ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р ИСО 7870-4— 2023

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Часть 4

Карты кумулятивных сумм

(ISO 7870-4:2021, Control charts — Part 4: Cumulative sum charts, IDT)

Издание официальное

Москва
Российский институт стандартизации
2023

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

1 ПОДГОТОВЛЕН Закрытым акционерным обществом «Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем» (ЗАО «НИЦ КД») на основе собственного перевода на русский язык англоязычной версии стандарта, указанного в пункте 4

2 ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 125 «Применение статистических методов»

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 27 сентября 2023 г. № 965-ст

4 Настоящий стандарт идентичен международному стандарту ИСО 7870-4:2021 «Контрольные карты. Часть 4. Карты кумулятивных сумм» (ISO 7870-4:2021 «Control charts — Part 4: Cumulative sum charts», IDT).

Международный стандарт разработан Техническим комитетом ТК 69 Международной организации по стандартизации (ИСО).

Наименование настоящего стандарта изменено относительно наименования указанного международного стандарта для приведения в соответствие с ГОСТ Р 1.5—2012 (пункт 3.5).

При применении настоящего стандарта рекомендуется использовать вместо ссылочных международных стандартов соответствующие им национальные стандарты, сведения о которых приведены в дополнительном приложении ДА

5 ВЗАМЕН ГОСТ Р ИСО 7870-4—2013

*Правила применения настоящего стандарта установлены в статье 26 Федерального закона от 29 июня 2015 г. № 162-ФЗ «О стандартизации в Российской Федерации». Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодном (по состоянию на 1 января текущего года) информационном указателе «Национальные стандарты», а официальный текст изменений и поправок — в ежемесячном информационном указателе «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ближайшем выпуске ежемесячного информационного указателя «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет (*gost.e-ecolog.ru

© ISO, 2021
© Оформление. ФГБУ «Институт стандартизации», 2023

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

Содержание

1 Область применения 1
2 Нормативные ссылки 1
3 Термины, определения, обозначения и сокращения 1
4 Основные функции CUSUM-карты 3
5 Основные этапы построения CUSUM-карты. Графическое представление 3
6 Пример CUSUM-графика. Напряжение на двигателе 4
7 Принципы принятия решений на основе CUSUM-карты 6
8 Типы решений по CUSUM-карте 9
9 CUSUM-методы для управления процессом и контроля качества продукции 15
Приложение А (справочное) Пример табличной формы CUSUM 37
Приложение В (справочное) Определение точки изменений 40
Приложение ДА (справочное) Сведения о соответствии ссылочных международных стандартов национальным стандартам 42
Библиография 42

Введение

В настоящем стандарте рассмотрен универсальный и полезный, но очень простой и достаточно мощный графический метод интерпретации данных, расположенных в любой установленной последовательности. Эти данные могут отражать общие экономические показатели, такие как прибыль, издержки, данные выполнения конкретной технологической операции, параметры процесса и характеристики продукции. Данные могут представлять собой последовательные, количественные данные, измеряемые в соответствии с непрерывной шкалой (например, 24, 60, 31, 21, 18, 97...), неколичественные данные вида «да»/«нет», «хорошо»/«плохо», «успех»/«отказ» или статистику (например среднее, размах, количество событий).

Метод называют методом кумулятивных сумм или «CUSUM-методом». Это вызвано тем, что метод предусматривает вычитание из полученных данных заданного значения, например, целевого, предпочтительного или опорного значения, и их суммирование с накоплением. График таких сумм называют CUSUM-картой. Такой простой арифметический процесс обеспечивает хорошую визуальную интерпретацию данных.

CUSUM-метод используют игроки в гольф во всем мире, прибавляя 4 при выигрыше и вычитая 2 при проигрыше к своему счету и накапливая полученные баллы. Это — CUSUM-метод в действии. Однако метод еще недостаточно известен и, следовательно, недостаточно широко применяется в бизнесе, промышленности, торговле и государственной службе. Возможно, это связано с тем, что в CUSUM-методах, как правило, использованы статистические термины, а не термины рабочего процесса.

Настоящий стандарт направлен на обеспечение широкого применения этого метода. Преимущество данного метода перед широко известными картами Шухарта состоит в том, что CUSUM-метод позволяет обнаружить изменения приблизительно в три раза быстрее, чем карты Шухарта. Кроме того, как и в гольфе, когда цель изменяется в процессе игры (на конкретной лунке), график CUSUM остается неизменным в отличие от стандартной карты Шухарта, где контрольные линии требуют постоянной корректировки.

CUSUM-карты могут быть использованы как дополнение к картам Шухарта и EWMA-картам (картам экспоненциально взвешенного скользящего среднего). Каждая точка на карте EWMA включает информацию обо всех предыдущих подгруппах или наблюдениях, при этом веса предыдущих наблюдений убывают по экспоненте. Аналогично CUSUM-карте, EWMA-карта может быть усовершенствована и стать более чувствительной для обнаружения изменений процесса. Этот вопрос рассмотрен в ИСО 7870-6.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ

Часть 4

Карты кумулятивных сумм

Statistical methods. Control charts. Part 4. Cumulative sum charts

Дата введения — 2024—03—01

1 Область применения

В настоящем стандарте установлены статистические процедуры определения кумулятивной суммы (CUSUM) для контроля процесса и качества продукции с использованием количественных и альтернативных данных. В настоящем стандарте установлены общие методы принятия решений, использующие кумулятивную сумму (CUSUM) для мониторинга, контроля, управления и ретроспективного анализа.

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использованы нормативные ссылки на следующие стандарты [для датированных стандартов применяют только указанное издание ссылочного стандарта, для недатированных — последнее издание (включая все изменения)]:

ISO 3534-1, Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: General statistical terms and terms used in probability (Статистика. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей)

ISO 3534-2, Statistics — Vocabulary and symbols — Part 2: Applied statistics (Статистика. Словарь и условные обозначения. Часть 2. Прикладная статистика)

3 Термины, определения, обозначения и сокращения

В настоящем стандарте применены термины по ИСО 3534-1, ИСО 3534-2, а также следующие термины с соответствующими определениями.

ИСО и МЭК ведут терминологические базы данных для использования в области стандартизации по следующим адресам:

- платформа онлайн-просмотра ИСО: доступна по адресу gost.e-ecolog.ru ;
- Электропедия МЭК: доступна по адресу gost.e-ecolog.ru .

3.1 Термины и определения

3.1.1 **целевое значение *T*** (target value *T*): Значение, от которого должно быть обнаружено отклонение среднего уровня процесса.

Примечание 1 — При использовании CUSUM-карты отклонения от целевого значения складывают.

Примечание 2 — При использовании V-маски целевое значение часто является опорным значением или номинальным значением. Необходимо подчеркнуть, что целевое значение не обязательно является самым желательным или предпочтительным значением. Это лишь удобное значение для разработки CUSUM-карты.

Издание официальное

3.1.2 **репрезентативное значение нестабильности** (representative out of control value): В CUSUM-таблицах значение, определяющее чувствительность процедуры.

Примечание — Верхнее значение нестабильности равно ($T + f\sigma_e$) при мониторинге смещения вверх. Нижнее значение нестабильности равно ($T - f\sigma_e$) при мониторинге смещения вниз.

3.1.3 **опорный сдвиг *F*, *f*** (reference shift *F*, *f*): В CUSUM-таблицах разность целевого значения (3.1.1) и репрезентативного значения нестабильности (3.1.2).

Примечание — Необходимо различать значение *f*, относящееся к стандартизованному опорному сдвигу, и значение *F*, относящееся к наблюдаемому опорному сдвигу; $F = f\sigma_e$. Это играет решающую роль при построении CUSUM-карты в табличной форме.

3.1.4 **интервал решений *H*, *h*** (decision interval *H*, *h*): В CUSUM-таблицах совокупная сумма отклонений от репрезентативного значения нестабильности (3.1.2), приводящая к появлению сигнала.

Примечание — Необходимо различать значение *h*, относящееся к стандартизованному интервалу решений, и значение *H,* относящееся к наблюдаемому интервалу решений; $H = h\sigma_e$.

3.1.5 **средняя длина серии;** ARL (average run length; ARL): Среднее количество выборок, отобранных до точки появления сигнала.

Примечание — Среднюю длину серии (ARL), как правило, связывают с определенным уровнем процесса. При этом ARL_0 означает среднюю длину серии процесса на целевом уровне, т. е. с нулевым сдвигом.

3.2 Сокращения

В настоящем стандарте использованы следующие сокращения:
ARL — средняя длина серии;
CS1 — CUSUM-схема с большой ARL при нулевом сдвиге;
CS2 — CUSUM-схема с меньшей ARL при нулевом сдвиге;
FIR — быстрая начальная реакция;
LCL — нижняя контрольная граница;
RL — длина серии;
SPC — статистическое управление процессом;
UCL — верхняя контрольная граница.

3.3 Обозначения

В настоящем стандарте использованы следующие обозначения:

a — коэффициент масштаба;
C — значение кумулятивной суммы;
c_4 — коэффициент для определения оценки стандартного отклонения в пределах подгруппы;
δ — изменение, которое должно быть обнаружено;
Δ — стандартизованное количество изменений, которые должны быть обнаружены;
d — ведущее расстояние;
d_2 — коэффициент для определения оценки стандартного отклонения в пределах подгруппы;
F — наблюдаемый опорный сдвиг;
f — стандартизованный опорный сдвиг;
K — опорное значение, равное сумме целевого значения T и наблюдаемого опорного сдвига F;
H — наблюдаемый интервал решений;
h — стандартизованный интервал решений;
ARL_δ — средняя длина серии при сдвиге δ;
ARL_0 — средняя длина серии при нулевом сдвиге;
n — объем подгруппы;
m — количество подгрупп в рамках первичного исследования;
p — вероятность «успеха»;
$\overline{R}$ — средний размах подгруппы;

σ — стандартное отклонение процесса;

σ_0 — стандартное отклонение в пределах подгруппы;

$\hat{\sigma}_0$ — оценка стандартного отклонения в пределах подгруппы;

σ_e — стандартная ошибка;

s — выборочное стандартное отклонение в пределах подгруппы;

$\bar{s}$ — среднее арифметическое стандартных отклонений подгрупп;

$s_{\bar{x}}$ — стандартная ошибка среднего по m подгруппам;

T — целевое значение;

τ — истинная точка изменения;

$\hat{\tau}$ — оценка точки изменения;

x — результат наблюдений;

$\bar{x}$ — выборочное среднее (подгруппы);

$\bar{\bar{x}}$ — среднее арифметическое выборочных средних подгрупп.

4 Основные функции CUSUM-карты

Кумулятивная сумма представляет собой сумму отклонений от некоторого установленного опорного значения. Среднее любой группы последовательных значений может быть представлено визуально с помощью угла наклона графика данных. Основные особенности CUSUM-карты следующие.

a) CUSUM-карта чувствительна к обнаружению изменений среднего.

b) Любые изменения среднего и степень этих изменений на карте визуально проявляются в виде изменения угла наклона графика данных:

1) горизонтальный график указывает на соответствие среднего процесса целевому или опорному значению;

2) наклон графика вниз указывает на то, что среднее процесса меньше опорного или целевого значения (чем больше угол наклона, тем больше различия);

3) наклон графика данных вверх указывает на то, что среднее процесса больше опорного или целевого значения (чем больше угол наклона, тем больше различия).

c) CUSUM-карта может быть использована ретроспективно для исследовательских целей и прогнозирования состояния процесса в ближайшем будущем.

