ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р 57700.14— 2018

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Верификация получаемых сеточными методами численных решений задач механики сплошной среды

Издание официальное

Москва
Стандартинформ
2018

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

1 РАЗРАБОТАН Закрытым акционерным обществом «Т-Сервисы» (ЗАО «Т-Сервисы»)

2 ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 700 «Математическое моделирование и высокопроизводительные вычислительные технологии»

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 6 февраля 2018 г. № 54-ст

4 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

*Правила применения настоящего стандарта установлены в статье 26 Федерального закона от 29 июня 2015 г. № 162-ФЗ «О стандартизации в Российской Федерации». Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодном (по состоянию на 1 января текущего года) информационном указателе «Национальные стандарты», а официальный текст изменений и поправок — в ежемесячном информационном указателе «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ежемесячном информационном указателе «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет (*gost.e-ecolog.ru

© Стандартинформ, 2018

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

Содержание

1 Область применения 1
2 Нормативные ссылки 1
3 Термины и определения 2
4 Требования по верификации получаемых сеточными методами численных решений задач механики сплошной среды 4
5 Требования к структуре и содержанию отчета по верификации численных решений задач механики сплошной среды, получаемых сеточными методами 5
Библиография 7

Введение

По мере развития вычислительной техники и расчетных методов расширяется применение численного моделирования в различных областях науки и техники для решения возникающих задач. В этой связи появляется необходимость в выработке общих подходов к оценке качества (достоверности) результатов, получаемых в ходе численного моделирования. Для решения задач механики сплошной среды наибольшее распространение получили сеточные методы — методы решения дифференциальных/интегральных уравнений, основанные на замене непрерывной области определения аргументов уравнений (расчетной области) дискретным множеством точек, сеткой. Настоящий стандарт устанавливает общие требования к верификации (подтверждению достоверности) численных решений задач механики сплошной среды, получаемых сеточными методами. Целью настоящего стандарта является обеспечение достоверности получаемых на практике решений задач механики сплошной среды сеточными методами.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Верификация получаемых сеточными методами численных решений задач механики сплошной среды

Numerical modeling of physical processes.
Verification of numerical solutions of continuum mechanics problems obtained by grid-based methods

Дата введения — 2019—01—01

1 Область применения

Настоящий стандарт устанавливает общие требования к верификации численных решений задач механики сплошной среды, получаемых сеточными методами, в области компьютерного моделирования. Под верификацией понимается практическое подтверждение достоверности численных решений (близости численных и точных решений задач). Изначально предполагается, что для получения численного решения задачи привлекается верифицированное и валидированное программное обеспечение, реализующее на основе сеточных методов компьютерное (численное) моделирование физических процессов механики сплошной среды.

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использованы нормативные ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ Р 57188 Численное моделирование физических процессов. Термины и определения

ГОСТ Р 57700.1—2017 Численное моделирование для разработки и сдачи в эксплуатацию высокотехнологичных промышленных изделий. Сертификация программного обеспечения. Требования

ГОСТ Р 57700.2—2017 Численное моделирование для разработки и сдачи в эксплуатацию высокотехнологичных промышленных изделий. Сертификация программного обеспечения. Общие положения

Примечание — При пользовании настоящим стандартом целесообразно проверить действие ссылочных стандартов в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет или по ежегодному информационному указателю «Национальные стандарты», который опубликован по состоянию на 1 января текущего года, и по выпускам ежемесячного информационного указателя «Национальные стандарты» за текущий год. Если заменен ссылочный стандарт, на который дана недатированная ссылка, то рекомендуется использовать действующую версию этого стандарта с учетом всех внесенных в данную версию изменений. Если заменен ссылочный стандарт, на который дана датированная ссылка, то рекомендуется использовать версию этого стандарта с указанным выше годом утверждения (принятия). Если после утверждения настоящего стандарта в ссылочный стандарт, на который дана датированная ссылка, внесено изменение, затрагивающее положение, на которое дана ссылка, то это положение рекомендуется применять без учета данного изменения. Если ссылочный стандарт отменен без замены, то положение, в котором дана ссылка на него, рекомендуется применять в части, не затрагивающей эту ссылку.

