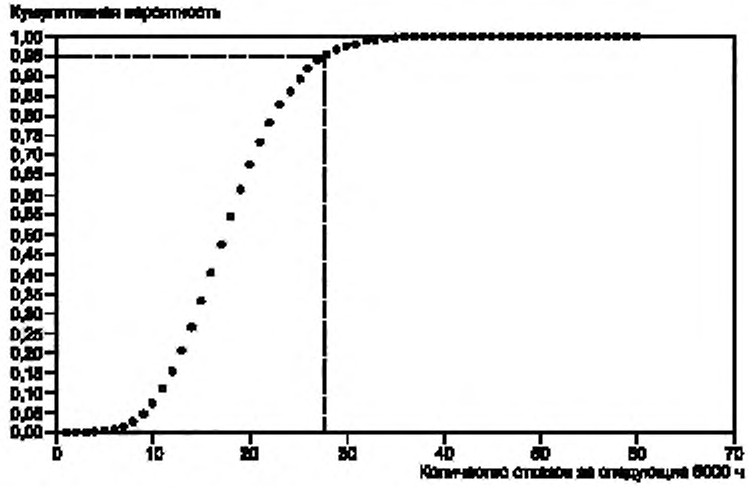


Рисунок С.5 — График кумулятивной функции апостериорного распределения вероятностей количества отказов *M*

С.4 Резюме

Цель данного приложения и представленной в нем информации — логическое обоснование применения байесовского подхода к получению оценок для параметра степенной модели. Байесовский подход позволяет аналитику использовать при разработке модели предварительную информацию в комбинации с данными, полученными в процессе испытаний. Тогда как при классическом подходе, как показано в основной части настоящего стандарта, используют только данные о наработках до отказа, полученные в ходе испытаний.

Примеры, представленные в данном приложении, указывают на необходимость понимания процесса байесовского анализа. К процессу байесовского анализа следует привлекать аналитика, хорошо разбирающегося в нем, так как построение моделей в этом случае имеет более сложный характер, чем при классическом анализе.

Байесовские методы могут быть очень мощными и поэтому требуют большей осторожности при использовании. В частности, соответствующая информация, используемая для выбора априорного распределения, должна быть полностью обоснованной и доступной для исследования, что поддерживает целостность анализа данных.

Приложение ДА
(справочное)

Сведения о соответствии ссылочного национального стандарта международному стандарту, использованному в качестве ссылочного в примененном международном стандарте

Таблица ДА.1

Обозначение ссылочного национального стандарта	Степень соответствия	Обозначение и наименование соответствующего международного стандарта
ГОСТ Р 50779.10—2000 (ИСО 3534-1:93)	IDT	ISO 3534-1:2006 «Статистика. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей»
Примечание — В настоящей таблице использовано следующее условное обозначение степени соответствия стандарта: - IDT — идентичный стандарт.		

Библиография

[1] CROW, L.H., 1974, Reliability Analysis for Complex Repairable Systems. Reliability and Biometry, ed. F. Proschan and R.J Serfling, pp. 379—410, Philadelphia, PA:SIAM
[2] RIGDON, S.E. and BASU, A.P., 2000 Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems. John Wiley
[3] BEISER J.A. and RIGDON, S.E., 1997 Bayes Prediction for the Number of Failures of a Repairable System. IEEE Transactions on Reliability, Vol 46, No. 2, pp 291—295

УДК 658.562.012.7:65.012.122:006.354 ОКС 03.120.30

Ключевые слова: степенная модель, критерий согласия, точечная оценка, доверительный интервал, параметр потока отказов, предикционный интервал, восстанавливаемый объект, испытания с ограниченной продолжительностью, испытания с ограниченным количеством отказов

Редактор переиздания *Е.В. Яковлева*
Технический редактор *В.Н. Прусакова*
Корректор *И.А. Королева*
Компьютерная верстка *Е.О. Асташина*

Сдано в набор 18.08.2020. Подписано в печать 21.09.2020. Формат 60×84 1/8. Гарнитура Ариал.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,21
Подготовлено на основе электронной версии, предоставленной разработчиком стандарта

Создано в единичном исполнении во ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ» для комплектования Федерального информационного фонда стандартов, 117418 Москва, Нахимовский пр-т, д. 31, к. 2.
www.gostinfo.ru info@gostinfo.ru

gost.e-ecolog.ru