ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р ИСО 7870-9— 2023

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Часть 9

Контрольные карты для стационарных процессов

(ISO 7870-9:2020, Control charts — Part 9: Control charts for stationary processes, IDT)

Издание официальное

Москва
Российский институт стандартизации
2023

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

1 ПОДГОТОВЛЕН Закрытым акционерным обществом «Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем» (ЗАО «НИЦ КД») на основе собственного перевода на русский язык англоязычной версии стандарта, указанного в пункте 4

2 ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 125 «Применение статистических методов»

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 27 сентября 2023 г. № 967-ст

4 Настоящий стандарт идентичен международному стандарту ИСО 7870-9:2020 «Контрольные карты. Часть 9. Контрольные карты для стационарных процессов» (ISO 7870-9:2020 «Control charts — Part 9: Control charts for stationary processes», IDT).

Международный стандарт разработан Техническим комитетом ТК 69 Международной организации по стандартизации (ИСО).

Наименование настоящего стандарта изменено относительно наименования указанного международного стандарта для приведения в соответствие с ГОСТ Р 1.5—2012 (пункт 3.5).

При применении настоящего стандарта рекомендуется использовать вместо ссылочных международных стандартов соответствующие им национальные стандарты, сведения о которых приведены в дополнительном приложении ДА

5 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

*Правила применения настоящего стандарта установлены в статье 26 Федерального закона от 29 июня 2015 г. № 162-ФЗ «О стандартизации в Российской Федерации». Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодном (по состоянию на 1 января текущего года) информационном указателе «Национальные стандарты», а официальный текст изменений и поправок — в ежемесячном информационном указателе «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ближайшем выпуске ежемесячного информационного указателя «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет (*gost.e-ecolog.ru

© ISO, 2020
© Оформление. ФГБУ «Институт стандартизации», 2023

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

Содержание

1 Область применения 1
2 Нормативные ссылки 1
3 Термины, определения, обозначения и сокращения 1
4 Контрольные карты автокоррелированных процессов для мониторинга среднего процесса 3
5 Мониторинг изменчивости стационарных процессов 8
6 Другие подходы при работе с автокоррелированными процессами 10
Приложение А (справочное) Случайный процесс и временные ряды 12
Приложение В (справочное) Формирование традиционных контрольных карт для автокоррелированных данных 14
Приложение ДА (справочное) Сведения о соответствии ссылочных международных стандартов национальным стандартам 18
Библиография 19

Введение

Методы статистического управления процессами (SPC) широко используют в промышленности для мониторинга процессов и повышения качества продукции. Для мониторинга среднего и изменчивости процесса разработаны различные статистические контрольные карты. Традиционная методология SPC основана на фундаментальном предположении, что данные процесса статистически независимы. Однако это предположение не всегда выполняется. В отраслях непрерывного производства, таких как химическое производство, большая часть данных о характеристиках качества коррелированы во времени или автокоррелированы. В общем случае автокорреляция может быть вызвана особенностями системы измерений, динамики процесса или и тем, и другим. Во многих случаях данные могут демонстрировать дрейф процесса. В биологии случайные биологические изменения, например случайный всплеск секреции какого-либо вещества, влияющего на кровяное давление, могут иметь устойчивый эффект, то есть на несколько последовательных измерений влияет одно и то же случайное явление. При сборе данных, когда интервал отбора выборки невелик, автокорреляция, особенно положительная автокорреляция данных, требует изучения. В таких условиях традиционные процедуры SPC не подходят для мониторинга, контроля и улучшения качества процесса.

Автокоррелированные процессы можно разделить на два вида: стационарные и нестационарные.

1) Стационарный процесс — прямое продолжение независимой и одинаково распределенной последовательности. Автокоррелированный процесс является стационарным, если он находится в состоянии «статистическое равновесие». Это означает, что изменчивость процесса не меняется со временем. В частности, стационарный процесс всегда имеет идентичные средние и дисперсии.

2) Нестационарный процесс.

Подробная информация о случайном процессе и временных рядах приведена в приложении А.

Для учета автокоррелированных данных разработаны некоторые методологии SPC. В основном, существует два подхода. Первый подход заключается в использовании карт остатков процесса после подбора модели временных рядов или другой математической модели, соответствующей данным. Другой, более прямой подход состоит в изменении существующих карт, например путем корректировки контрольных границ на основе данных об автокорреляции процесса.

Целью настоящего стандарта является описание основных контрольных карт управления процессом для мониторинга среднего и дисперсии автокоррелированного процесса.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Часть 9

Контрольные карты для стационарных процессов

Statistical methods.
Control charts.
Part 9. Control charts for stationary processes

Дата введения — 2024—03—01

1 Область применения

Настоящий стандарт описывает построение и применение контрольных карт для стационарных процессов.

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использована нормативная ссылка на следующий стандарт [для датированной ссылки применяют только указанное издание ссылочного стандарта, для недатированной — последнее издание (включая все изменения)]:

ISO 3534-2, Statistics — Vocabulary and symbols — Part 2: Applied statistics (Статистика. Словарь и условные обозначения. Часть 2. Прикладная статистика)

3 Термины, определения, обозначения и сокращения

3.1 Термины и определения

В настоящем стандарте применены термины по ИСО 3534-2, а также следующие термины с соответствующими определениями.

ИСО и МЭК ведут терминологические базы данных для использования в области стандартизации по следующим адресам:

- платформа онлайн-просмотра ИСО: доступна по адресу gost.e-ecolog.ru ;
- Электропедия МЭК: доступна по адресу gost.e-ecolog.ru .

3.1.1 **автоковариация** (autocovariance): Внутренняя ковариация между элементами серии наблюдений, упорядоченных по времени.

3.1.2 **контрольная карта для автокоррелированного процесса** (control charts for autocorrelated processes): Контрольная карта статистического управления процессами, применяемая к автокоррелированному процессу.

Издание официальное

3.2 Обозначения и сокращения

3.2.1 Сокращения

В настоящем стандарте использованы следующие сокращения:

ARL — средняя длина серии;
i.i.d. — независимый и одинаково распределенный;
SPC — статистическое управление процессом;
ACF — функция автокорреляции;
AR(1) — процесс авторегрессии первого порядка;
EWMA — экспоненциально взвешенное скользящее среднее;
EWMAST — экспоненциально взвешенное скользящее среднее для стационарных процессов;
EWMS — экспоненциально взвешенное среднеквадратическое отклонение;
CUSUM — кумулятивная сумма.

3.2.2 Обозначения

В настоящем стандарте использованы следующие обозначения:

T — набор индексов для случайного процесса;
μ — истинное среднее процесса;
σ — истинное стандартное отклонение процесса;
$N(\mu, \sigma^2)$ — нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2;
γ — автоковариация;
$\hat{\gamma}$ — оценка автоковариации;
ρ — автокорреляция;
$\hat{\rho}$ — оценка автокорреляции;
ϕ — зависимый параметр процесса авторегрессии первого порядка;
λ — параметр сглаживания для EWMA;
r — параметр сглаживания для EWMS;
τ — интервал времени между двумя точками (лаг);
S_t^2 — EWMS в момент времени t;
S_0^2 — начальное значение S_t^2;
X_t — случайная переменная X в момент времени t;
a_t — случайная переменная a в момент времени t для процесса авторегрессии первого порядка;
Δ — изменение среднего шага, кратное среднеквадратичному отклонению процесса;
$\bar{x}$ — среднее арифметическое последовательности x;
s — стандартное отклонение последовательности x;
$\hat{X}_t$ — оценка прогнозирования X_t;
R_t — остаток в момент времени t;
$\bar{R}$ — среднее арифметическое R_t;
S_R — стандартное отклонение $\{R_t\}$;
Z_t — статистика EWMA в момент времени t;
Z_0 — начальное значение Z_t;
L_Z — значение контрольной границы для Z_t (выраженное в количестве стандартных отклонений Z_t);
σ_Z — стандартное отклонение статистики EWMA;
σ_a — стандартное отклонение случайных величин a_t белого шума в процессе авторегрессии первого порядка.

4 Контрольные карты автокоррелированных процессов для мониторинга среднего процесса

4.1 Общие положения

Многие специалисты в области статистики и статистического управления процессами обнаружили, что автокорреляция данных процесса оказывает влияние на работу традиционных карт SPC. Подобно автоковариации (см. 3.1.1), автокорреляция — это внутренняя корреляция между элементами серии наблюдений, упорядоченными по времени. Автокорреляция может быть вызвана особенностями системы измерений, динамики процесса или и тем, и другим. В приложении В показано влияние положительной автокорреляции на работу различных традиционных контрольных карт.

4.2 Карты остатков

Карты остатков используют для отслеживания возможных изменений среднего процесса. Для построения карты остатков по данным процесса необходимо применить временные ряды или другие методы математического моделирования.

Карта остатков требует моделирования данных процесса и получения остатков процесса [1]. Для набора данных временного ряда $\{x_t;\ t = 1, 2, \ldots, N\}$ создают временной ряд или устанавливают другую математическую модель, соответствующую данным. Остаток в момент времени t определяют следующим образом:

$$R_t = x_t - \hat{x}_t,$$

где $\hat{x}_t$ — прогноз временного ряда в момент времени t на основе модели временного ряда или другой математической модели.