Издание официальное

3 Термины и определения

В настоящем стандарте применены термины по ГОСТ Р 57188, а также следующие термины с соответствующими определениями:

3.1 **сплошная среда:** Непрерывное (континуальное) представление действительных материальных сред, состоящих из веществ в различном агрегатном состоянии (жидкость, газ, плазма, твердое тело). Сплошная среда является моделью действительных сред.

3.2 **уравнения механики сплошной среды:** Уравнения, описывающие состояние и/или движение сплошной среды.

Примечание — Состояние и движение сплошной среды характеризуется определенным набором параметров, называемых параметрами состояния и движения сплошной среды.

3.3 **область моделирования** (*расчетная область*): Прообраз области действительного физического пространства, в котором вводится определенная система координат для описания точек области набором вещественных чисел, называемых координатами точек пространства. Предполагается, что область моделирования или часть ее подобластей заполнены сплошной средой, описываемой определенной замкнутой системой уравнений.

Примечание — Размерность пространства области моделирования определяется количеством чисел в координатном наборе. Возможны случаи одно-, двух- и трехмерных пространств. В области и на ее границах определяются или задаются функции, аргументами которых являются координаты (иногда определяемые как независимые переменные). Параметры, характеризующие состояние и движение сплошной среды, являются примерами таких функций. Область или ее подобласти могут быть подвижными — положение и размеры в пространстве меняются с течением времени. Иногда в качестве области моделирования рассматривают пространственно-временную область с еще одной дополнительной координатой — координатой времени.

3.4 **постановка** (*формулировка*) **задачи механики сплошной среды:** Создание математической модели, воспроизводящей явление, объект или свойства объекта действительного мира на основе модели сплошной среды. Постановка задачи включает в себя описание области/областей моделирования, замкнутую систему уравнений, начальные и граничные условия. Формулировка целей решения задачи также является обязательным элементом постановки задачи.

3.5 **численное решение задачи:** Численное решение системы уравнений, сформулированных при постановке задачи.

3.6 **расчетная** (*вычислительная*) **сетка:** Конечное дискретное множество соединенных между собой точек пространства, заменяющее собой область непрерывного изменения аргументов [1]—[10] для параметров сплошной среды (дискретизация области моделирования). Точки множества называются узлами сетки.

Примечание — Введение сетки в области моделирования можно также рассматривать как разбиение этой области на множество элементарных подобластей с конечным объемом. В различных методах элементарные подобласти имеют различные наименования (ячейка, контрольный объем, конечный элемент, граничный элемент и др. [10]). Следует принять для них обобщающий термин — «сеточный элемент пространства».

3.7 **сеточная функция:** Функция дискретного аргумента, определенная в узлах расчетной сетки.

3.8 **шаги сетки в точке моделируемой области:** Величины расстояний между соединенными узлами сеточного элемента пространства, содержащего точку моделируемой области.

Примечание — Для равномерной по пространству сетки шаги сетки представляют собой одинаковый по количеству и значениям набор величин для любой точки моделируемой области.

3.9 **уменьшение шагов сетки в области моделирования:** Перестроение сетки (переход к другому множеству точек пространства), при котором для любой точки моделируемой области объем сеточного элемента пространства, содержащего эту точку, не возрастает, и существует подобласть моделируемой области, для точек которой объемы сеточных элементов пространства уменьшаются.

Примечание — Уменьшение шагов сетки означает сгущение узлов сетки во всей области моделирования или только в отдельных ее подобластях. Стремление шагов сетки к нулю в моделируемой области означает одновременное стремление шагов сетки к нулю во всей моделируемой области.

3.10 **сеточные методы:** Численные методы решения дифференциальных/интегральных уравнений, основанные на замене исходных уравнений уравнениями от дискретного аргумента при помощи аппроксимации уравнений или искомых функций на сетке.