В соответствии с перечислением b) CUSUM-карта может указать точки произошедших изменений. Это точки изменения градиента CUSUM-графика. CUSUM-карта обладает огромным преимуществом для управления процессами. Она позволяет быстро и точно определить момент появления изменений процесса, когда необходимы корректирующие действия.

Полезная функция CUSUM-карты состоит в том, что она может быть обработана без графического изображения, т. е. в табличной форме. Это очень полезно при контроле процесса, когда количество параметров процесса и характеристик продукции велико. Данные о состоянии процесса могут быть получены автоматически и загружены в соответствующее программное обеспечение для автоматического CUSUM-анализа. Менеджер процесса может быть предупрежден об изменениях по многим характеристикам одновременно. Пример метода приведен в приложении А.

5 Основные этапы построения CUSUM-карты. Графическое представление

При построении CUSUM-карты для отдельных значений необходимо выполнить следующие действия.

Этап 1. Выбирают опорное, целевое, контрольное или предпочтенное значение. Среднее арифметическое последних результатов обычно обеспечивает карте хорошую дискриминацию.

Этап 2. Заносят в таблицу результаты в значимой последовательности (например, хронологической). Вычитают опорное значение из каждого результата.

Этап 3. Последовательно суммируют значения, полученные на этапе 2. Последовательные суммы изображают на CUSUM-карте.

Этап 4. Для разумной дискриминации, без излишней чувствительности, рекомендуется:

a) выбрать удобный интервал между точками на горизонтальной оси и выбрать интервал на вертикальной оси, равный 2σ (или $2\sigma_e$ для CUSUM-карты среднего), округляя в соответствии с правилами;

b) если необходимо обнаружить известное изменение, например δ, выбрать вертикальный масштаб так, чтобы отношение единицы масштаба по вертикальной оси к единице масштаба по горизонтальной оси составляло от δ до 2δ с округлением в соответствии с правилами.

Примечание — Выбор масштаба очень важен, так как неудачный масштаб может создать ошибочное впечатление о состоянии процесса. Масштаб, выбранный в соответствии с перечислениями a) и b), показывает обоснованные изменения и не является ни слишком чувствительным, ни слишком инертным.

6 Пример CUSUM-графика. Напряжение на двигателе

6.1 Процесс

Получен набор из 40 значений контролируемой характеристики в хронологической последовательности. Контролируемой характеристикой является напряжение на электродвигателях мощностью не более одной лошадиной силы на ранней стадии производства. Измерения выполнены в непрерывном масштабе на двигателях в последовательности их изготовления. Результаты измерений[1)]:

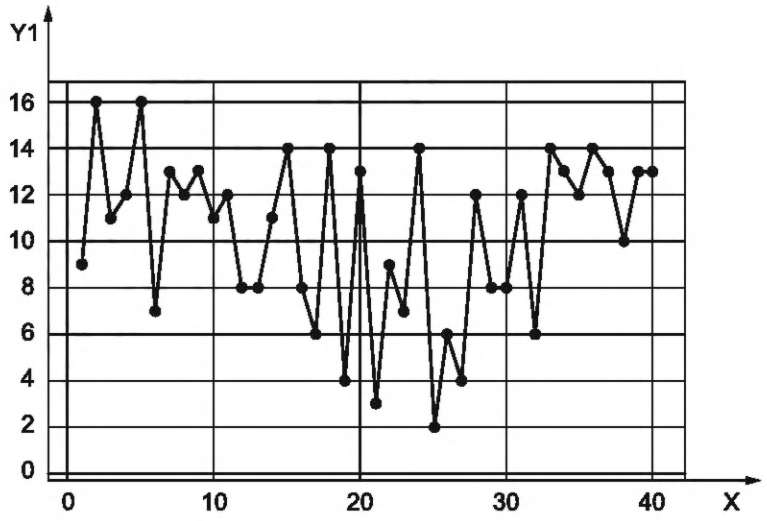
9, 16, 11, 12, 16, 7, 13, 12, 13, 11, 12, 8, 8, 11, 14, 8, 6, 14, 4, 13, 3, 9, 7, 14, 2, 6, 4, 12, 8, 8, 12, 6, 14, 13, 12, 14, 13, 10, 13, 13.

Опорное или целевое значение напряжения составляет 10 В.

6.2 Простой график результатов

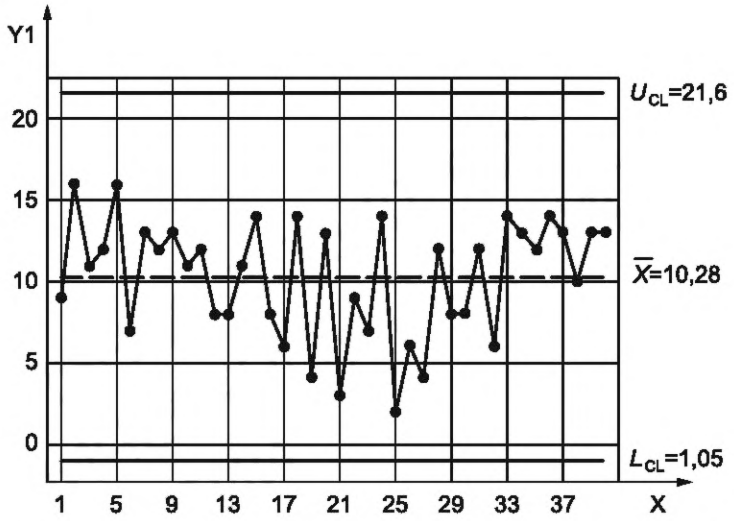
Для лучшего понимания основных свойств процесса с помощью стандартного подхода необходимо графически представить эти значения в естественном порядке (см. рисунок 1 a).

На графике заметно общее уменьшение среднего в средней части от более высокого начального уровня с такими же значениями в конце. Рисунок 1 a) не позволяет четко уловить тенденции изменения контролируемой характеристики вследствие высокой изменчивости данных.

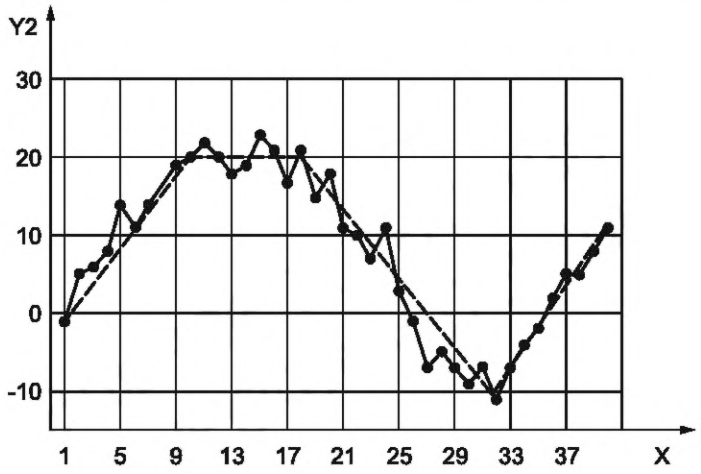


a) График значений напряжения на электродвигателях

[1)] Результаты измерений приведены в вольтах (В).



b) Стандартная контрольная карта индивидуальных значений



c) CUSUM-карта

X — номер двигателя; Y1 — напряжение; Y2 — кумулятивная сумма

Рисунок 1 — Пример. Напряжение на электродвигателе

6.3 Стандартная контрольная карта индивидуальных значений

Затем составляют стандартную контрольную карту индивидуальных значений (см. рисунок 1 b).

Рисунок 1 b) не добавляет ясности. Он даже вводит в заблуждение. Стандартный критерий статистического управления процессом для проверки стабильности и управляемости процесса включает только «отсутствие точек выше верхней контрольной границы (UCL) или ниже нижней контрольной границы (LCL)». В рассматриваемом примере все точки находятся в пределах этих границ. Следовательно, можно сделать вывод, что данный процесс является стабильным, вокруг его среднего уровня 10 В, который является целевым значением. Дальнейший стандартный анализ показал бы, что несмотря на стабильность, процесс не удовлетворяет установленным требованиям. Однако сам по себе анализ не дает объяснения причин несоответствия требованиям.

Причина неспособности стандартной контрольной карты индивидуальных значений выявлять причины изменчивости процесса, состоит в том, что контрольные границы основаны на фактическом состоянии процесса, а не на установленных требованиях. Следовательно, если процессу присуща высокая изменчивость, контрольные границы являются достаточно широкими. Необходим метод, который лучше выявляет тенденции изменений процесса и позволяет определить и удалить их основные причины.

Примечание — Использование дополнительно контрольных карт скользящего размаха позволяет исследовать другие проблемы изменчивости процесса.

6.4 Построение CUSUM-карты

Построение CUSUM-карты индивидуальных значений, как в рассматриваемом примере, основано на выполнении этапов, установленных в разделе 5.

Этап 1. Выбирают целевое значение *T*. В примере предпочтительное или опорное значение равно 10 В.

Этап 2. Заносят в таблицу результаты измерений напряжения в последовательности изготовления напротив номера двигателя в таблице 1 (столбцы 2 и 6). Вычитают значение 10 (опорное значение) из каждого результата измерений (см. таблицу 1, столбцы 3 и 7).

Этап 3. Последовательно суммируют значения таблицы 1 (столбцы 3 и 7) и сумму указывают в столбцах 4 и 8. Изображают в виде графика данные столбцов 4 и 8 в соответствии с номером двигателя [(см. рисунок 1 c)], учитывая рекомендации относительно масштаба на этапах 4 и 5 раздела 5.

Таблица 1 — Табличное представление вычислений для построения CUSUM-карты на основе последовательности измерений напряжения

Номер двигателя (1)	Напряжение, В (2)	Напряжение минус 10, В (3)	CUSUM-карта (4)	Номер двигателя (5)	Напряжение, В (6)	Напряжение минус 10, В (7)	CUSUM-карта (8)
1	9	–1	–1	21	3	–7	+11
2	16	+6	+5	22	9	–1	+10
3	11	+1	+6	23	7	–3	+7
4	12	+2	+8	24	14	+4	+11
5	16	+6	+14	25	2	–8	+3
6	7	–3	+11	26	6	–4	–1
7	13	+3	+14	27	4	–6	–7
8	12	+2	+16	28	12	+2	–5
9	13	+3	+19	29	8	–2	–7
10	11	+1	+20	30	8	–2	–9
11	12	+2	+22	31	12	+2	–7
12	8	–2	+20	32	6	–4	–11
13	8	–2	+18	33	14	+4	–7
14	11	+1	+19	34	13	+3	–4
15	14	+4	+23	35	12	+2	–2
16	8	–2	+21	36	14	+4	+2
17	6	–4	+17	37	13	+3	+5
18	14	+4	+21	38	10	0	+5
19	4	–6	+15	39	13	+3	+8
20	13	+3	+18	40	13	+3	+11

7 Принципы принятия решений на основе CUSUM-карты

7.1 Правила принятия решения

Правила принятия решений необходимы для интерпретации CUSUM-карты. Если правила принятия решений установлены в зависимости от свойств процесса, то на основе CUSUM-карты могут быть предприняты необходимые действия. Обычно эти действия включают:

a) для управления процессом: корректировку условий функционирования процесса;

b) для улучшения: исследование первопричин изменчивости;

c) для прогнозирования: анализ и, при необходимости, корректировка модели прогнозирования или ее параметров.