Предполагают, что модель верна и остатки статистически не коррелируют друг с другом. Теперь к остаткам можно применить традиционные карты SPC, такие как *X*-карты, CUSUM-карты и EWMA-карты. В случае применения *X*-карты к остаткам ее, как правило, называют *X*-картой остатков. Как только обнаружено изменение среднего в процессе остатков, делают вывод о том, что среднее исходного процесса вышло из-под контроля.

Аналогичным образом используют карту остатков CUSUM и карту остатков EWMA [2], [3]. Для сравнения карт остатков с другими контрольными картами см. [4].

Преимущество карт остатков:

- карта остатков может быть применена к любым автокоррелированным данным, даже если они нестационарны. Обычно модель формируют с помощью временных рядов или программного обеспечения для подбора других моделей.

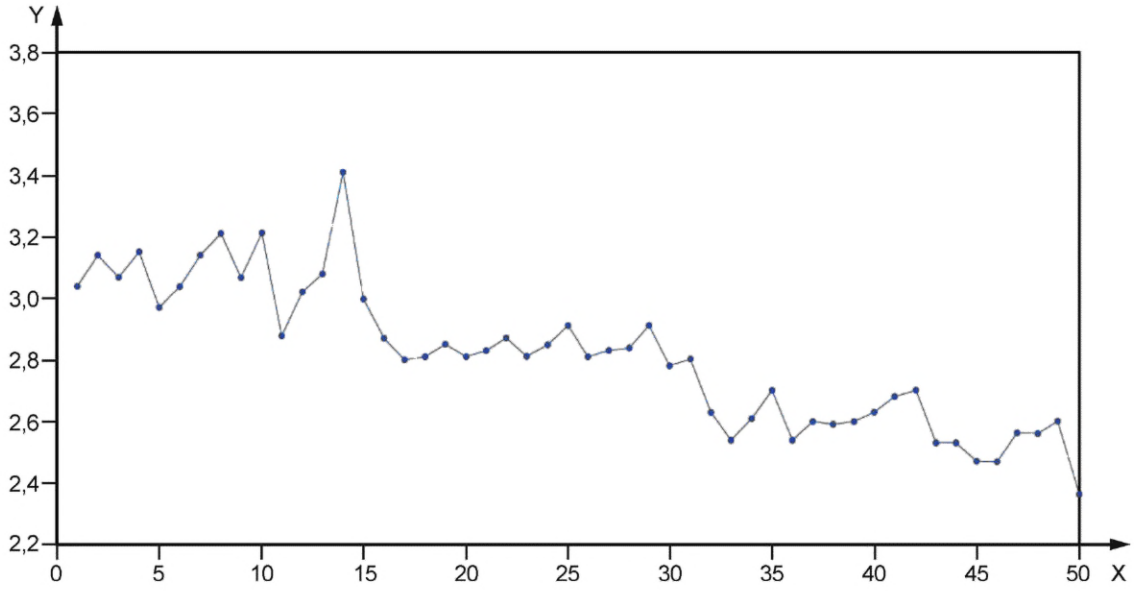
Недостатки карт остатков:

- карты остатков не обладают теми же свойствами, что и традиционные карты. *X*-карта остатков для процесса авторегрессии первого порядка (см. А.3.3) может иметь низкую способность обнаруживать смещение среднего. В [5] показано, что при положительной автокорреляции процесса *X*-карта остатков работает плохо. В [6] показано, что способность обнаружения у *X*-карты остатков иногда невелика по сравнению с обычной *X*-картой;
- карты остатков требуют применения временных рядов или других моделей. Пользователь карты остатков должен периодически контролировать достоверность модели, чтобы уменьшить общее влияние ошибки моделирования и изменения процесса.

В [7] приведен пример, в котором данные с объемом выборки 50 представляют собой ежедневные измерения вязкости охлаждающей жидкости в процессе холодной прокатки алюминия. На рисунке 1 показаны данные, имеющие тенденцию к снижению. Предположительно, что данные измерений не являются независимыми. На рисунке 2 показана выборочная функция автокорреляции для значений лага (сдвига по времени) от 0 до 12. Сведения о выборочной автокорреляции и функции автокорреляции приведены в А.4.2 и А.5, а также в [8]. Как показано в А.5, в предположении о независимости и одинаковом распределении данных из нормального распределения приблизительно 95 % выборочных автокорреляций с лагом больше единицы должны находиться между границами $\pm 1{,}96/\sqrt{50}$. Из этого следует,

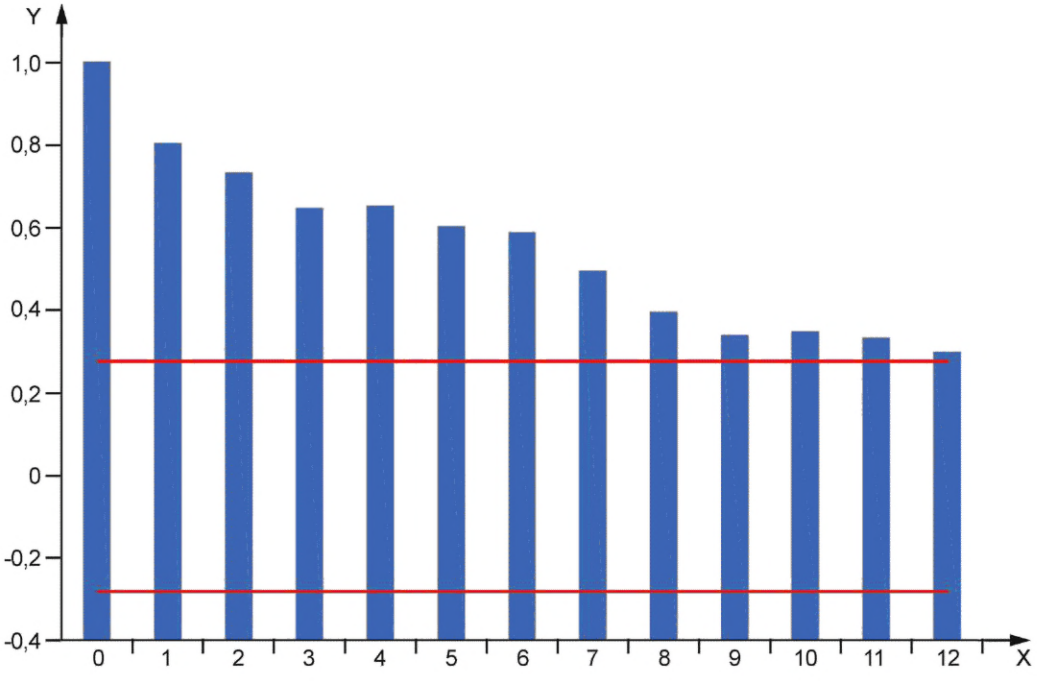
что данные не являются независимыми. В [7] приведена модель с прогнозируемой вязкостью в момент времени t в соответствии с моделью:

$$\hat{x}_t = a + bx_{t-1} + cx_{t-2} + dx_{t-3} + ex_{t-4},\ t = 1, \ldots, 50.$$