Примечание — Основной идеей численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. В сеточных методах это достигается дискретизацией исходной задачи, то есть переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента [1]—[10]. Таким образом, исходную задачу заменяют другой задачей, аппроксимирующей исходную и определенной в узлах сетки области пространства. При численном решении аппроксимирующей задачи всегда получается не точное решение исходной задачи, а некоторое приближенное решение. Главная составляющая погрешности решения обусловлена погрешностью дискретизации (погрешность метода) [2]. Точность сеточного метода зависит от шагов сетки (и от шага по времени для нестационарных задач), уменьшая которые, можно при наличии сходимости получить решение с некоторой точностью. В механике сплошной среды среди сеточных методов широкое распространение получили конечно-разностные методы [1]—[5], методы контрольного объема [6], методы конечных элементов [7], [8], методы граничных элементов [9], [10], панельные методы [10].

3.11 **дискретизация исходной задачи:** Переход от задачи с функциями от непрерывного аргумента к задаче с функциями от дискретного аргумента.

3.12 **дискретная задача:** Задача, полученная дискретизацией исходной задачи.

3.13 **численное решение на сетке:** Численное решение дискретной задачи на данной сетке.

Примечание — Точное решение на сетке для дискретной задачи является приближенным решением для исходной задачи. Погрешность решения зависит от шага сетки, способа и порядка аппроксимации уравнений, граничных и начальных (для нестационарной задачи) условий.

3.14 **стационарная/нестационарная задача:** Задача моделирования явлений и процессов, не зависящих/зависящих от времени.

Примечание — В постановке нестационарной задачи присутствует задание движения или изменения в размерах области моделирования с течением времени и/или граничных условий, зависящих от времени, и/или специально заданных начальных условий, приводящих к нестационарным явлениям. В постановке нестационарной задачи содержится хотя бы один параметр, зависящий от времени.

3.15 **стационарное/нестационарное решение:** Решение задачи, не зависящее/зависящее от времени.

Примечание — Возможны случаи получения несходящегося решения для стационарной задачи, вследствие ошибочного предположения стационарности моделируемого явления/процесса, то есть некорректной постановки задачи, являющейся в действительности нестационарной.

3.16 **сходимость численного решения по шагу сетки:** Сходимость (стремление) по некоторой норме численного решения дискретной задачи к точному или приближенному решению исходной задачи при уменьшении шагов сетки.

Примечание — При численном решении задачи мы всегда получаем не точное решение, а некоторое приближенное решение. Возникающая погрешность обусловлена тремя главными причинами [2]: неустранимой погрешностью входных данных, погрешностью дискретизации и ошибками округления. Неустранимая погрешность связана с неточным заданием входных данных (граничные и начальные условия, коэффициенты и правые части уравнений). Погрешность дискретизации возникает при замене исходной задачи дискретной (см. 3.10). Ошибки округления связаны с конечной разрядностью представления чисел в электронно-вычислительной машине. Погрешность дискретизации зависит от шагов сетки, и при стремлении шагов сетки к нулю величина погрешности также стремится к нулю (в пределах точности ошибок округления). Тогда, временно не учитывая ограничения, связанные с ошибками округления, принимая предположение о незначительности неустранимой погрешности или ее отсутствии и основываясь на теории вычислительной математики, можно считать, что численное решение, получаемое расчетной схемой, обладающей аппроксимацией и устойчивостью, при стремлении шагов сетки к нулю будет стремиться к точному решению исходной задачи. Здесь важно знать, что расчетная схема дает принципиальную возможность получить решение задачи с любой точностью. А при тех же условиях, но с учетом ограничений ошибок округления степень близости численного решения дискретной задачи и точного решения исходной задачи будет определяться ошибками округления. На практике мы всегда получаем приближенное решение по перечисленным выше причинам. Кроме того, это решение может сходиться необязательно к точному решению. Последнее обусловлено ограничениями, связанными с вычислительными ресурсами и ошибками округления. Необходимым условием для получения сходимости численного решения к точному решению является стремление шагов сетки к нулю. В большинстве практических задач при стремлении шагов сетки во всей моделируемой области даже до пределов, определяемых требуемой точностью решения задачи, размер сетки достигает таких величин, что требуемые для решения задачи вычислительные ресурсы становятся недопустимо большими. В основном по этой причине в расчетах используют сетки либо с неравномерным распределением узлов, либо применяют систему вложенных сеток. При этом возможны случаи использования сеток с недостаточным сгущением узлов в подобластях с градиентами рассчитываемых параметров. При любом сгущении узлов сеток в других подобластях появляются