7.2 Основы принятия решений

Необходимо установить основные критерии принятия решений в соответствии с принятыми предположениями.

Для обеспечения эффективных основ обнаружения сигнала об изменении состояния процесса, необходимо установление количественных параметров «шума» в системе. Что представляет собой шум и сигнал, определяет принятая стратегия контроля, которая устанавливает необходимое количество наблюдений, частоту наблюдений и способ составления выборки или подгруппы. Следует учитывать, что показатель, используемый для количественной оценки изменчивости процесса, как правило, влияет на результат.

Собственную изменчивость, как правило, измеряют посредством одной из следующих статистик.

a) Стандартное отклонение: если для построения CUSUM-карты использованы отдельные наблюдения.

Отдельные наблюдения для вычисления стандартного отклонения процесса обычно отбирают из однородного сегмента данных. Это требование является достаточно жестким. Изменчивость больше собственной изменчивости процесса рассматривают как результат действия специальных причин, что указывает на сдвиг среднего серии данных или изменение собственной изменчивости или на то и другое вместе.

b) Стандартная ошибка: если некоторая функция подгруппы наблюдений, такая как среднее, медиана или размах позволяет построить CUSUM-карту.

Понятие подгруппы основано на том, что изменчивость в пределах подгруппы является результатом воздействия общих, а между подгруппами — специальных причин. Основной ролью CUSUM-карты является выявление общих и особых причин изменчивости. Следовательно, правильный выбор подгруппы имеет огромное значение. Например, составление подгруппы путем отбора четырех последовательно изготовленных единиц продукции производственного процесса каждый час, в противоположность отбору одной единицы продукции через каждые четверть часа, может дать совершенно разные оценки изменчивости. Стандартная ошибка в первом случае меньше, чем во втором. Одна CUSUM-карта характеризует изменчивость последовательных единиц продукции, а другая — изменчивость через 15 минут. Выбор соответствующего показателя изменчивости зависит от того, о какой изменчивости должна сигнализировать карта.

Однако требование наличия стабильности процесса в течение периода, достаточного для установления количественных показателей изменчивости, таких как стандартное отклонение или стандартная ошибка, является слишком жестким для некоторых областей применения CUSUM-метода.

Например, наблюдения непрерывного процесса могут показать незначительные отклонения среднего уровня. Требуется, чтобы именно по этим отклонениям были приняты решения о систематической или постоянной изменчивости. Например:

a) производственным процессом управляет термостат или другое устройство автоматического управления;

b) качество исходного сырья может подвергаться незначительным изменениям, не нарушая установленных требований;

c) при мониторинге реакции пациента на лечение могут быть выявлены незначительные изменения обмена веществ, связанные с пищей, пребыванием в больнице или домашними делами и т. д., но по всем последствиям лечения должно быть принято решение об общей изменчивости.

С другой стороны, выборка может включать продукцию или наблюдения из нескольких источников (административных областей, заводов, машин и операторов). Также может присутствовать слишком большая локальная изменчивость, что не позволит принять адекватные решения о смещении общего среднего. Поэтому данные, полученные из нескольких источников, следует обрабатывать осторожно, поскольку все особенности отдельных источников данных могут быть пропущены. Кроме того, изменчивость между источниками данных может быть замаскирована изменениями, происходящими во всей системе во времени.

Одним из важных предположений в CUSUM-процедуре является то, что стандартное отклонение процесса σ предполагается постоянным. Поэтому, прежде чем применять CUSUM-процедуру, процесс должен быть исследован на наличие статистической управляемости (с помощью *R*-карты, *s*-карты или карты скользящих размахов), а затем определяют оценку σ.

Может также проявиться последовательная корреляция между наблюдениями, когда одно наблюдение оказывает влияние на следующее. Примером отрицательной последовательной корреляции являются последовательные значения массы использованного сыпучего материала, когда нивелируются

ошибки предыдущего и последующего исследований. Другим примером является ситуация, когда превышение заказа в одном месяце компенсирует недостаточный заказ в следующем месяце. Появление положительной корреляции возможно в некоторых производственных процессах, когда одна партия материала частично смешивается с предыдущей и последующей партиями.

7.3 Результативность правил принятия решения

7.3.1 Основные понятия

Идеальное выполнение правила принятия решения состоит в том, чтобы реальные изменения не менее чем на заданную величину были обнаружены, а процесс без таких изменений мог работать неопределенно долго без ложных сигналов. В действительности это недостижимо. Простым и удобным показателем результативности правила принятия решений является средняя длина серии (ARL).

ARL представляет собой математическое ожидание количества выборок, необходимого для принятия решения о наличии изменений.

Если реальные изменения отсутствуют, идеальное значение ARL равно бесконечности. Практическая цель в такой ситуации состоит в том, чтобы сделать ARL большим. Наоборот, при наличии реального изменения идеальное значение ARL равно 1, когда изменение обнаружено при отборе следующей выборки. Выбор ARL — компромисс между этими двумя требованиями. Принятие ошибочного решения действовать, когда процесс не изменился, приводит к «сверх-управлению» и еще большему увеличению изменчивости. Принятие соответствующих мер, когда процесс изменился, способствует обеспечению стабильности процесса. В действительности это тоже увеличивает изменчивость процесса и приводит к увеличению стоимости производства.

Значение ARL также подвержено изменчивости. Иногда ложный сигнал может быть получен после большой серии данных или изменение обнаружено очень быстро. В некоторых случаях неудачный отбор выборок может вызвать появление ложных сигналов или так замаскировать реальное изменение, что оно не приведет к появлению сигнала. Время от времени фактическую изменчивость ARL необходимо исследовать. Однако, в целом, ARL рассматривают как разумный показатель результативности правила принятия решений. Выводы приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Состояния процесса и значения ARL

Истинное состояние процесса	Требуемый CUSUM	Идеальное значение ARL
Уровень процесса равен целевому значению или близок к нему	Значение ARL достаточно велико (мало ложных сигналов)	Бесконечность
Существенное отклонение уровня процесса от целевого значения	Значение ARL мало (быстрое обнаружение изменений)	1

7.3.2 Пример вычисления ARL

Понятие ARL не определено по отношению к CUSUM. Например, стандартная контрольная карта Шухарта устанавливает контрольные границы на уровне ±3-х стандартных отклонений от центральной линии. Известно, что приблизительно 0,135 % наблюдений в среднем попадает вне каждой из границ, если среднее процесса находится на центральной линии или на целевом значении. На основе этого можно легко подсчитать ARL: 1/0,00135 = 741. Другими словами, в среднем, выше верхней контрольной границы попадает одно из 741 наблюдения.

Следовательно, для практических целей необходимо разработать систему контроля, обеспечивающую высокое значение ARL, когда уровень процесса совпадает с целевым значением.

Если заданы две границы и среднее процесса совпадает с целевым значением, ARL делят на два, т. е. он равен 1/(0,00135 + 0,00135) = 370.

Если среднее процесса смещено на стандартное отклонение к верхней контрольной границе, то в среднем 2,28 % наблюдений находится выше верхней контрольной границы. Тогда ARL по отношению к UCL равно 1/0,0228 = 44 для этой односторонней границы. Другими словами, в среднем потребуется приблизительно 44 интервала наблюдений, чтобы выявить сдвиг среднего на одно стандартное отклонение.

При наличии двух границ предполагают, что ниже LCL находится только 0,0032 % наблюдений, поскольку значение, равное среднему процесса минус четыре стандартных отклонения, находится достаточно далеко от LCL. Так как 1/(0,000032 + 0,0228) существенно не влияет на значение ARL, вычисленное для единственной контрольной границы и сдвига среднего процесса на одно стандартное отклонение, ARL в случае двух контрольных границ приблизительно такое же, как и в случае одной контрольной границы, а именно, 44.

Выводы:

- если среднее процесса равно целевому значению, то в случае двух контрольных границ значение ARL равно половине ARL для одной контрольной границы;

- при сдвиге среднего вверх в случае двух контрольных границ значение ARL равно ARL для одной контрольной границы.

На практике часто применяют дополнительно предупреждающие границы выше и ниже среднего процесса, которые защищают от слишком быстрого обнаружения сдвига среднего процесса, за счет увеличения количества ложных сигналов, когда среднее процесса равно целевому значению. Карта Шухарта очень привлекательна и популярна из-за ее простоты и эффективности обнаружения отдельных специальных причин, вызывающих большие сдвиги среднего процесса.

Однако общеизвестно, что контрольная карта Шухарта дает мало сигналов при небольших сдвигах среднего, даже если они сохраняются. Это указывает на другой метод более быстрого обнаружения сдвига среднего при высоких значениях ARL, когда среднее процесса находится рядом с целевым значением. Для этого хорошо подходит CUSUM-метод.

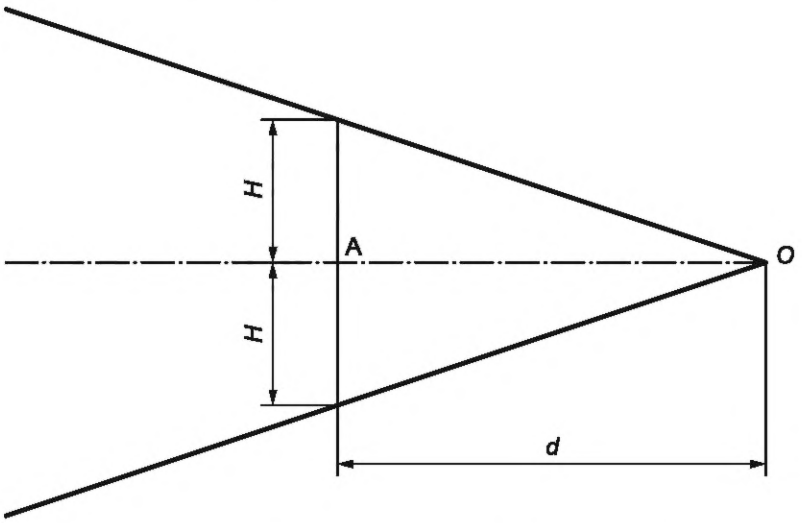
8 Типы решений по CUSUM-карте

8.1 V-маска

Построение графика суммы отклонений от целевого значения *T* и применение V-маски представляет собой один из способов построения CUSUM-карты.

8.1.1 Конфигурация и размеры

V-маска показана на рисунке 2. Вершина O расположена на расстоянии *d* от последнего значения кумулятивной суммы, которое расположено в точке A. Затем полную V-маску устанавливают либо путем задания расстояния *H* (например, $H = 5\sigma_e$) до разрешающих линий, либо путем задания угла между горизонтальной линией и верхней линией.