X — номер наблюдения; Y — вязкость

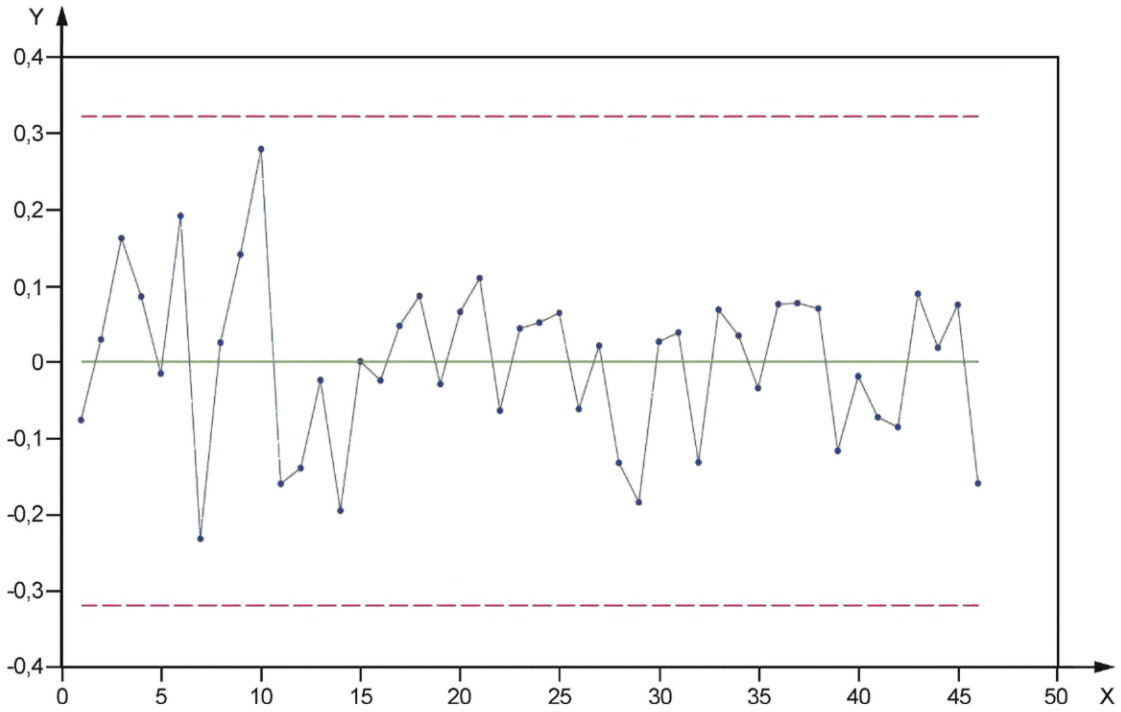
Рисунок 1 — Пример



X — лаг; Y — автокорреляция

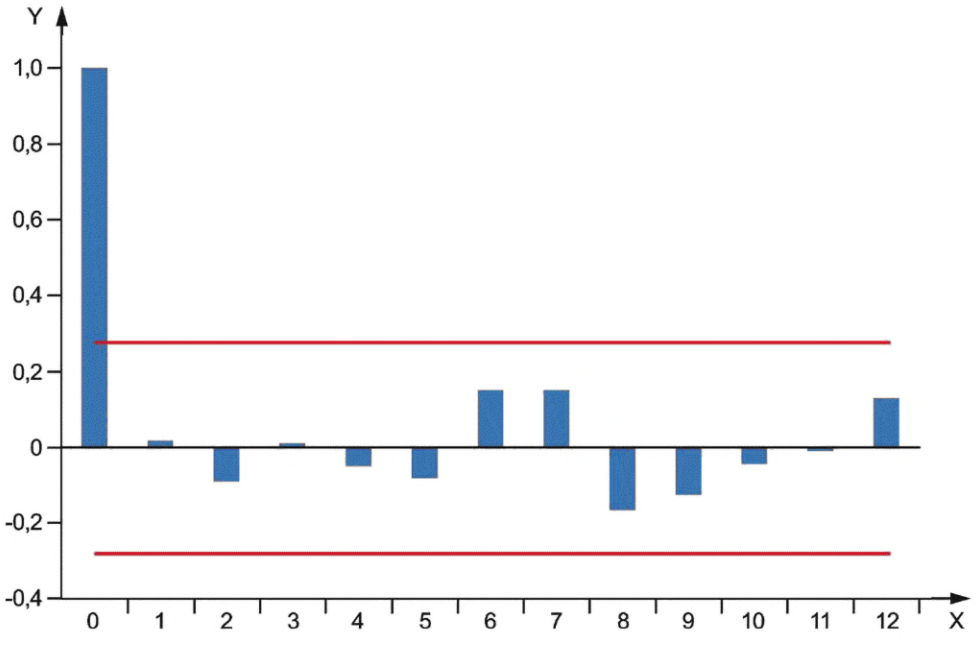
Рисунок 2 — Выборочные автокорреляции для серии ежедневных измерений вязкости и приближенный доверительный интервал с уровнем доверия 95 %

Для оценок *a*, *b*, *c* и *d*, приведенных в [7], остатки вычисляют по формуле $R_t = x_t - \hat{x}_t$, t = 1, ... , 46, они показаны на рисунке 3. Чтобы проверить, являются ли остатки независимыми, снова применяют ACF с доверительной полосой, показанной на рисунке 4. Поскольку определено, что остатки не являются автокоррелированными, к остаткам применяют *X*-карту с контрольными границами 3σ ($\bar{R} \pm 3S_R$, где $\bar{R}$ — среднее $\{R_t\}$, а S_R — стандартное отклонение $\{R_t\}$), как показано на рисунке 3. В результате можно сделать вывод о том, что среднее остатков, а также процесс находятся в стабильном состоянии.



X — время; Y — остаток

Рисунок 3 — Остатки по серии измерений вязкости и *X*-карта с контрольными границами 3σ



X — лаг; Y — автокорреляция

Рисунок 4 — Выборочная автокорреляция остатков серии измерений вязкости и приближенный доверительный интервал с уровнем доверия 95 %

4.3 Традиционные контрольные карты со скорректированными контрольными границами

4.3.1 Модифицированная EWMA-карта

По сравнению с картами остатков более прямой подход заключается в изменении существующих карт путем корректировки контрольных границ без моделирования временных рядов. Однако применение некоторых методов, основанных на этом подходе, ограничено из-за особенностей конкретных процессов, например процессами авторегрессии первого порядка [9]. В [10] предложено для мониторинга EWMA стационарного процесса использовать EWMAST-карту, которая в общем случае может быть применена к стационарному процессу. Карту формируют путем построения графика статистики EWMA [10]:

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t, \quad (1)$$

где $Z_0 = \mu$ — среднее процесса;

λ — параметр сглаживания ($0 < \lambda \leq 1$).

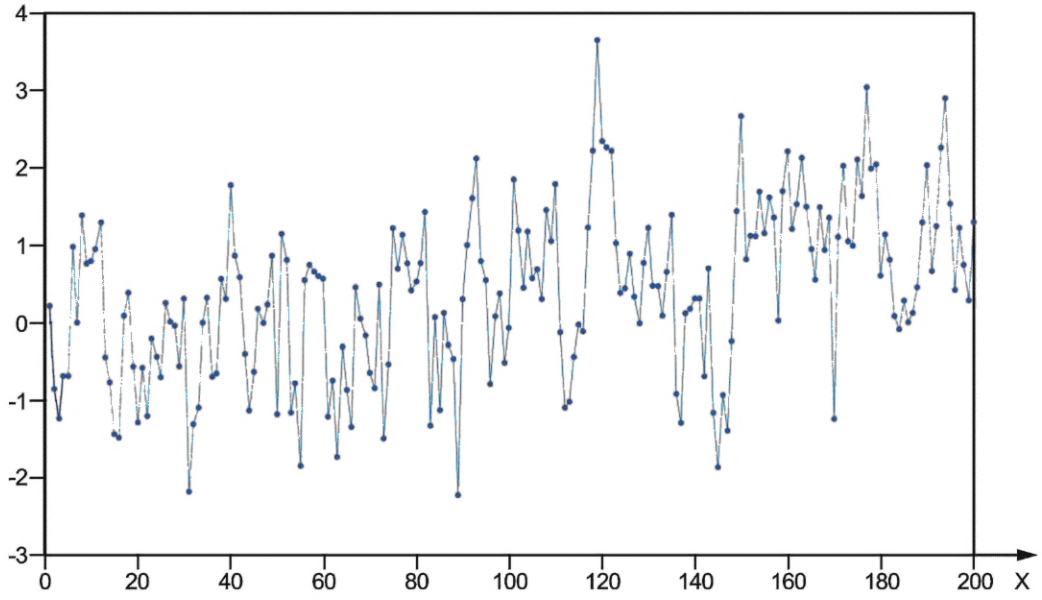
Предположим, что процесс $\{X_t;\ t = 1, 2, \ldots, N\}$ является стационарным со средним μ и дисперсией σ^2. Если t велико, дисперсию Z_t аппроксимируют следующим образом:

$$\sigma_Z^2 \approx \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\sigma^2\left[1 + 2\sum_{k=1}^{M}\rho(k)(1-\lambda)^k\left[1-(1-\lambda)^{2(M-k)}\right]\right], \quad (2)$$

где M — целое число, а $\rho(k)$ представляет собой автокорреляцию процесса с лагом k. Необходимо отметить, что у неавтокоррелированного процесса σ_Z^2 имеет ту же форму, что и в традиционной EWMA-карте. Если X_t подчиняется нормальному распределению, Z_t также подчиняется нормальному распределению со средним μ. EWMAST-карту формируют путем построения графика Z_t. Центральная линия находится на уровне μ, а контрольные границы $L_Z\ \sigma$ имеют вид $\mu \pm L_Z\,\sigma_Z$.

В общем случае рекомендуется использовать $\lambda = 0{,}2$ [10] и значение L_Z, как правило, равное двум или трем. Если μ, σ и автокорреляция неизвестны, их обычно оценивают по среднему арифметическому $\bar{x}$, выборочному стандартному отклонению s и выборочным автокорреляциям $\hat{\rho}(k)$ соответственно, на основе некоторых ранее полученных данных $\{X_t\}$, когда процесс находился в стабильном состоянии. Если для оценки автокорреляций использован набор предыдущих данных, можно следовать некоторым эмпирическим правилам. В [11] (стр. 32) указано, что полезные оценки $\rho(k)$ могут быть сделаны только в том случае, если объем данных N составляет примерно 50 или более, а $k \leq N/4$. Таким образом, значение M в формуле (2) должно быть достаточно большим для выполнения аппроксимации, пригодной для использования в формуле (2), и в то же время меньше $N/4$, чтобы избежать больших ошибок в оценке автокорреляций. На основе моделирования, когда $N \geq 100$, рекомендуется $M = 25$ [10].