неубывающие составляющие погрешности решения, обусловленные погрешностью дискретизации и неустранимой погрешностью входных данных в подобласти с недостаточным сгущением узлов сетки. В этом случае численное решение при его сходимости будет стремиться к некоторому, отличному от точного решению. В той или иной мере при решении практических задач это всегда присутствует. Требования настоящего стандарта направлены на ограничение сеточной зависимости решения задачи рамками допустимой погрешности и получение требуемой точности решения исходной задачи.

3.17 **моделируемый** (*расчетный*) **интервал времени:** Интервал времени, в пределах которого определяется решение нестационарной задачи.

3.18 **временной слой:** Некоторый момент времени из моделируемого интервала времени, фиксирующий положение области моделирования и значения всех функций и параметров, определенных в этой области.

3.19 **шаг по времени** (*шаг интегрирования*): Интервал времени, используемый в численных методах для определения решения задачи на последующем временном слое при условии, что решение задачи (или начальных условий) на текущем временном слое известно.

Примечание — Численное решение нестационарной задачи определяется в дискретные моменты времени, и погрешность решения зависит от величины шага по времени, способа и порядка аппроксимации начальных данных и производных по времени в уравнениях.

3.20 **сходимость численного решения по шагам сетки и времени:** Сходимость (стремление) по некоторой норме численного решения дискретной задачи на любом временном слое из моделируемого интервала времени к точному или приближенному решению исходной нестационарной задачи при уменьшении шагов сетки и по времени.

Примечание — Все сказанное в примечании к 3.16 остается в силе. Дополнительно следует отметить, что величина шага по времени должна быть согласована с шагами сетки во избежание потери требуемой точности решения.

3.21 **допустимая погрешность решения задачи:** Величина погрешности решения уравнений, являющаяся удовлетворительной для преследуемых целей задачи. Величина допустимой погрешности определяется требуемой точностью решения задачи.

3.22 **параметры контроля сходимости решения задачи:** Специально выбранные для контроля сходимости решения параметры, зависящие от решения задачи.

Примечание — В подавляющем большинстве случаев точное решение задачи является неизвестным, и непосредственная оценка сходимости решения задачи затруднительна. Обычно о сходимости решения судят по поведению параметров, контролирующих сходимость решения. На практике в качестве параметров контроля могут приниматься разнообразные локальные и интегральные параметры, связанные с расходными и энергетическими характеристиками моделирования, характеристиками силового воздействия на объекты в исследуемых областях, экстремальными (минимум, максимум) значениями параметров сплошной среды или их комбинациями.

3.23 **критерий сходимости решения задачи:** Условие, выполнение которого свидетельствует о сходимости. Численное решение исходной задачи считается сошедшимся по шагу сетки (и по временному шагу — для нестационарной задачи), если параметры контроля сходимости решения при любом дальнейшем уменьшении шага сетки (и шага по времени) остаются в пределах интервала заданной допустимой погрешности.

Примечание — На практике о сходимости решения судят по уменьшению разности параметров контроля сходимости решения на текущем и предыдущем шагах по сетке (и по времени — для нестационарных задач). Если текущая разность или прогнозируемая каким-то образом (например, экстраполяцией по Ричардсону) аналогичная разность для следующего шага заведомо попадают в интервал допустимой погрешности, то решение считают сошедшимся.

4 Требования по верификации получаемых сеточными методами численных решений задач механики сплошной среды

4.1 Настоящий стандарт устанавливает ряд требований по верификации (подтверждению достоверности) получаемых сеточными методами численных решений задач механики сплошной среды. Стандарты верификации по некоторым аспектам численных решений для стационарных и нестационарных задач приводятся отдельно ввиду их отличия.