A — последнее значение кумулятивной суммы; *H* — интервал решений; *d* — расстояние от вершины до последнего значения кумулятивной суммы; *O* — вершина V-маски

Рисунок 2 — Форма и параметры V-маски

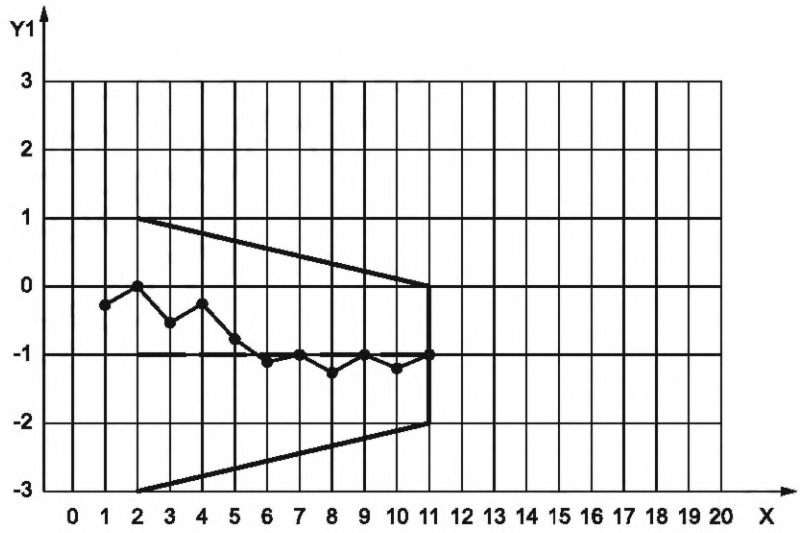
8.1.2 Применение V-маски

Для использования маски на линии, расположенной горизонтально на CUSUM-карте, указывают точку *A* (см. рисунок 2). В ситуации продолжающегося управления процессом это самая последняя точка.

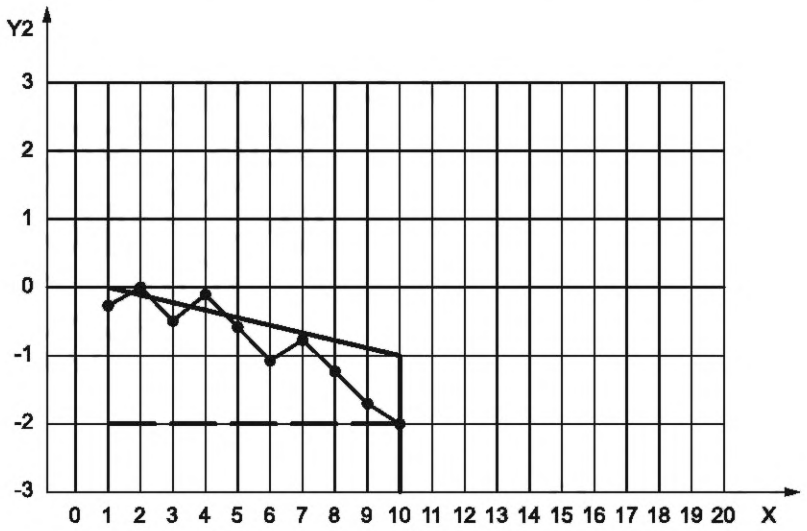
Если CUSUM-график находится внутри разрешающих линий маски (или их продления), то существенный сдвиг в среднем на этом графике не выявлен. В этом случае процесс находится в состоянии статистической управляемости относительно целевого значения. Если график изменения CUSUM выходит за разрешающие линии маски, это указывает на существенное отклонение от целевого значения. В этом случае процесс является неуправляемым.

На рисунке 3 показаны CUSUM-графики процесса в состоянии статистической управляемости, когда существенные отклонения от целевого значения не выявлены, и двух нестабильных процессов, когда имеются существенные увеличение и уменьшение значений контролируемой характеристики. Во всех случаях на рисунке 3 использовано стандартное отклонение, равное 0,2. Целевое значение, используемое при построении CUSUM-карты, равно целевому среднему процесса.

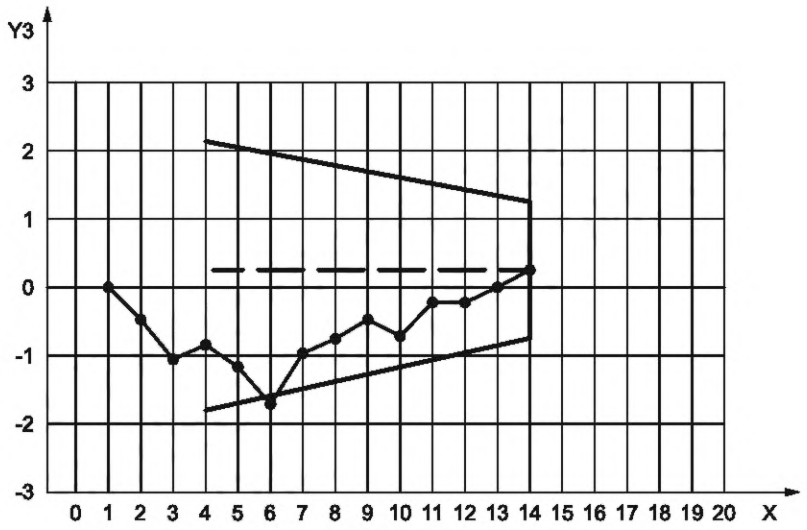
Текущую ситуацию определяют наложением V-маски на CUSUM-карту по мере накопления данных.



a) Отсутствие существенных изменений среднего процесса по отношению к целевому значению



b) Существенное уменьшение среднего процесса по отношению к целевому значению



c) Существенное увеличение среднего процесса по отношению к целевому значению

X — номер наблюдения; Y1 — кумулятивная сумма 1; Y2 — кумулятивная сумма 2; Y3 — кумулятивная сумма 3

Рисунок 3 — Примеры использования V-маски для обнаружения существенного изменения среднего процесса

Хотя рисунок 3 a) показывает, что среднее процесса меньше целевого значения, V-маска еще не регистрирует это изменение как существенное отклонение.

По рисунку 3 b) видно, что среднее процесса значительно меньше целевого значения. В то время как существенное отклонение не обнаружено до десятого наблюдения, с визуальной точки зрения среднее процесса имеет тенденцию снижения с первого наблюдения. Отмечая наклон линии наблюдений, можно определить оценку фактического среднего процесса. Это обеспечивает возможность необходимой корректировки для возвращения процесса к его целевому значению и диагностику определения в точке наблюдения 1 причин, вызвавших стойкое снижение уровня процесса.

Из рисунка 3 c) видно, что среднее процесса значительно больше целевого значения. Это отклонение не зарегистрировано как существенное отклонение среднего до наблюдения 14. Можно заметить, что уровень процесса был ниже целевого значения до наблюдения 6, но этого было недостаточно для появления сигнала о нестабильности процесса. Затем в точке наблюдения 6 уровень процесса изменился на более высокий по отношению к целевому значению. Измерение наклона CUSUM-линии до и после наблюдения 6 позволяет корректировать процесс и выявить причины изменений процесса.

При наличии только верхней или только нижней границ допустимых значений применяют односторонний контроль. В этом случае может быть использована полумаска. При контроле сдвига вверх/вниз необходима лишь соответствующая половина маски. Однако все же предпочтительно использовать маску целиком для получения большего количества информации. Все сдвиги в другом направлении могут быть проигнорированы.

8.1.3 Средняя длина серии

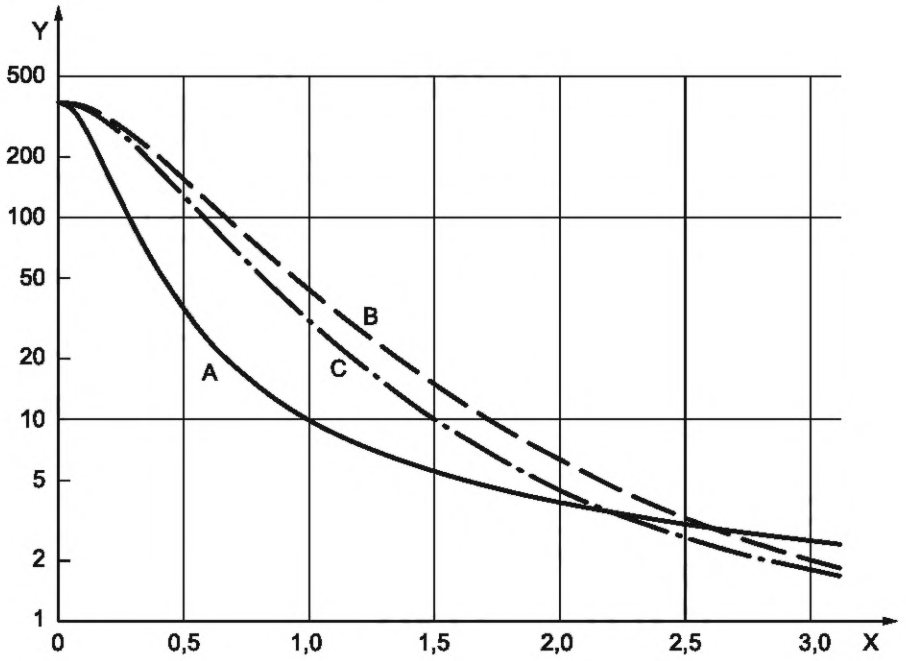
Свойства средней длины серии (ARL) для V-маски, представленной на рисунке 4, приведены в таблице 3 в единицах, кратных стандартному отклонению или стандартной ошибке контролируемой характеристики. Значение ARL приведены для CUSUM-карты и карт Шухарта с двумя правилами принятия решений.

Правила принятия решений:

- правило 1: если точка оказывается за границами ±3 стандартных отклонения от центральной линии, а именно за границами действия или контрольными границами, принимают решение о наличии отклонения среднего процесса от целевого значения — это общее предупреждающее правило Шухарта;
- правило 2: если последовательные точки оказываются за границами ±2 стандартных отклонения контролируемой переменной от центральной линии, а именно за границами предупреждения, принимают решение об отклонении среднего процесса — это очень простое правило, которое улучшает результативность обнаружения при небольших сдвигах.

Примечание 1 — Предполагается, что контролируемая переменная подчиняется нормальному распределению со стандартным отклонением σ.

Примечание 2 — Для стандартной CUSUM-карты высота интервала решений *h равна* 4,77, а угловой коэффициент разрешающей линии *f* равен 0,5. Карта Шухарта относится только к правилу 1. Карту Шухарта с правилом 2 для двух серий применяют в комбинации правил 1 и 2. Для последней комбинации значения 2 (предупреждение) и 3 (действие) увеличивают в 1,03 раза для достижения значения 370,4.