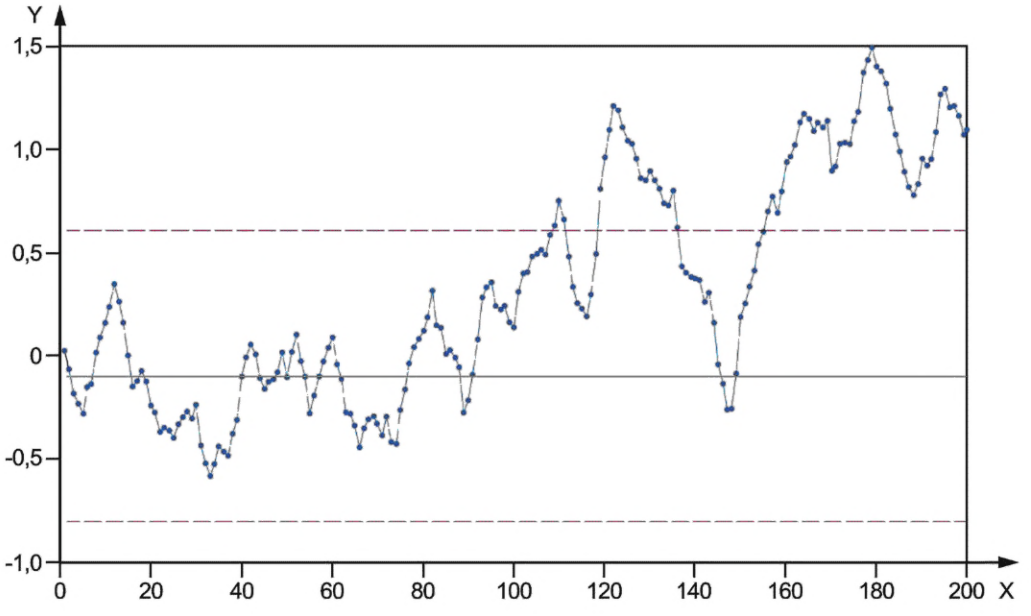
На рисунке 5 показан пример, в котором смоделированы данные процесса авторегрессии первого порядка с $\phi = 0{,}5$, дисперсией процесса $\sigma^2 = 1$ и длиной 200. Белый шум (см. А.3.2) подчиняется нормальному распределению. Среднее процесса равно нулю для первых 100 наблюдений. Начиная с номера наблюдения 101, среднее процесса изменяется с шагом от 0 до 1 или 1σ. График смоделированных данных показан на рисунке 5.



X — время

Рисунок 5 — Реализация процесса авторегрессии первого порядка, используемого для иллюстрации EWMAST-карты

Обрабатывая период первых 100 точек данных как стационарный, оценивают среднее процесса, стандартное отклонение процесса и выборочные автокорреляции. Получают значения $\bar{x}$ = –0,10, s = 0,91 и $\hat{\rho}(k)$, (k = 1,…,25). При M = 25 и λ = 0,2 в формуле (2) оценка стандартного отклонения Z_t составляет $\hat{\sigma}_Z$ = 0,24. На рисунке 6 показана EWMAST-карта с центральной линией на уровне $\bar{x}$ = –0,10 и контрольными границами $\bar{x} \pm 3\ \hat{\sigma}_Z = (-0{,}81;\ 0{,}60)$. Карта указывает на увеличение среднего, начиная с наблюдения № 110.



X — время; Y — EWMA

Рисунок 6 — EWMAST-карта применительно к моделируемым данным, показанным на рисунке 5, с увеличением среднего

4.3.2 Модифицированная CUSUM-карта

В [12] рассмотрено построение графиков необработанных данных непосредственно с помощью CUSUM-карты при низкой автокорреляции процесса. Если автокорреляция высока, следует рассмотреть возможность использования преобразованных наблюдений. В [9], [13] предложены другие подходы для применения модифицированных CUSUM-карт к процессам авторегрессии первого порядка и некоторые другие временные ряды.

4.4 Сопоставление карт для автокоррелированных данных

Возможно сопоставление некоторых контрольных карт для автокоррелированных данных. В [9] и [4] проведено сопоставление *X*-карты, *X*-карты остатков, CUSUM-карты остатков, EWMA-карты остатков и EWMAST-карты для стационарных процессов авторегрессии первого порядка с помощью моделирования. EWMAST-карта работает лучше, чем CUSUM-карта остатков и EWMA-карта остатков. В целом, она также работает лучше, чем *X*-карта и *X*-карта остатков. Сравнение также показывает, что CUSUM-карта остатков и EWMA-карта остатков работают почти одинаково. CUSUM-карта остатков и EWMA-карта остатков работают лучше, чем *X*-карта остатков, при низкой автокорреляции процесса. Напротив, когда автокорреляция высока, *X*-карта остатков работает лучше, чем другие карты остатков. Если автокорреляция процесса очень высокая, т. е. процесс близок к нестационарному, EWMAST-карта по-прежнему работает лучше, чем другие карты.

Очевидным преимуществом использования EWMAST-карт является то, что нет необходимости строить модель временных рядов для данных стационарного процесса. Формирование EWMAST-карты требует только оценки среднего, стандартного отклонения и автокорреляций процесса, полученных по данным, когда процесс находился в стабильном состоянии. Таким образом, если процесс является автокоррелированным и стационарным, для мониторинга среднего процесса рекомендуется использовать EWMAST-карту.

5 Мониторинг изменчивости стационарных процессов

В [14] рассмотрены две контрольные карты для мониторинга изменчивости процесса: одна основана на экспоненциально взвешенном среднеквадратичном отклонении от целевого значения [карта экспоненциально взвешенного среднеквадратичного отклонения (EWMS) или EWMS-карта], а другая основана на экспоненциально взвешенной скользящей дисперсии, в которой среднее значение процесса оценивают с использованием EWMA-карты наблюдений [карта экспоненциально взвешенной скользящей дисперсии (EWMV) или EWMV-карта].

Предположим, что $\{X_t, t = 1, 2, \ldots\}$ — процесс со средним μ и дисперсией σ^2 и нормальным распределением. Экспоненциально взвешенная скользящая среднеквадратическая ошибка имеет вид

$$S_t^2 = (1 - r)S_{t-1}^2 + r(X_t - \mu)^2,$$

где $t = 1, 2, \ldots$;

r — параметр сглаживания ($0 < r \leq 1$).

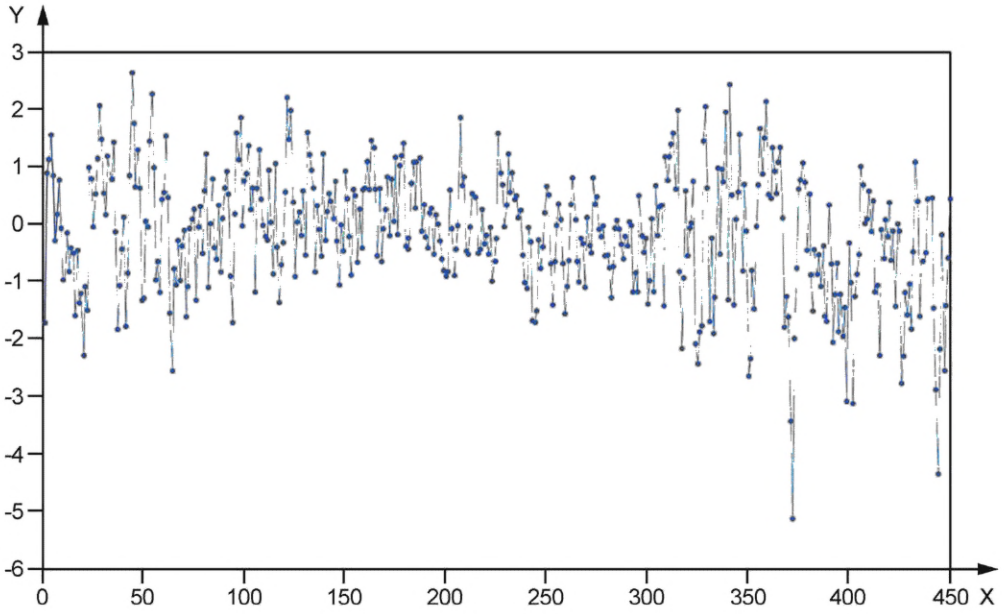
Пусть $S_0^2 = \sigma^2$ — дисперсия процесса. Из вышесказанного следует, что S_t^2 — оценка среднеквадратичной ошибки процесса в момент времени t. На EWMS-карте строят график S_t^2 с центральной линией $S_0^2 = \sigma^2$, а контрольные границы определяют на основе σ^2 и квантиля распределения Хи-квадрат со степенями свободы, которые являются функцией r для каждого значения t. В [14] предложено применить EWMS-карту к независимым одинаково распределенным данным последовательности и процесса, которые могут быть представлены как процесс авторегрессии первого порядка с белым шумом. В [15] предложено использовать карту остатков для мониторинга возможных изменений дисперсии для процесса, который представляет собой процесс авторегрессии первого порядка с белым шумом.

В [16] применение EWMS-карты распространено на случай стационарных процессов. В сочетании с EWMAST-картой EWMS-карта может быть использована для определения возможного изменения дисперсии стационарного процесса.