4.2 Общие требования по верификации численных решений задач механики сплошной среды

4.2.1 Постановка задачи должна соответствовать физике моделируемого процесса или явления. Граничные условия должны задаваться величинами из допустимой области значений. Начальные условия в случае нестационарной задачи должны задаваться с точностью, соответствующей точности аппроксимации уравнений задачи.

4.2.2 Во избежание ошибок моделирования решение задачи должно быть получено с применением верифицированного и валидированного программного обеспечения численного моделирования по ГОСТ Р 57700.1—2017 (пункты 3.1.3, 3.1.4), ГОСТ Р 57700.2—2017 (пункты 3.1.3, 3.1.4), созданного на основе сеточного метода.

4.2.3 Путем проведения сравнительных численных исследований или ссылкой на предыдущий опыт решения подобных задач должно быть обосновано положение об исключении искажения решения граничными условиями. Не отвечающее физике моделируемого процесса или явления искажение решения задачи может появиться вследствие ошибочной постановки граничных условий и/или несоответствия размеров области моделирования виду граничных условий.

4.2.4 Сходимость численного решения задачи должна быть определена по нескольким параметрам контроля сходимости решения, однозначно трактуемым и в целом адекватно отражающим решение задачи.

4.2.5 Предварительно должна быть определена требуемая точность решения задачи и на этой основе оценена допустимая погрешность решения задачи, используемая в дальнейшем для контроля сходимости решения по выбранным параметрам.

4.2.6 В процессе получения решения должна быть использована последовательность сеток, состоящая не менее чем из трех сеток с уменьшающимися шагами. При этом с уменьшением шага сетки должно быть обеспечено сгущение узлов сетки в подобластях с наибольшими градиентами параметров сплошной среды.

4.2.7 За решение задачи принимают численное решение, соответствующее сетке с наименьшим шагом и удовлетворяющее критерию сходимости численного решения задачи. Обоснование сходимости решения по шагам сетки обязательно.

4.2.8 При решении серии однородных задач с одной и той же постановкой, но различиями в некоторых величинах параметров задачи (серийные расчеты) достаточно выполнить исследование сходимости решения для одной из серии задач. Для всех остальных задач из серии следует использовать сетки, схожие с полученной при исследовании сходимости решения и обеспечивающие требуемую точность решения.

4.2.9 Для нестационарных задач в процессе получения решения на моделируемом интервале времени должна быть использована последовательность сеток и шагов по времени, состоящая не менее чем из трех сеток с уменьшающимися шагами, с соответствующим набором уменьшающихся от сетки к сетке шагов по времени. При этом с уменьшением шага сетки должно быть обеспечено сгущение узлов сетки в подобластях с наибольшими градиентами параметров сплошной среды. Этому же требованию должны соответствовать решения задач для подвижных областей моделирования или их отдельных подобластей.

4.2.10 За решение нестационарной задачи принимают численное решение задачи на временных слоях в пределах интервала моделирования, соответствующее сетке с наименьшим шагом и набору наименьших шагов по времени, удовлетворяющее критерию сходимости численного решения задачи на любом из временных слоев. Обоснование сходимости решения по шагам сетки и времени является обязательным.

4.2.11 При решении серии однородных нестационарных задач с одной и той же постановкой, но различиями в некоторых величинах параметров задачи (серийные расчеты) достаточно выполнить исследование сходимости решения для одной из серии задач. Во всех остальных задачах серии следует использовать сетки и наборы временных шагов, схожие с полученной при исследовании сходимости решения сеткой и набором временных шагов, которые обеспечивают требуемую точность решения.

5 Требования к структуре и содержанию отчета по верификации численных решений задач механики сплошной среды, получаемых сеточными методами

5.1 Отчет по верификации численного решения задачи является основным документом, обосновывающим точность полученного решения. Предварительная верификация и валидация примененного программного обеспечения численного моделирования являются гарантией достоверности полученных

результатов для сошедшихся по шагу сетки (и времени) решений задачи. Допускается включение отчета по верификации в любой другой отчет, связанный с численным решением задачи, в качестве раздела или подраздела отчета.