X — сдвиг (в единицах, кратных стандартному отклонению); Y — ARL для обнаружения сдвига среднего процесса; A — CUSUM (сплошная линия); B — карта Шухарта (пунктирная линия); C — карта Шухарта с правилом 2 для двух серий (штрихпунктирная линия)

Рисунок 4 — Средняя длина серии для обнаружения сдвига среднего процесса от целевого значения для CUSUM-карты и стандартных контрольных карт Шухарта

Таблица 3 — Средняя длина серии для обнаружения сдвига среднего процесса от целевого значения для CUSUM-карты (f = 0,5, h = 4,77) и двух видов стандартных контрольных карт Шухарта

Сдвиг среднего процесса от целевого значения (в единицах σ_e)	Средняя длина серии		
	CUSUM	Контрольная карта Шухарта	Контрольная карта Шухарта с правилом 2 для двух серий
0,0	370,4	370,4	370,4
0,2	163,6	308,4	292,7
0,4	54,5	200,1	172,1
0,6	24,6	119,7	94,3
0,8	14,4	71,6	30,7
1,0	9,9	43,9	30,7
1,2	7,5	27,8	18,9
1,4	6,1	18,2	12,2
1,6	5,1	12,4	8,3
1,8	4,4	8,7	6,0
2,0	3,9	6,3	4,5
2,2	3,5	4,7	3,5
2,4	3,1	3,6	2,8

Окончание таблицы 3

Сдвиг среднего процесса от целевого значения (в единицах σ_e)	Средняя длина серии		
	CUSUM	Контрольная карта Шухарта	Контрольная карта Шухарта с правилом 2 для двух серий
2,6	2,9	2,9	2,4
2,8	2,7	2,4	2,0
3,0	2,5	2,0	1,8

Значение ARL является индикатором результативности метода принятия решений:

- чем больше значение ARL для целевого значения, тем ниже вероятность ложных сигналов;
- чем меньше ARL при выявлении отклонения среднего от его целевого значения, тем быстрее обнаруживаются изменения процесса.

В соответствии с рисунком 4 и таблицей 3 можно сделать следующие выводы:

a) Для сдвигов среднего процесса менее $2\sigma_e$ ARL CUSUM-карты меньше, чем ARL любых других карт с наиболее быстрой реакцией на сдвиг процесса. Это особенно проявляется в области от $0{,}2\sigma_e$ до $1{,}6\sigma_e$.

b) Для сдвигов среднего процесса более $2\sigma_e$ карта Шухарта с правилами принятия решений быстрее реагирует на сдвиг процесса, чем CUSUM-карта. Для сдвига среднего процесса более $2{,}6\sigma_e$ карта Шухарта быстрее реагирует на сдвиг процесса, чем CUSUM-карта.

8.1.4 Общие комментарии к ARL

Во-первых, размеры V-маски разработаны для обнаружения сдвигов процесса в области не более одной стандартной ошибки ($1\sigma_e$). При контроле других сдвигов используют другие значения *h* и *f*. Во-вторых, на устойчивость ARL влияет большое количество факторов. К ним относятся форма предполагаемой модели изменчивости, значение σ_e и независимость наблюдаемых характеристик. Значения ARL, приведенные в таблице 3 и на рисунке 4, основаны на трех предположениях:

a) наблюдения подчиняются нормальному распределению;

b) стандартное отклонение известно точно;

c) последовательные наблюдения статистически независимы.

Нормальное распределение симметрично. Асимметрия с более длинным хвостом в направлении возможного сдвига при одной контрольной границе приводит к уменьшению ARL и имеет слабое влияние на значение ARL при больших сдвигах среднего. Наоборот, при асимметрии с более коротким хвостом в направлении возможного сдвига значение ARL значительно возрастает со слабым влиянием на значение ARL при больших сдвигах среднего.

Стандартное отклонение или стандартную ошибку, как правило, оценивают по тем же наблюдениям, которые используют для представления на CUSUM-карте. Ошибки 10 % и более весьма распространены в этом случае. Завышенная оценка σ_e увеличивает значение ARL, заниженная оценка уменьшает ARL. Это искажение ARL является самым явным для значений среднего процесса, равных целевому значению или близких к нему и имеет небольшое влияние при больших сдвигах. В таблице 4 показано искажение ARL для 10 %-ной ошибки оценки σ_e.

Таблица 4 — Пример влияния на ARL неправильной оценки стандартной ошибки σ_e

Сдвиг среднего процесса от целевого значения, единицы истинного σ_e	Средняя длина серии (ARL)		
	Оценка σ_e завышена на 10 %	Корректная оценка σ_e	Оценка σ_e занижена на 10 %
0,0	946,3	370,4	172,3
0,5	51,6	35,3	25,8
1,0	11,8	9,9	8,5
1,5	6,3	5,5	4,9
2,0	4,3	3,9	3,5

Положительная автокорреляция приводит к уменьшению значения ARL, а отрицательная — к его увеличению.

Необходимо отметить, что влияние трех упомянутых предположений характерно не только для CUSUM-карты, оно также относится и к другим методам построения карт.

8.2 CUSUM с быстрой начальной реакцией на сдвиг (FIR)

Метод CUSUM с быстрой начальной реакцией на сдвиг (FIR) предназначен для уменьшения ARL при раннем выявлении сдвигов среднего без существенного уменьшения ARL при сохранении среднего процесса на целевом значении. Это относится к сопоставлению критериев принятия решения. Таким образом, цель состоит в более быстрой реакции на сдвиги при сохранении уровня ложных сигналов.

Суммирование начинается с FIR, а не с нуля. Обычно это значение равно половине интервала решений $h/2$. Необходимо отметить, что концепцию FIR легче понять при использовании табличной формы CUSUM, описанной в 8.3.

Анализ FIR-схемы показывает, что она позволяет ускорить получение сигнала о сдвиге среднего. Однако при отсутствии сдвига процесса кумулятивная сумма убывает до нуля, так же как в случае обычной кумулятивной суммы (без FIR).

При использовании вместе с табличными схемами решений (см. 8.3), начальное значение часто применяют для верхней и нижней кумулятивных сумм.

8.3 CUSUM-таблицы

8.3.1 Обоснование

Иногда основной целью CUSUM-процедуры является лишь выявление нестандартных условий, а не обеспечение наглядного представления последовательных данных. В этом случае данные могут быть записаны в форме таблицы. Тогда вместо маски, используемой в стандартной CUSUM-карте, применяют численное правило.

Такие схемы называют табличным CUSUM.

V-маска обнаруживает изменения угла наклона кривой. Ее интервал решения $h\sigma_e$ учитывает степень рассеяния CUSUM-точек. Угловой коэффициент разрешающих линий маски соответствует среднему уровню процесса: целевое значение $\pm f\sigma_e$.

В табличной схеме вместо вычисления и графического представления кумулятивной суммы разности наблюдаемых и целевых значений ($x - T$), вычисляют и сводят в таблицу кумулятивную сумму следующих величин:

$x - (T + f\sigma_e)$

(при этом кумулятивной сумме присваивают значение 0, если она становится отрицательной для верхней CUSUM, чтобы обнаружить увеличение среднего).

$x - (T - f\sigma_e)$

(при этом кумулятивной сумме присваивают значение 0, если она становится положительной для нижней CUSUM, чтобы обнаружить уменьшение среднего).

Это дает: горизонтальные линии решений на уровне $\pm h\sigma_e$, вместо разрешающих линий с угловым коэффициентом $f\sigma_e$, выходящих из точки $h\sigma_e$ (V-маска).

Статистические решения совпадают с решениями по сопоставимой V-маске.

8.3.2 Выполнение

Для установки и интерпретации интервала решений двухсторонней CUSUM-схемы, если контролируемая характеристика подчиняется нормальному распределению, необходимо выполнить следующие действия:

Этап 1. Установление параметров CUSUM-карты:

a) интервала решений h;

b) углового коэффициента разрешающей линии f;

c) целевого значения T;

d) оценки стандартной ошибки наблюдаемой характеристики σ_e.

Этап 2. Вычисление CUSUM-критериев:

$(T + f\sigma_e)$ и $(T - f\sigma_e)$.

Этап 3. Подготовка CUSUM-таблицы для верхней табличной CUSUM по обнаружению увеличения среднего уровня. Таблица должна иметь следующие колонки:

e) номер наблюдения;

f) значение наблюдаемой характеристики x;

g) $x - (T + f\sigma_e)$;

h) кумулятивная сумма величины $[x - (T + f\sigma_e)]$.

Примечание — Эта таблица аналогична используемой для стандартного CUSUM-графика, за исключением того, что вместо $(T + f\sigma_e)$ используют значение T, а вместо $f\sigma_e$ используют угловой коэффициент эквивалентной разрешающей линии V-маски.

Этап 4. Подготовка CUSUM-таблицы для нижней табличной CUSUM, по выявлению уменьшения среднего. Таблица должна иметь колонки, аналогичные таблице этапа 3, кроме следующих:

i) $x - (T - f\sigma_e)$;

j) кумулятивная сумма величины $[x - (T - f\sigma_e)]$.

Этап 5. Ввод данных

k) Вводят данные и выполняют вычисления.

l) Для положительных значений CUSUM: Вычисляют и записывают значения CUSUM для $[x - (T + f\sigma_e)]$. Если CUSUM становится отрицательной в любой точке, ее обнуляют и продолжают до тех пор, пока CUSUM снова не станет положительной. Если CUSUM касается границы решения $h\sigma_e$ или превышает ее, фиксируют сдвиг вверх.

m) Для отрицательных значений CUSUM: Вычисляют и записывают значения CUSUM для $[x - (T - f\sigma_e)]$. Если CUSUM становится положительной в любой точке, ее обнуляют и продолжают до тех пор, пока CUSUM снова не станет отрицательной. Если CUSUM касается границы решения $h\sigma_e$ или опускается ниже, фиксируют сдвиг вниз.

Пример метода показан в таблице 5. Другой пример табличного метода приведен в приложении А.

Таблица 5 — Пример табличной CUSUM

Наблюдаемое значение x	$x - 11$	CUSUM (верхняя)	$x - 9$	CUSUM (нижняя)	Примечание
10	–1	0	+1	0	Обе суммы равны нулю, среднее процесса равно целевому значению
10	–1	0	+1	0	
10	–1	0	+1	0	
14	+3	+3	+5	0	Среднее процесса выше целевого значения, нижняя CUSUM равна нулю
14	+3	+6	+5	0	
3	–8	0	–6	–6	
3	–8	0	–6	–12[a]	[a] Сигнал уменьшения среднего
10	–1	0	+1	–11	
10	–1	0	+1	–10	
10	–1	0	+1	–9	
10	–1	0	+1	–8	
10	–1	0	+1	–7	
17	+6	+6	+8	0	
17	+6	+12[b]	+8	0	[b] Сигнал увеличения среднего

Примечание 1 — Целевое значение $T = 10$; $\sigma_e = 2$; $h = 5$; $f = 0{,}5$.

Примечание 2 — В колонке 2 следует записывать значения $x - (T + f\sigma_e) = x - (10 + 1) = x - 11$, где x — наблюдаемое значение.

Примечание 3 — В колонке 4 следует записывать значения $x - (T - f\sigma_e) = x - (10 - 1) = x - 9$, где x — наблюдаемое значение.

9 CUSUM-методы для управления процессом и контроля качества продукции

9.1 Причины изменений

9.1.1 Величина изменений

При разработке CUSUM-системы для контроля параметров процесса или характеристик продукции должен быть установлен размер сдвига или изменения параметра процесса или характеристики продукции, который важно обнаружить. Эта величина влияет на форму V-маски, которая может быть использована для выявления неконтролируемых состояний. На практике в качестве такого значения

часто выбирают наименьший сдвиг, при котором может быть проведена корректировка процесса. Однако следует учитывать, что назначение слишком малого сдвига может привести к появлению рысканья (см. 9.1.5).