Для иллюстрации (см. рисунок 7) на EWMS-карте представлен пример. Реализация процесса авторегрессии первого порядка сгенерирована со средним $\mu = 0$ и параметром зависимости $\phi = 0{,}5$. Дисперсия процесса составляет $\sigma^2 = 1$ в период времени от $t = 1$ до $t = 150$, $\sigma^2 = 0{,}5$ для t от $t = 151$ до $t = 300$ и $\sigma^2 = 2$ для t от $t = 301$ до $t = 450$. Наблюдаемый процесс показан на рисунке 7.

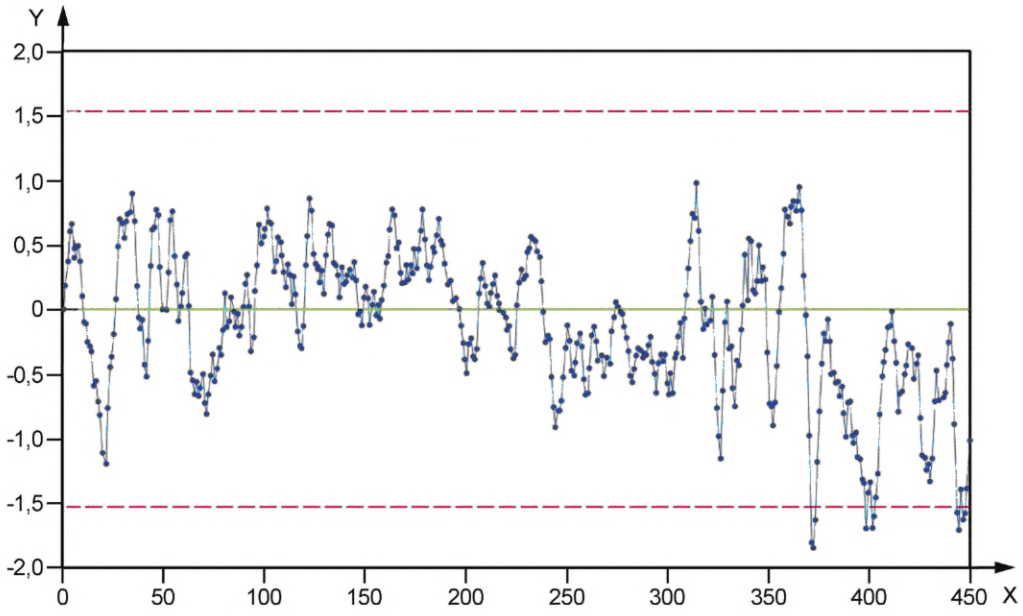
EWMAST-карта применена к моделируемым данным с параметром λ = 0,2. Стандартное отклонение статистики EWMA на EWMAST-карте, в соответствии с формулой (2), составляет 0,51. Карта с контрольными границами 3σ, приведенная на рисунке 8, показывает, что хотя для t от t = 372 до t = 448 существуют девять точек за контрольными границами, среднее процесса выглядит стабильным. Таким образом, процесс рассматривают как процесс, имеющий постоянное среднее.

Для EWMS-карты выбраны значения r = 0,05 и α = 0,05, что дает асимптотические значения нижней и верхней контрольных границ, равные 0,52 и 1,64 соответственно. Уменьшение среднеквадратичной ошибки в точке t = 158 и других точках и ее увеличение в точке t = 329 и других точках показано на рисунке 9. Поскольку в соответствии с рисунком 8 среднее процесса считают стабильным, сделан вывод о том, что дисперсия процесса изменилась.



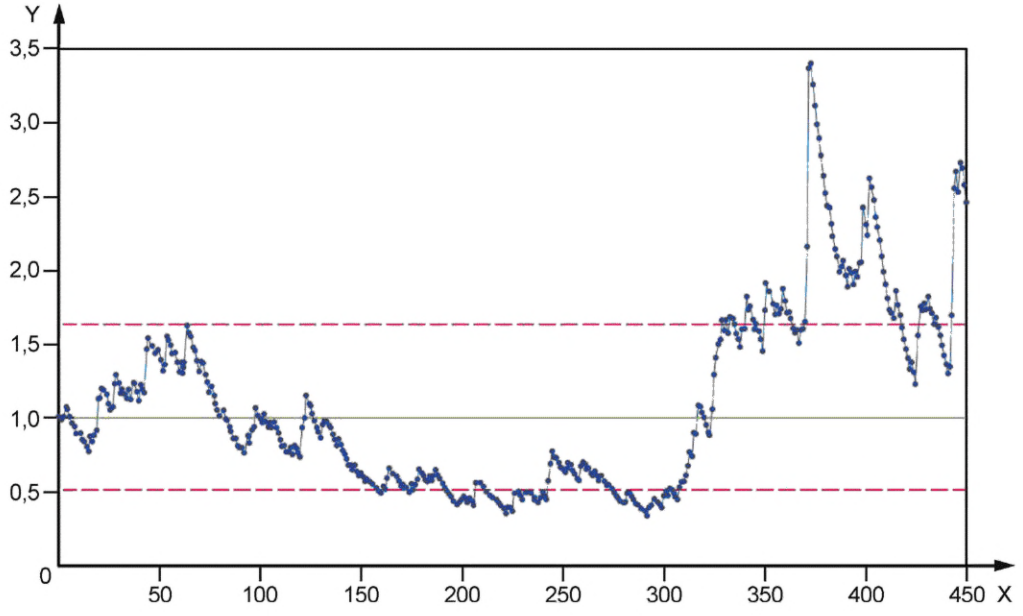
X — время; Y— значение статистики

Рисунок 7 — Реализация процесса авторегрессии первого порядка, используемого для иллюстрации процедуры EWMS, когда среднее процесса равно 0, но дисперсия процесса изменяется два раза



X — время; Y — EWMA

Рисунок 8 — EWMAST-карта с контрольными границами для временных рядов, показанных на рисунке 7



X — время; Y — EWMS

Рисунок 9 — EWMS-карта с контрольными границами для временных рядов, показанных на рисунке 7

6 Другие подходы при работе с автокоррелированными процессами

В разделах 4 и 5 рассмотрены различные контрольные карты, которые могут быть скорректированы к данным автокоррелированного процесса. В качестве альтернативы адаптации моделей влияние автокорреляции может быть уменьшено с помощью подходящего способа обработки данных. В [17] рассмотрено влияние выбора интервала отбора выборки на некоторые данные процесса. Если процесс является стационарным и выборку отбирают реже, автокорреляция выборочных данных снижается.

Таким образом, если интервал отбора выборки достаточно велик, данные кажутся некоррелированными. Однако такой подход не учитывает промежуточные данные и, следовательно, увеличивает вероятность пропуска важных изменений процесса. Вместо применения большого интервала отбора выборки можно формировать скользящее среднее процесса с фиксированным размером «окна». В [18] показано, что если процесс является стационарным и удовлетворяет некоторым условиям регулярности, неперекрывающиеся средние или средние партий являются асимптотически независимыми и нормально распределенными. Таким образом, если объем партии достаточно велик, среднее партий можно рассматривать как белый шум. Для некоторых конкретных стационарных процессов во многих статьях рассматривают средние подвыборок или средние партий, а также соответствующие карты для средних партий. В [19] рассмотрены последствия использования общих скользящих средних стационарного процесса для снижения автокорреляции процесса и их применение к контрольным картам процесса.

Приложение А
(справочное)

Случайный процесс и временные ряды

А.1 Общие положения

Случайный процесс $\{X_t; t \in T\}$ — это совокупность случайных величин, где T — набор индексов [8]. Если T представляет собой время, случайный процесс называют временным рядом. Если T представляет собой набор дискретных значений, например $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots,\}$, процесс называют дискретным временным рядом. В настоящем стандарте рассмотрены только дискретные временные ряды с равными сдвигами по времени. Дискретный временной ряд $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно рассматривать как значения, принимаемые последовательностью случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют реализацией последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n$.

А.2 Автоковариация и автокорреляция временного ряда

Если $\{X_t; t \in T\}$ — временной ряд со средним μ_t и стандартным отклонением σ_t в момент времени t, то:

1) для любых $t_1, t_2 \in T$, функция автоковариации $\gamma(.)$ равна: $\gamma(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})]$;

2) для любых $t_1, t_2 \in T$, функция автокорреляции $\rho(.)$ равна: $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}$.

Для случайного процесса или временного ряда, если существует ненулевое значение $\rho(t_1, t_2)$ для любой пары $t_1 \neq t_2$, то случайный процесс или временной ряд называют автокоррелированными.

А.3 Стационарные временные ряды и модели стационарных временных рядов

А.3.1 Общие положения

Временной ряд называют стационарным, если он находится в состоянии «статистическое равновесие». Такой временной ряд не меняется во времени. В настоящем стандарте временной ряд $\{X_t; t \in T\}$ называют ковариационным стационарным или стационарным, если:

1) $E[X_t] = \mu$ (постоянная для всех t);

2) дисперсия $V[X_t] = \sigma^2 < \infty$ (т. е. конечная константа для всех t);

3) $\gamma(t_1, t_2)$ зависит только от интервала $\tau = t_1 - t_2$ (лага). Тогда $\gamma(t_1, t_2)$ обозначают как $\gamma = (t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2) = \gamma(\tau)$.