5.2 Отчет по верификации численного решения задачи должен содержать следующие разделы:

- Введение;
- Постановка задачи;
- Область моделирования, граничные и начальные условия;
- Программное обеспечение решения задачи;
- Результаты верификации численного решения задачи;
- Заключение.

5.3 В разделе «Введение» должны быть кратко просуммированы итоги работы по верификации численного решения задачи (описанные в нижеследующих пунктах).

5.4 Раздел «Постановка задачи» должен содержать точную математическую постановку задачи: описание области/областей моделирования, замкнутую систему уравнений (дифференциальные/интегральные уравнения, дополнительные соотношения, принятые допущения), начальные и граничные условия. Формулировка целей решения задачи завершает описание постановки задачи.

5.5 В разделе «Область моделирования, граничные и начальные условия» должно быть приведено описание области моделирования (графически или схематично представлена геометрия расчетной области, выделены особенности области), выписаны граничные и начальные условия, показана расстановка граничных условий, приведен порядок аппроксимации начальных и граничных условий при их численной реализации.

5.6 В разделе «Программное обеспечение решения задачи» должна быть указана версия программного обеспечения численного моделирования, кратко приведены основные характеристики программного продукта: тип используемых сеток, порядок аппроксимации уравнений и метод их решения, явная/неявная схема решения, консервативность схемы, распараллеливание вычислений и другие особенности.

5.7 В разделе «Результаты верификации численного решения задачи» должны быть представлены результаты исследования, показывающего отсутствие искажения решения граничными условиями (или приведено обоснование этого положения), приведен список параметров контроля сходимости решения, указаны допустимые погрешности для вычисления всех или части этих параметров, графически показаны и таблично приведены их значения при исследовании сходимости численного решения, продемонстрирован фрагмент конечной расчетной сетки и на этом же фрагменте показано поле важной динамично меняющейся переменной, полученной в результате решения задачи, и на основе вышесказанного приведено обоснование сходимости численного решения задачи.

5.8 Раздел «Заключение» должен содержать общее заключение по верификации численного решения задачи, включающее: особенности задачи и численного решения задачи (при наличии), точность вычисления параметров контроля сходимости решения, размер итоговой (конечной) сетки, данные о компьютере и время, затраченное на решение одного варианта задачи с использованием этого компьютера. В случае использования алгоритмов распараллеливания вычислений необходимо указать параметры распараллеливания (количество процессоров с количеством использованных ядер на процессоре), характеристики процессоров, а также привести оценку эффективности распараллеливания (сокращение временных затрат) для решения данной задачи и оптимального количества вычислительных ресурсов (если такая оценка возможна) по ГОСТ Р 57700.1—2017 (пункты 4.5, 4.7).

Библиография

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.
[2] Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
[3] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
[4] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.
[5] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.
[6] Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоиздат, 1984.
[7] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
[8] Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976.
[9] Купрадзе В.Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
[10] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2. — М.:Мир, 1991.

УДК 519.642.2:006.354 ОКС 35.020

Ключевые слова: моделирование, численное моделирование, физические процессы, верификация, сеточные методы, сплошная среда

БЗ 1—2018/51

Редактор *Л.И. Нахимова*
Технический редактор *В.Н. Прусакова*
Корректор *Е.Р. Ароян*
Компьютерная верстка *Ю.В. Половой*

Сдано в набор 07.02.2018. Подписано в печать 13.03.2018. Формат 60 × 84 1/8. Гарнитура Ариал.
Усл. печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,24. Тираж 22 экз. Зак. 419.

Подготовлено на основе электронной версии, предоставленной разработчиком стандарта

ИД «Юриспруденция», 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, 11
gost.e-ecolog.ru gost.e-ecolog.ru

Издано и отпечатано во ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 123001, Москва, Гранатный пер., 4.
gost.e-ecolog.ru gost.e-ecolog.ru

gost.e-ecolog.ru