Все изменения могут быть отнесены к одному из следующих типов: «шаговые», «дрейф» или «циклические».

9.1.2 Шаговые изменения

При шаговых изменениях данные об измерениях параметра процесса или характеристики продукции внезапно переходят на новый уровень. Примером является использование новой партии сырья, которое отличается от сырья, используемого ранее, или когда неопытный служащий, заменяя коллегу, делает больше ошибок, чем опытный служащий. В таких случаях CUSUM-карта идентифицирует это изменение, показывая существенный сдвиг среднего процесса.

9.1.3 Дрейф

Этот тип изменений часто связывают с износом оборудования, инструментов и т. п. CUSUM-график в этом случае выглядит как возрастающий или убывающий.

9.1.4 Циклические изменения

При наличии циклических изменений участок CUSUM-графика периодически повторяется. Например, это может произойти в организации, где имеется три рабочих смены, которые выполняют одни и те же задачи, но по-своему. При наличии циклических изменений повторяется некоторая последовательность сдвигов, например сдвиг В всегда следует за сдвигом А. На CUSUM-графике периоды возрастания чередуются с периодами убывания.

9.1.5 Рысканье

Рысканье (нерегулярные колебания) контролируемой характеристики происходят, когда параметр или характеристика не могут быть точно скорректированы и установлены на целевое значение, а после сигнала о потере стабильности процесса корректировка устанавливает значение параметра или характеристики, при котором знак отклонения от целевого значения меняется на противоположный. CUSUM-график меняет направление изменений на противоположное, затем появляется сигнал, требующий исправить сделанную корректировку и т. д.

Таким образом, на CUSUM-графике появляется «зигзагообразный» участок. Это самая неудовлетворительная ситуация. Ее можно избежать с помощью выбора исходного целевого значения и последующих минимальных корректировок (см. 9.3.1, этап 13 с) для устранения рысканья.

9.2 Выбор целевых значений

9.2.1 Общие положения

Правильный выбор целевого значения имеет главное значение при установке CUSUM-схемы.

Целевое значение между двух возможных значений может привести к рысканью (см. 9.1.5).

9.2.2 Стандартное заданное значение в качестве целевого значения

Самым простым выбором целевого значения является выбор в качестве целевого значения «заданного» или «установленного» значения. В этом случае целевое значение часто устанавливают равным некоторому указанному в требованиях значению, такому как номинальное значение или значение середины поля допуска. Эти значения установлены в документированных требованиях или на чертежах. Если CUSUM-метод применяют в непроизводственной сфере, целевое значение может быть некоторым уровнем выполнения, таким как среднее время обработки счетов или ежемесячные расходы подразделения организации.

Целевое значение может быть изменено. Например, при продаже мороженого целевое значение может изменяться в течение года. В среднем больше мороженого продают в течение летних месяцев. Таким образом, могут быть использованы различные целевые значения для каждого месяца. Использование постоянного целевого значения в течение всего года приводит к ложным выводам. Значение CUSUM в течение одного периода года повышается, затем убывает. Если целевые значения различны, то CUSUM лучше указывает существенные изменения уровня продаж мороженого.

Неудачно выбранное целевое значение может привести к появлению «рысканья», описанному в 9.1.5. Поэтому выбор целевого значения является важной задачей CUSUM-метода.

9.2.3 Функциональное целевое значение

Целевое значение может быть установлено на основе текущих уровней функционирования. Этот подход совместим с функциональными контрольными картами, когда средства управления установлены в соответствии с предыдущим состоянием параметра процесса или характеристики продукции.

Для контроля положения или разброса важно получить данные предварительного периода наблюдений или собранные данные. Такой период для анализа собственной изменчивости должен быть достаточно продолжительным. Как правило, предварительный период наблюдений должен обеспечить получение 25 точек на CUSUM-графике. По этим данным должны быть получены оценки среднего и стандартного отклонения.

Установленные целевые значения должны быть использованы для вычисления кумулятивных сумм, но спустя некоторое время может потребоваться изменение целевого значения, если CUSUM-карта указывает на изменение уровня процесса. Если невозможно выполнить соответствующую корректировку процесса или если новый уровень является приемлемым, то единственным, что может быть сделано, является изменение целевого значения. Это обычно делают после проверки того, что новый уровень соответствует следующим данным, и устанавливают его в качестве целевого значения. Далее CUSUM-метод контролирует параметр или характеристику относительно нового целевого значения.

9.3 CUSUM-схемы для контроля положения

9.3.1 Стандартная схема

Последовательность этапов выполнения стандартной CUSUM-схемы приведена на рисунке 5.

Этап 1. Определение объекта для построения CUSUM-карты.

Определение контролируемых параметра процесса или характеристики продукции.

Примечание — Это могут быть ключевой параметр процесса, значимая характеристика продукции, они могут быть установлены потребителем. Объект может быть также идентифицирован при выборе контролируемых параметра процесса или характеристики продукции.

Этап 2. Определение объема подгруппы

Определение рациональной подгруппы для CUSUM-карты идентично аналогичному процессу при разработке любой карты Шухарта.

Если параметр процесса является выбранным объектом, то самым подходящим объемом подгруппы является объем, равный единице. Это вызвано тем, что параметры, например температура или давление в транспортном средстве, изменяются в течение достаточно продолжительного времени. Выполнение нескольких последовательных повторных измерений вряд ли покажет какие-либо различия. Это приводит к техническим проблемам с определением стандартного отклонения и корректной установкой CUSUM-маски.

Если данные действительно единичны, такие как показатель за месяц, то размер рациональной подгруппы будет таким же.

Для характеристики продукции часто объем рациональной подгруппы больше единицы и равен обычно пяти. В соответствии со здравым смыслом, выбранный объем подгруппы позволяет представить случайную изменчивость процесса.

Этап 3. Выбор CUSUM-схемы

В таблице 6 приведен набор стандартных схем, охватывающих весь диапазон типичных требований для CUSUM-схемы. В таблице приведены две основные схемы, схема CS1 с достаточно высоким значением ARL при нулевом сдвиге, и с более низким значением ARL — схема CS2. Другими словами, схема CS2 обнаруживает сдвиг уровня процесса быстрее, чем схема CS1, но за счет большего количества «ложных сигналов». При выборе схемы необходимо определить, какой сценарий более важен. В таблице 7 показаны различия этих стандартных схем (значения ARL приведены для верхней CUSUM).

Как только выбрана CUSUM-схема (CS1 или CS2), необходимо установить размер значимого сдвига. В таблице 7 приведены три типичных значения значимого сдвига (значения ARL приведены для односторонней CUSUM). В зависимости от выбранного значения сдвига значения h и f могут быть определены по таблице.

Если неясно, какую схему необходимо выбрать, практика показывает, что хорошей начальной схемой является схема CS1 ii), т. е. $h = 5{,}0$ и $f = 0{,}50$.

Независимо от того, какая схема выбрана, значения параметров должны быть умножены на σ (или σ_e) для определения фактических размеров и формы маски. Это установлено на этапе 8.

Этап 4. Сбор данных за предварительный период наблюдений

Как указано в 9.2.3, должны быть собраны данные, характеризующие изменчивость процесса, необходимые для построения CUSUM-схемы и установления целевого значения при необходимости.

Определяют период, в течение которого все источники изменчивости процесса проявлены. Этот период должен быть достаточно продолжительным или частота отбора выборки достаточно высокой для получения не менее 25 подгрупп данных.

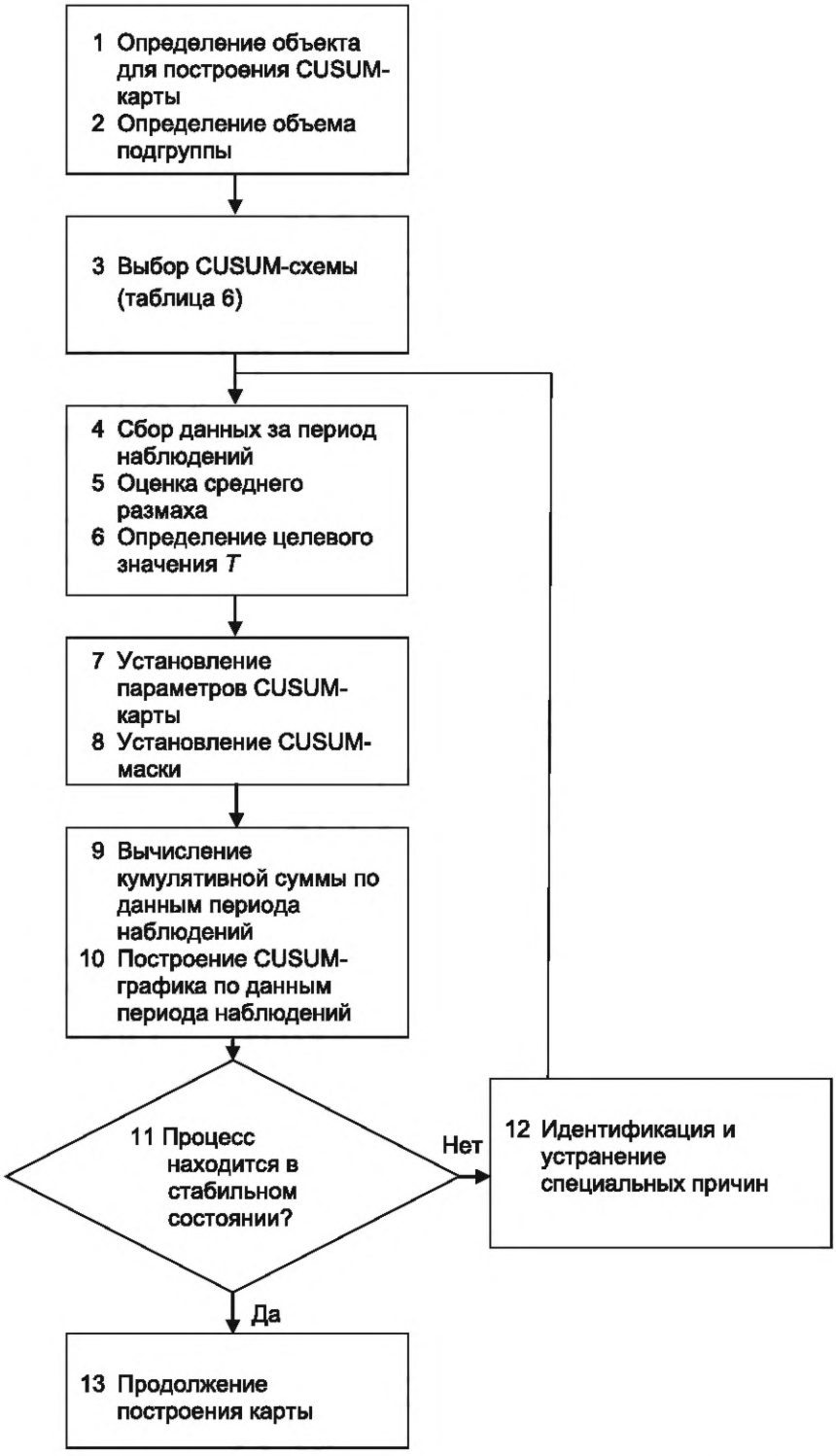


Рисунок 5 — Последовательность выполнения этапов стандартной CUSUM-схемы

Таблица 6 — Стандартные CUSUM-схемы для среднего подгруппы

Значимый сдвиг среднего, который должен быть обнаружен[a]	Схема CS1		Схема CS2	
	h	*f*	*h*	*f*
i) < $0{,}75\sigma_e$	8,0	0,25	5,0	0,25
ii) от 0,75 до $1{,}50\sigma_e$	5,0	0,50	3,5	0,50
iii) > $1{,}50\sigma_e$	2,5	1,00	1,8	1,00
Примечание 1 — Схеме CS1 соответствует средняя длина серии ARL_0 в интервале 700—1000, когда фактический сдвиг равен нулю. Примечание 2 — Схеме CS2 соответствует средняя длина серии ARL_0 в интервале 140—200, когда фактический сдвиг равен нулю.				
[a] Для отдельных результатов (размер подгруппы = 1) σ_e представляет собой стандартное отклонение. Если объем подгруппы больше единицы, σ_e представляет собой стандартную ошибку среднего.				