Первое и второе требования состоят в том, что временные ряды должны иметь идентичные средние и идентичные дисперсии для любого t. Третье требование означает, что функция автоковариации должна зависеть только от лага. Если одно или несколько из приведенных требований не выполняются, процесс является нестационарным. Для стационарного временного ряда функцию автоковариации с лагом τ часто обозначают $\gamma(\tau)$.

Автокорреляционную функцию (ACF) стационарного временного ряда с лагом (τ) описывает формула:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}.$$

Очевидно, что $\rho(0) = 1$. Некоторые простые модели стационарных временных рядов представлены в А.3.2 и А.3.3.

А.3.2 Белый шум

Временной ряд называют белым шумом, если:

1) X_t подчиняется одному и тому же распределению с одним и тем же средним и одной и той же ограниченной дисперсией;

2) автоковариация $\gamma(t_1, t_2) = 0$, если $t_1 \neq t_2$.

Из перечисления 2) следует, что все автокорреляции белого шума с ненулевым лагом равны нулю. Если $\{X_t\}$ — белый шум и каждый X_t подчиняется нормальному распределению, то это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

А.3.3 Авторегрессионные процессы первого порядка [AR(1)]

Дискретный временной ряд $\{X_t; t \in (0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$ называют авторегрессионным процессом первого порядка, если

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + a_t, \qquad (A.1)$$

где ϕ — постоянный параметр; $\{a_t\}$ — случайные величины белого шума с нулевым средним и дисперсией σ_a^2.

Если $|\phi| < 1$, а $\{X_t\}$ — стационарный ряд со средним μ и дисперсией $\sigma_a^2/(1 - \phi^2)$ [20], то формула (А.1) указывает взаимосвязь между членом $(X_{t-1} - \mu)$, отклонением предыдущего измерения от среднего и отклонением текущего

значения от среднего ($X_t - \mu$). Это является моделью зависимости между результатами измерений. Уровень зависимости определяет величина ϕ. Если $|\phi| > 0$, как правило, это означает, что данные измерений процесса имеют положительную автокорреляцию. И наоборот, если $|\phi| < 0$, данные измерений процесса имеют отрицательную автокорреляцию. В частности, если $\phi = 0$, процесс представляет собой белый шум. На рисунках В.1—В.5 показаны пять реализаций; каждая сгенерирована из процесса авторегрессии первого рода с нулевым средним и значениями ϕ от 0 до 0,9.

А.4 Оценка среднего, автоковариации и автокорреляции для стационарных временных рядов

А.4.1 Оценка μ

Для реализации $\{x_t; t = 1, 2, \ldots, N\}$ среднее процесса μ, как правило, оценивают с помощью среднего арифметического или выборочного среднего

$$\bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^{N} x_t}{N}.$$

А.4.2 Оценка $\gamma(\tau)$ и $\rho(\tau)$

Для стационарного временного ряда автоковариацию, как функцию от τ, как правило, оценивают по формуле

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|\tau|} - \bar{X})}{N},$$

для $\tau = 0, \pm 1, \ldots, (N-1)$ и $\hat{\gamma}(\tau) = 0$ для $|\tau| \geq N$ [8]. В частности, если $\tau = 0$, $\hat{\gamma}(0)$ является оценкой дисперсии процесса. На практике традиционную выборочную дисперсию S^2 с $(N-1)$ в знаменателе часто используют вместо $\hat{\gamma}(0)$. Соответствующую оценку автокорреляции, называемую выборочной автокорреляцией, определяют по формуле

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

А.5 Проверка наличия автокорреляции данных временных рядов

Важно проверить, являются ли данные процесса автокоррелированными. Часто используют два простых теста.

1) Использование графика выборочной автокорреляционной функции с доверительной полосой

Для большого N выборочные автокорреляции последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_N$ с конечной дисперсией аппроксимируют распределением $N(0,1/N)$ [20]. Если $x_1, \ldots, x_N$ — реализация такой последовательности, то приблизительно 95 % выборочной автокорреляции с лагом больше 1 должно находиться между границами $\pm 1{,}96/\sqrt{N}$. Это часто используют для проверки того, являются ли данные процесса автокоррелированными или нет [21]. Практический пример представлен в 4.2, он показывает использование выборочной автокорреляционной функции с доверительной полосой для проверки наличия или отсутствия автокорреляции у набора данных процесса.

2) Тест длины серии

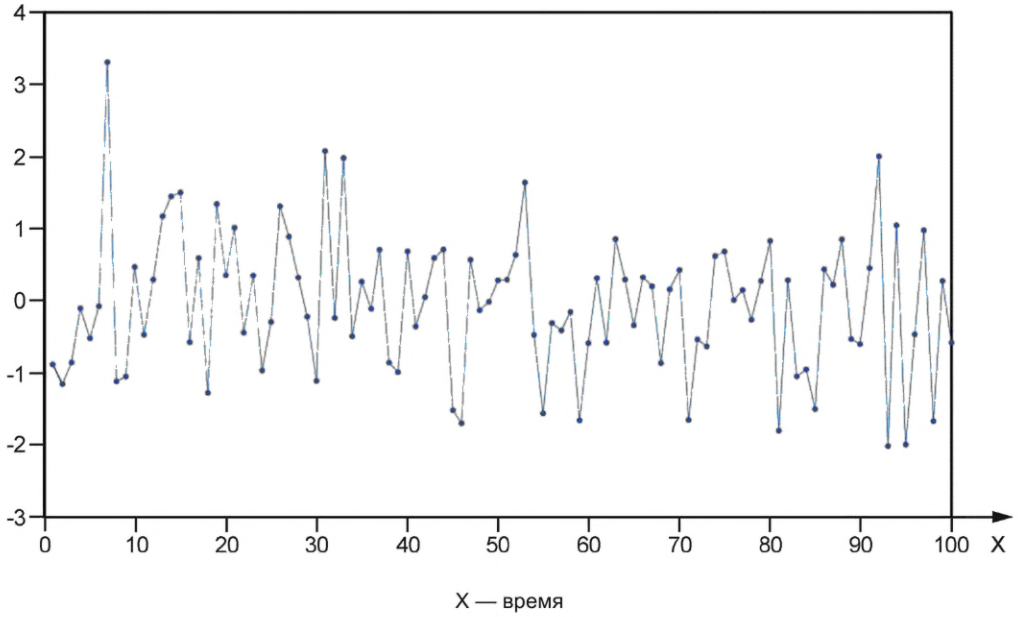
Использование выборочной автокорреляционной функции основано на предположении о том, что процесс является стационарным, это означает, что среднее процесса постоянно. Однако график автокорреляционной функции может ложно показывать значительные автокорреляции, если исследуемый случайный процесс не имеет постоянного среднего. В этом случае использование автокорреляционной функции для проверки того, является ли процесс автокоррелированным, может ввести в заблуждение. Данный тест можно использовать как дополнение к графику автокорреляционной функции. Данный тест является непараметрическим, он основан на увеличении и уменьшении длины серии [21]. В [21] (стр. 99—101) представлен пример, показывающий использование данного теста.

Приложение В
(справочное)

Формирование традиционных контрольных карт для автокоррелированных данных

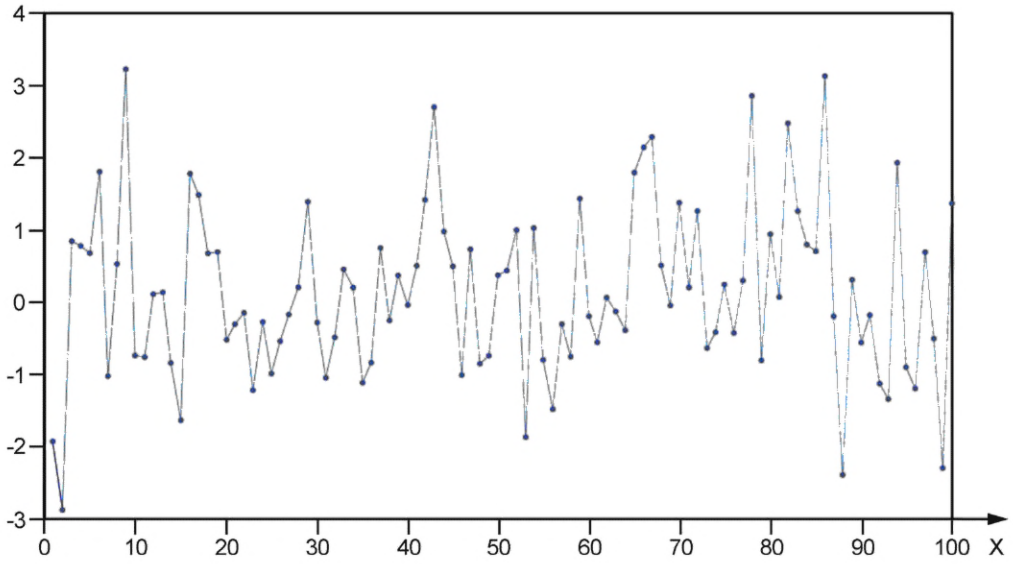
Автокорреляция данных процесса влияет на формирование традиционных карт SPC. В следующем примере показано влияние положительной автокорреляции на построение различных традиционных контрольных карт. Для получения автокоррелированных данных использовано моделирование стационарного процесса авторегрессии первого порядка [см. А.3.3] с $0 < \phi < 1$ и нормально распределенным случайным шумом. Чтобы продемонстрировать влияние автокорреляции процесса, сгенерированы и представлены на рисунках В.1—В.5 соответственно пять реализаций процессов авторегрессии первого порядка с нулевым средним, дисперсией белого шума, равной 1, и длиной серии 100 для каждого значения ϕ из ряда 0, 0,25, 0,5, 0,75 и 0,9.