Таблица 7 — Сопоставление стандартных CUSUM-схем для среднего подгруппы

Отклонение среднего от целевого значения (в единицах σ_e)	Схема CS1			Схема CS2		
	(i)	(ii)	(iii)	(i)	(ii)	(iii)
0,00	737,0	931,0	716,0	142,0	200,0	172,0
0,75	16,4	17,0	27,3	10,4	11,5	15,3
1,00	11,4	10,4	13,4	7,4	7,4	8,8
1,50	7,1	5,7	5,4	4,7	4,2	4,1
Примечание — Значение ARL является заданным. Следует помнить, что фактическое значение ARL для обнаружения фактического сдвига может быть больше или меньше ARL. При необходимости следует исследовать распределение значений ARL для определенных отклонений среднего от целевого значения, чтобы знать средний диапазон значений ARL, которые могут быть рассмотрены.						
[a] Для отдельных наблюдений (объем подгруппы = 1) σ_e представляет собой стандартное отклонение. Если объем подгруппы больше единицы, σ_e представляет собой стандартную ошибку среднего.						

Не следует вводить дополнительные источники изменчивости процесса, например, регулировки процесса в течение этого периода, поскольку это исказит данные об изменчивости процесса. Если есть необходимость в прерывании сбора данных, должно быть принято решение о необходимости повторения наблюдений или о достаточности полученных данных. Если количество подгрупп было 20 или более, и если все возможные источники изменчивости процесса воздействовали в процессе сбора данных, то это количество подгрупп является достаточным и предварительный период сбора данных может быть завершен. Данные, собранные в предварительный период, должны быть использованы для установления уровня изменчивости по CUSUM-схеме. Это установлено на этапах 5 и 6.

Этап 5. Оценка σ_e по данным предварительного периода наблюдений

a) Общие положения

Ниже описан метод определения оценки σ_e. В некоторых случаях может возникнуть необходимость применения другого подхода. Этот другой подход может потребовать определения оценки стандартного отклонения средних подгрупп.

b) Объем подгрупп больше единицы ($n > 1$)

i. Вычисляют размах (разность наибольшего и наименьшего наблюдений) в каждой подгруппе.

ii. Вычисляют среднее арифметическое размаха (средний размах) ($\overline{R}$) по подгруппам.

iii. Определяют оценку стандартного отклонения в подгруппе (σ_0), делением среднего размаха на соответствующее значение d_2, приведенное в таблице 8.

iv. Определяют σ_e, делением σ_0 на квадратный корень из объема подгруппы, т. е. $\sigma_e = \sigma_0 / \sqrt{n}$.

Вместо размаха подгруппы может быть определено выборочное стандартное отклонение подгруппы (s). В этом случае вместо $\overline{R}$ и σ_0 определяют среднее стандартное отклонение подгрупп $\overline{s}$ и оценку $\overline{s}/c_4$. Значения c_4 приведены в таблице 15.

Таблица 8 — Значение коэффициента d_2 для оценки стандартного отклонения подгрупп по размаху подгруппы

Объем подгруппы n[a]	d_2
2	1,128
3	1,693
4	2,059
5	2,326
6	2,534
7	2,704
8	2,847
9	2,970
10	3,078
Примечание — Для подгрупп, объем которых больше 10 при определении оценки стандартного отклонения подгруппы, могут быть более эффективны другие методы.	
[a] Значения d_2 для $n > 10$ приведены в ИСО 7870-2, а также в других источниках.	

c) Объем подгруппы $n = 1$

Для определения оценки σ_e должен быть использован метод последовательных разностей (иногда называемый скользящим размахом).

Данные, собранные за предварительный период, должны быть использованы в той последовательности, в которой они были собраны. Должны быть вычислены размах (разность) между первым и вторым наблюдениями, затем размах между вторым и третьим наблюдениями, и т. д. Если имеется m подгрупп, должны быть получены значения $(m - 1)$-го размаха. Вычисляют средний размах ($\overline{R}$).

Оценку σ_e определяют делением среднего размаха на 1,128.

Этап 6. Определение целевого значения T

В соответствии с 9.2 в качестве целевого значения может быть использовано заданное значение или значение, определенное на основе данных наблюдений.

a) Заданное значение

Целевое значение является установленным значением. Целевое значение может быть выбрано на основе установленных требований, чертежа и является номинальным размером или значением характеристики продукции или некоторым средним уровнем параметра управления в случае непроизводственного процесса.

b) Значение, выбранное на основе наблюдений

Целевое значение определяют по данным, полученным за предварительный период наблюдений.

i. Вычисляют выборочное среднее ($\overline{x}$) для каждой подгруппы.

ii. Вычисляют общее среднее ($\overline{\overline{x}}$) средних подгрупп.

iii. Выбирают $\overline{\overline{x}}$ в качестве целевого значения T.

Этап 7. Установление параметров CUSUM-карты

a) Общие положения

Рекомендации по установлению параметров CUSUM-карт приведены в разделе 5.

b) CUSUM-таблица

Устанавливают подходящую CUSUM-таблицу для записи результатов вычислений. Часть такой таблицы приведена в таблице 9.

Таблица 9 — Таблица CUSUM-вычислений

Номер подгруппы	x	$\overline{x} - T$	Значение кумулятивной суммы C
и т. д.			

Если объем подгруппы равен единице, в таблице $\bar{x}$ заменяют на x.

c) CUSUM-бумага

Выбирают бумагу с удобными интервалами между линиями сетки. Выбор зависит от предполагаемого использования бумаги, например, для вывешивания на стену.

Выбирают подходящий масштаб. Масштаб зависит от расположения графика. Например, для графиков, предназначенных для вывешивания на стену, интервал на горизонтальной оси может быть 10 мм, тогда как для графика, предназначенного для использования на столе, достаточно интервала 5 мм.

Подходящий интервал для оси кумулятивной суммы выбирают таким же, как интервал для горизонтальной оси, приблизительно равным $2\sigma_e$, с округлением. Такой масштаб вряд ли «сгладит» существенные изменения или преувеличит незначительные.

Отмечают центральную точку 0 на CUSUM-оси и проводят полужирную горизонтальную линию через эту точку. Размечают вертикальную ось CUSUM в соответствии с масштабом.

Пример такой бумаги показан на рисунке 6.

Этап 8. Установление CUSUM-маски

В 8.1.1 описаны параметры стандартной CUSUM-маски, а на рисунке 2 показаны элементы маски и необходимый масштаб.

Значения h, f и σ_e должны быть определены в соответствии с настоящим подразделом.

a) Вычисляют $H = h\,\sigma_e$.

b) Вычисляют $F = f\,\sigma_e$.

Примечание — Существуют компьютерные программы, которые выводят на экран CUSUM-график с маской.

Этап 9. Вычисление кумулятивной суммы по данным предварительного периода наблюдений

Используя целевое значение, определенное на этапе 6, и таблицу, аналогичную представленной в таблице 9, вычисляют значения кумулятивной суммы по данным предварительного периода наблюдений.

Этап 10. CUSUM-график по данным предварительного периода наблюдений

Представленные в таблице значения кумулятивной суммы должны быть изображены на бумаге, аналогичной представленной на рисунке 6. График начинается слева и продолжается вправо. Соединяют все изображенные точки, это делает все тенденции более наглядными.

Этап 11. Анализ CUSUM-графика по данным предварительного периода наблюдений

Накладывают маску на CUSUM-график.

Это делают определяя положение точки отсчета, указанной на рисунке 3 a) по последней точке кумулятивной суммы. При этом необходимо совмещать центральную линию маски с нулевой осью на бумаге. Это гарантирует, что маска правильно ориентирована.

Любая точка, выходящая за разрешающие линии маски, указывает на выход процесса из стабильного состояния, даже если такая точка не последняя и даже если следующие точки возвращаются в пределы разрешающих линий маски (см. рисунок 3 b).

Этап 12. Идентификация и устранение специальных причин

a) Общие положения

Важно проанализировать все точки за пределами разрешающих линий на CUSUM-карте и идентифицировать соответствующую им специальную причину.

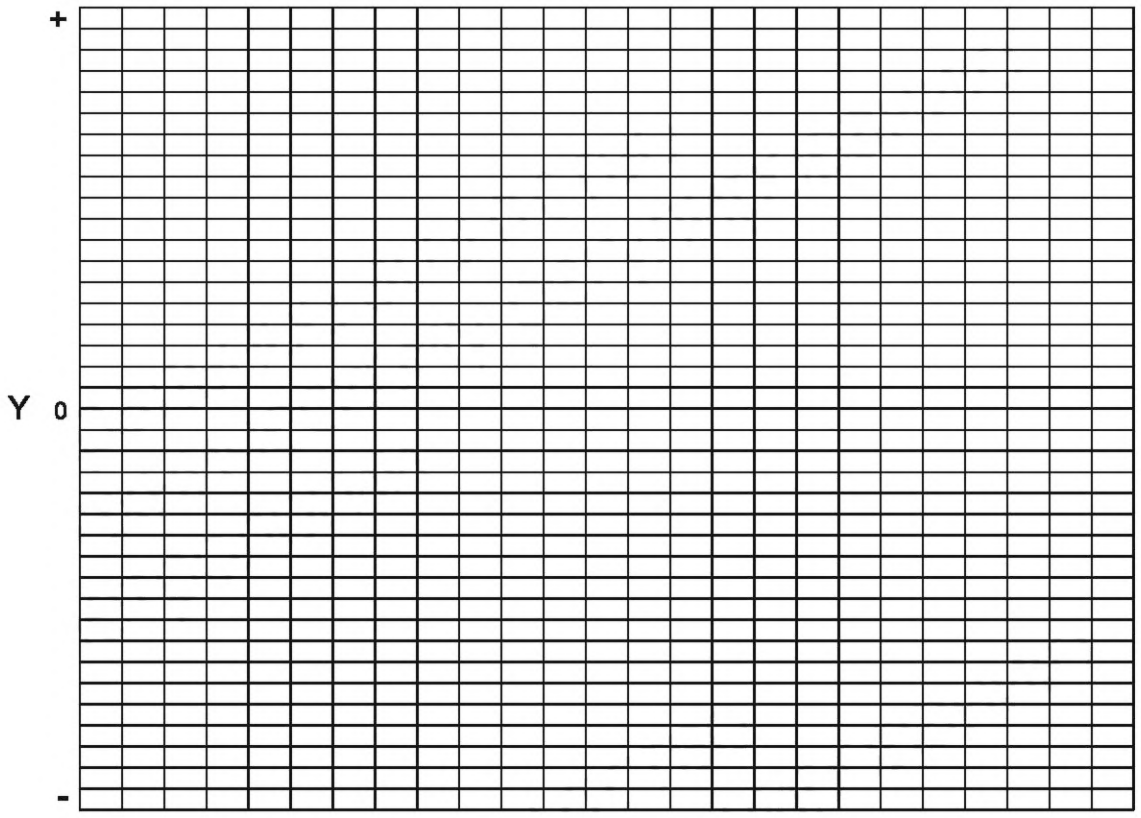
b) Идентификация и предотвращение возникновения специальных причин