Ниже показано влияние различных уровней автокорреляции на частоту ошибок 1-го рода, выраженную в виде средней длины серии стабильного процесса, и на частоту ошибок 2-го рода, выраженную в виде средней длины серии нестабильного процесса, для различных изменений среднего процесса. Средняя длина серии (ARL) — это среднее количество выборок, отобранных до момента появления сигнала. См. ИСО 7870-4:2011, подраздел 3.2 [22]. Желаемая контрольная карта должна иметь большие значения средней длины серии стабильного процесса и низкие значения средней длины серии нестабильного процесса. То есть для желаемой карты, когда процесс не имеет сдвига среднего, средняя длина серии должна быть большой, при появлении сдвига среднего средняя длина серии должна быть маленькой, чтобы быстро указать на возникновение сдвига среднего. При моделировании величину автокорреляции изменяют путем изменения значения ϕ процесса авторегрессии первого порядка. Для каждого значения ϕ значение средней длины серии измеряют как в ситуации, когда базовый процесс находится в стабильном состоянии, так и в противном случае. Моделирование используют для изучения влияния каждой ситуации состояния процесса авторегрессии первого порядка. В каждом случае генерируют не менее 2000 временных рядов. Для процесса без изменения среднего для каждого ряда измеряют длину серии и вычисляют среднее арифметическое длины серии процесса в стабильном состоянии. Для нестабильного процесса среднее изменяют в процессе моделирования рядов, а затем определяют длину серии. Здесь рассматривают только поэтапные изменения среднего Δ, кратные стандартному отклонению процесса, когда среднее изменяется мгновенно, а затем остается неизменным на новом уровне. Рассчитывая среднее арифметическое длины серии 2000 рядов, определяют среднюю длину серии процесса в нестабильном состоянии. Исследовано влияние на *X*-карту, CUSUM-карту и EWMA-карту. Для *X*-карты использованы контрольные границы 3σ. Для EWMA-карты параметр сглаживания λ, равный 0,2, и контрольные границы 3σ. Для CUSUM-карты использованы значения средней длины серии в соответствии с [23] и [2]. Для табличной формы CUSUM-карты использованы следующие параметры карты: $h = 5{,}0$ и $k = 0{,}5$.



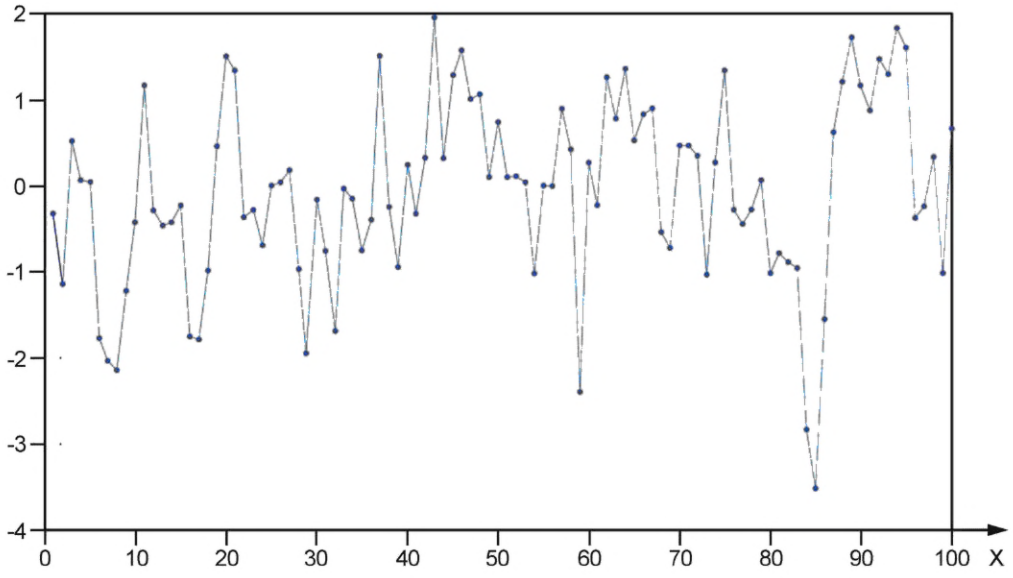
X — время

Рисунок В.1 — Реализация процесса авторегрессии первого рода при $\phi = 0$



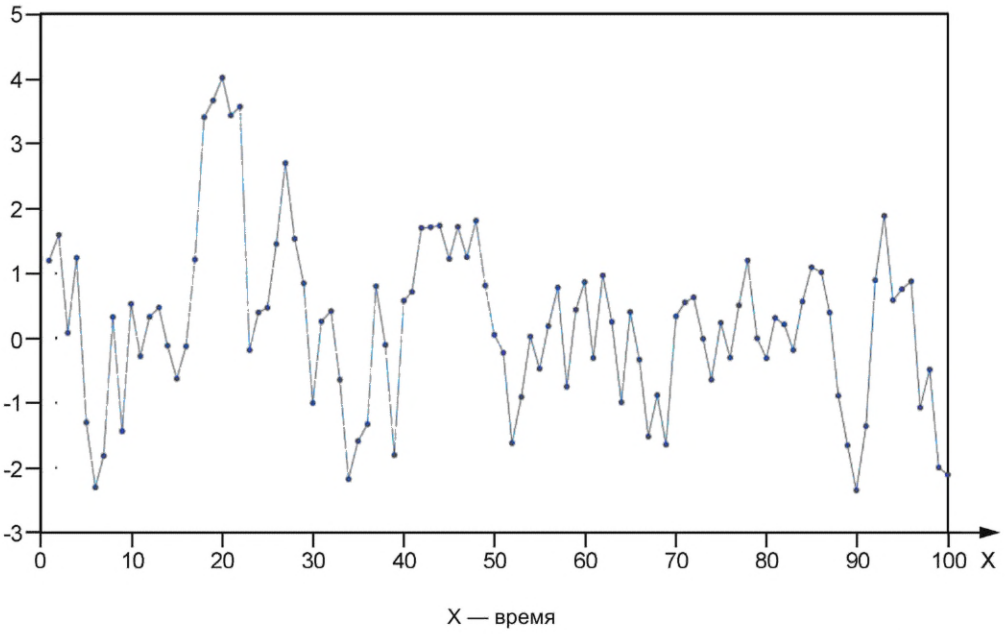
X — время

Рисунок В.2 — Реализация процесса авторегрессии первого рода при ϕ = 0,25



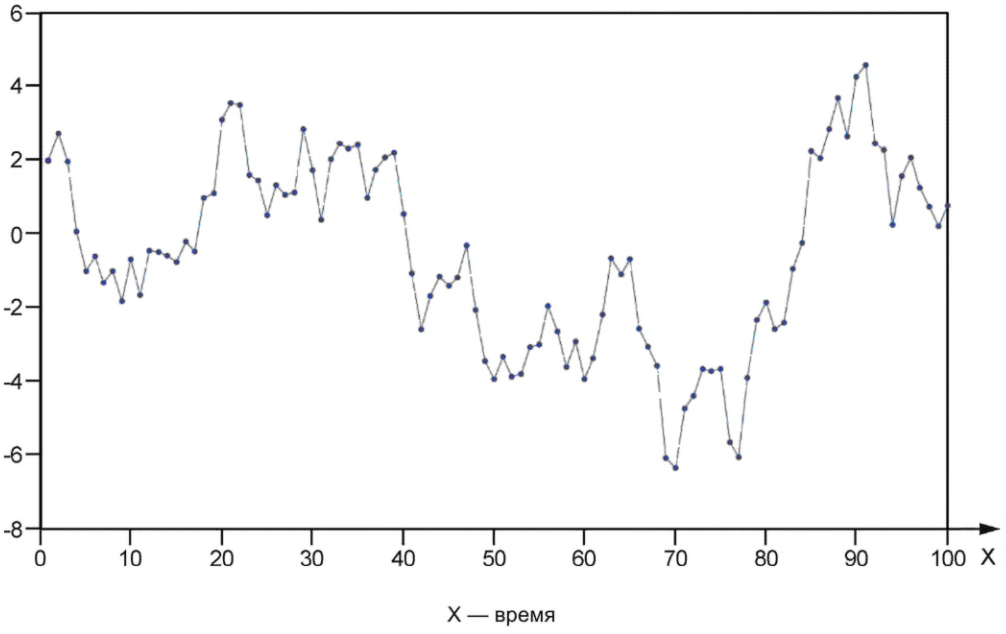
X — время

Рисунок В.3 — Реализация процесса авторегрессии первого рода при ϕ = 0,5



X — время

Рисунок В.4 — Реализация процесса авторегрессии первого рода при ϕ = 0,75



X — время

Рисунок В.5 — Реализация процесса авторегрессии первого рода при ϕ = 0,9

Таблица В.1 — Результаты исследований

ϕ	Δ в единицах σ	*X*-карта *L* = 3	CUSUM-карта при *h* = 5,0, *k* = 0,5	EWMA-карта при λ = 0,2, L_Z = 3
0 (автокорреляция отсутствует)	0	370,40	465,00	547,71
	0,5	155,21	38,40	44,60
	1	43,89	10,40	10,75
	2	6,30	4,01	3,73
	3	2,00	2,57	2,38

Окончание таблицы В.1

ϕ	Δ в единицах σ	*X*-карта $L = 3$	CUSUM-карта при $h = 5{,}0$, $k = 0{,}5$	EWMA-карта при $\lambda = 0{,}2$, $L_Z = 3$
0,25 (автокорреляция слабая)	0	381,60	119,35	139,50
	0,5	160,53	30,02	32,81
	1	46,61	10,58	10,72
	2	7,25	4,16	3,85
	3	2,21	2,64	2,41
0,5 (автокорреляция средняя)	0	400,74	49,23	56,00
	0,5	181,15	25,76	26,96
	1	56,42	11,43	10,79
	2	9,16	4,34	4,00
	3	2,60	2,64	2,50
0,75 (автокорреляция умеренно высокая)	0	496,04	30,98	31,45
	0,5	235,98	22,74	21,82
	1	74,33	12,67	11,30
	2	14,42	4,73	4,56
	3	3,59	2,83	2,58
0,9 (автокорреляция высокая)	0	833,59	29,02	26,24
	0,5	413,03	24,40	21,09
	1	157,72	15,38	13,19
	2	27,09	5,84	5,08
	3	6,24	2,85	2,72

Результаты исследований приведены в таблице В.1. В графе 1 показана величина автокорреляции в диапазоне значений ϕ от отсутствия автокорреляции ($\phi = 0$) до $\phi = 0{,}9$. В графе 2 для каждого значения ϕ показаны исследованные величины изменений среднего в единицах стандартного отклонения процесса (0, 0,5, 1,0, 2,0 и 3,0 стандартного отклонения). В графе 3 показаны значения на *X*-карте. Наличие автокорреляции не оказывает отрицательного влияния на среднюю длину серии процесса в стабильном состоянии. При $\phi \le 0{,}25$ автокорреляция оказывает слабое влияние на среднюю длину серии в нестабильном состоянии процесса. Однако при $\phi \ge 0{,}5$ автокорреляция оказывает сильное влияние на среднюю длину серии процесса. При увеличении ϕ увеличивается средняя длина серии как в стабильном, так и в нестабильном состоянии процесса. Это особенно очевидно, когда сдвиги среднего невелики. Таким образом, при автокорреляции от средней до высокой по *X*-карте трудно обнаружить небольшие сдвиги среднего процесса.

В графах 4 и 5 показаны значения на CUSUM-карте и EWMA-карте соответственно. Если данные процесса имеют положительную автокорреляцию, даже такую слабую, как $\phi = 0{,}25$, это отрицательно сказывается на средней длине серии в стабильном состоянии процесса. Если $\phi = 0{,}25$, средняя длина серии в стабильном состоянии процесса на CUSUM-карте и EWMA-карте уменьшается до 119,35 и 139,50 со значений 465,00 и 547,71 соответственно, когда $\phi = 0$. Показано, что даже при наличии слабой автокорреляции графики часто дают ложные сигналы тревоги. С другой стороны, влияние средней длины серии в нестабильном состоянии процесса на CUSUM-карте и EWMA-карте относительно невелико. Следовательно, если процесс имеет положительную автокорреляцию, это сильно влияет на среднюю длину серии и на картах CUSUM и EWMA возникают ложные сигналы тревоги.

Здесь приведены результаты только для положительно автокоррелированных рядов, поскольку положительная автокорреляция на сегодняшний день является наиболее распространенной на практике, например в биологии. Для изучения влияния отрицательной автокорреляции см. [4]. Рассмотрены только поэтапные изменения среднего.

Приложение ДА
(справочное)

Сведения о соответствии ссылочных международных стандартов национальным стандартам

Таблица ДА.1

Обозначение ссылочного международного стандарта	Степень соответствия	Обозначение и наименование соответствующего национального стандарта
ISO 3534-2	IDT	ГОСТ Р ИСО 3534-2—2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 2. Прикладная статистика»
Примечание — В настоящей таблице использовано следующее условное обозначение степени соответствия стандарта: - IDT — идентичный стандарт.		

Библиография

[1] ALWAN L. C., ROBERT H. V. (1988), Time-series modelling for statistical process control, Journal of Business & Economic Statistics, 6(1), 87—95

[2] RUNGER G. C., WILLEMAIN T. R., PRABHU, S. (1995), Average run lengths for CUSUM control charts applied to residuals, Communication in Statistics — Theory and Methods, 24(1), 273—282

[3] LU C. W., REYNOLDS M. R. (1999), EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes, Journal of Quality Technology, 31(2), 166—188

[4] ZHANG N. F. (2000), Statistical control charts for monitoring the mean of a stationary process, Journal of Statistical Computation and Simulation, 66(3), 249—258

[5] WARDELL D. G., MOSKOWWITZ H., PLANTE R. D. (1994), Run-length distributions of special-cause control charts for correlated processes, Technometrics, 36, 3—17

[6] ZHANG N. F. (1997), Detection capability of residual chart for autocorrelated data, Journal of Applied Statistics, 24(4), 475—492

[7] DODSON B. (1995), Control charting dependent data: A case study, Quality Engineering, 7(4), 757—768

[8] WOODWARD W. A., GRAY H. L., ELLICOTT A. C. (2012), Applied time series analysis. Boca Raton, FL: CRC Press.

[9] VANBRACKLE L., REYNOLDS M. R. (1997), EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation, Communications in Statistics — Simulation and computation, 26(3), 979—1008

[10] ZHANG N. F. (1998), A statistical control chart for stationary process data, Technometrics, 40(1), 24—38

[11] BOX G. E. P., JENKINS G. M., REINSEL G. C. (1994), Time series analysis: Forecasting and control (3rd ed.), Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall

[12] YASHCHIN E. (1993), Performance of CUSUM control schemes for serially correlated observations, Technometrics, 35(1), 37—52

[13] LU C. W., REYNOLDS M. R. (2001), CUSUM charts for monitoring an autocorrelated process, Journal of Quality Technology, 33(3), 316—334

[14] MACGREGOR J. F., HARRIS T. J. (1993), The exponentially weighted moving variance, Journal of Quality Technology, 25(2), 106—118

[15] LU C. W., REYNOLDS M. R. (1999), Control charts for monitoring the mean and the variance of autocorrelated processes, Journal of Quality Technology, 31(2), 259—274

[16] ZHANG N. F., PINTAR A. L. (2015), Monitoring process variability for stationary process data, Quality and Reliability Engineering International, 31(8), 1383—1396

[17] MACGREGOR J. F. (1976), Optimal choice of the sampling interval for discrete process control, Technometrics, 18(2), 151—160

[18] BRILLINGER D. R. (1973), Estimation of the mean of a stationary time series by sampling, Journal of Applied Probability, 10, 419—431

[19] ZHANG N. F. (2006), The batched moving averages of measurement data and their applications in data treatment, Measurement, (39), 864—875

[20] BROCKWELL P. J., DAVIS R. A. (1991), Time series: Theory and methods (2nd ed.). New York, NY: Springer-Verlag

[21] WINKEL P, & ZHANG N. F. (2007), Statistical development of quality in medicine. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.

[22] ISO 7870-4:2011*, Control charts — Part 4: Cumulative sum charts

[23] LUCAS J. M. (1976), The design and use of V-Mask control schemes, Journal of Quality Technology, 8(1), 1—12

* Заменен на ISO 7870-4:2021.

УДК 658.562.012.7:65.012.122:006.352 ОКС 03.120.30

Ключевые слова: статистическое управление процессом, контрольная карта, контрольная карта для стационарных процессов, автокорреляция, автоковариация, карта остатков

Редактор *Н.В. Таланова*
Технический редактор *И.Е. Черепкова*
Корректор *О.В. Лазарева*
Компьютерная верстка *М.В. Малеевой*

Сдано в набор 28.09.2023. Подписано в печать 24.10.2023. Формат 60×84⅛. Гарнитура Ариал.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,37.

Подготовлено на основе электронной версии, предоставленной разработчиком стандарта

Создано в единичном исполнении в ФГБУ «Институт стандартизации»
для комплектования Федерального информационного фонда стандартов,
117418 Москва, Нахимовский пр-т, д. 31, к. 2.

gost.e-ecolog.ru gost.e-ecolog.ru

gost.e-ecolog.ru