Как только идентифицирована специальная причина и предприняты действия по ее предотвращению в будущем, необходимо рассмотреть и изменить, при необходимости, целевое значение и стандартную ошибку (или стандартное отклонение). Если имеется только одна несоответствующая точка и причина была удовлетворительно устранена, то установленные целевое значение и стандартная ошибка или стандартное отклонение могут быть изменены на основе данных предварительного периода наблюдений, а не данных неконтролируемой подгруппы. Необходимо заново определить масштаб CUSUM-бумаги и размерности маски и повторно начертить маску.

Если имеется несколько неконтролируемых точек в данных предварительного периода наблюдений, это указывает на большее количество проблем процесса. В таком случае рекомендуется проанализировать процесс, внести корректировки и затем провести предварительный период наблюдений и собрать новые данные.

c) Идентификация специальных причин без предотвращения их повторного возникновения

Бывают ситуации, когда невозможно предотвратить появление специальных причин в будущем в силу экономных или технических соображений.



Y — значение кумулятивной суммы

Рисунок 6 — Пример CUSUM-бумаги

В этом случае CUSUM-параметры, основанные на всех данных предварительного периода наблюдений, используют для контроля. Другими словами, эти специальные причины рассматривают как часть случайной изменчивости процесса.

d) Невозможность выявления специальных причин

Некоторые специальные причины могут остаться не идентифицированными. Это отрицательный результат, поскольку он препятствует улучшению процесса. Необходимо приложить все усилия для выявления специальных причин, в том числе использовать другие методы и решения проблемы. Одним из наиболее мощных методов является метод статистического планирования экспериментов.

Если специальные причины остаются не выявленными, необходимо выполнить действия в соответствии с перечислением c).

Этап 13. Продолжение построения карты

a) Общие положения

Если данные предварительного периода наблюдений соответствуют стабильному состоянию процесса или новые данные собраны после удовлетворительного сокращения специальных причин, CUSUM-карта готова к продолжению контроля параметра процесса или характеристики продукции. Масштабированную бумагу и параметры маски теперь используют для контроля данных будущих подгрупп.

Если появляется неконтролируемая точка, необходимо решить, что делать с процессом. Действия могут включать регулировку процесса, принятие нового целевого значения, если процесс переместился в более желательное положение.

9.3.2 Стандартные схемы. Ограничения

Основные CUSUM-схемы, установленные в 9.3.1, обеспечивают хорошее начало работы и во многих случаях не требуют дальнейших изменений. В некоторых случаях можно заметить по истечении некоторого времени, что основная выбранная схема должна быть улучшена потому, что значение ARL для обнаружения значимого сдвига слишком велико или потому, что частота «ложных сигналов» слишком высока.

9.3.3 Специальные CUSUM-схемы

Разработка конкретной CUSUM-схемы требует бóльших знаний и исходных данных, чем требуют основные схемы, установленные в 9.3.1. В этом случае для решения следующих задач необходима консультация со специалистом.

a) Определение (значимого) размера отклонения от целевого значения, которое должно быть обнаружено (δ).

b) Определение оценки стандартной ошибки σ_e (или стандартного отклонения, если объем подгруппы равен единице), как установлено выше.

c) Определение исходной ARL, если сдвиг имеет величину, указанную в 9.3.1, этап 3, ARL_δ.

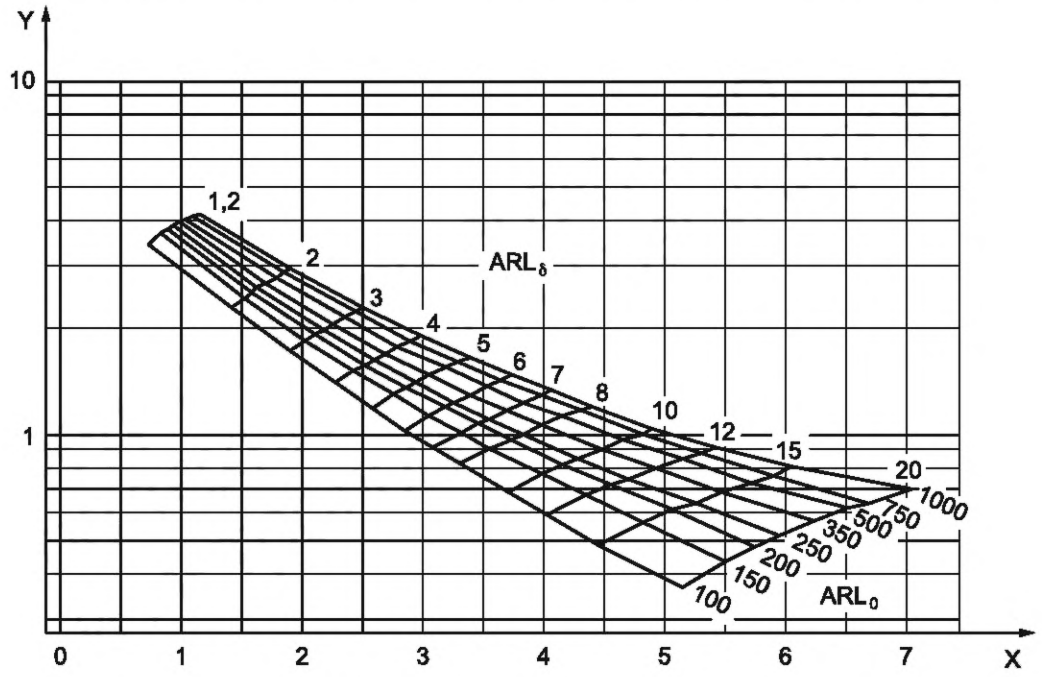
d) Определение исходной ARL, если сдвиг равен нулю, т. е. частота «ложных сигналов» равна ARL_0.

e) Вычисление стандартного сдвига $\Delta = \delta/\sigma_e$.

f) Нанесение данных на карту, представленную на рисунке 7, и определение *h* по расчетному значению Δ с учетом значений ARL_δ и ARL_0. Рекомендуется найти соответствующие компьютерные программы (многие коммерческие и бесплатные пакеты программ предлагают простые функции для определения *h* и ARL_δ для заданных Δ и ARL_0).

g) Значение для *f* также может быть определено по графику, соответствующему расчетному значению Δ.

h) Изменение CUSUM-маски в соответствии с новыми значениями *h* и *f* в соответствии с изложенным.



X — стандартизованный интервал решений *h*; Y — стандартизованная разность Δ

Рисунок 7 — Номограмма для определения параметров V-маски (для нормального распределения)

9.4 CUSUM-схемы для контроля изменчивости

9.4.1 Общие положения

Кроме контроля положения процесса важно контролировать его изменчивость, изменения которой в большинстве случаев являются краткосрочными.

Двумя наиболее подходящими показателями изменчивости являются размах и стандартное отклонение в пределах подгруппы. Выбор показателя зависит от легкости вычислений и уровня понимания персоналом выполняемых вычислений. Часто при работе с контрольными картами для обеспечения простоты вычислений выбирают карты размаха, а объем подгруппы часто выбирают равным пяти. По результативности использование размаха и стандартного отклонения практически неразличимы.

Если объем подгруппы равен единице, используемым показателем изменчивости должен быть размах, представляющий собой разность последовательных результатов наблюдений.

9.4.2 CUSUM-схемы для размахов

Для установления подходящей схемы контроля изменчивости процесса на основе размаха в пределах подгруппы необходимо выполнить следующие действия. Некоторые из этапов действий завершаются, если выполнена CUSUM-схема контроля среднего.

Этап 1. Определение объекта для построения CUSUM-карты

См. 9.3.1, этап 1.

Этап 2. Определение объема подгруппы

См. 9.3.1, этап 2.

Этап 3. Выбор CUSUM-схемы для размаха

В таблице 10 установлены стандартные схемы, которые обеспечивают выполнение типовых требований к CUSUM-карте размаха. В соответствии с 9.3.1 в таблице приведены две основные схемы: CS1, которой соответствуют бóльшие значения ARL на ожидаемом уровне изменчивости, и CS2, которой соответствуют меньшие значения ARL. Схема CS2 обнаруживает сдвиг уровня процесса быстрее, чем соответствующая схема CS1, но за счет большего количества «ложных сигналов». В таблице 11 приведены различия этих стандартных схем.

Таблица 10 — Стандартные CUSUM-схемы для размаха подгруппы

Объем подгруппы	Схема CS1		Схема CS2	
	h	f	h	f
2	2,50	0,85	2,50	0,55
3	1,75	0,55	1,75	0,35
4	1,25	0,50	1,25	0,30
5	1,00	0,45	1,00	0,30
6	0,85	0,45	0,85	0,30
7	0,70	0,45	0,70	0,30
8	0,55	0,40	0,55	0,25
9	0,55	0,40	0,55	0,25
10	0,50	0,35	0,50	0,25

Примечание 1 — Схеме CS1 соответствует средняя длина серии ARL_0 в диапазоне от 600 до 1000, если процесс работает на ожидаемом уровне изменчивости.

Примечание 2 — Схеме CS2 соответствует средняя длина серии ARL_0 в диапазоне от 150 до 210, если процесс работает на ожидаемом уровне изменчивости.

Выбирают одну из схем CS1 или CS2. При этом используют те же критерии выбора, что и при выборе схемы для среднего подгруппы. Если требуется схема с большим значением ARL, при отсутствии изменений процесса выбирают схему CS1. В противном случае выбирают схему CS2.

Независимо от выбранной схемы для определения фактического размера и формы маски, значения этих параметров должны быть умножены на оценку изменчивости $\overline{R}$ (см. этап 8).

Этап 4. Сбор данных предварительного периода

Здесь также применяют инструкции для оценки параметров положения процесса.

Этап 5. Оценка $\overline{R}$ по данным предварительного периода

Вычисляют $\overline{R}$, используя один из методов, описанных в 9.3.1, этап 5.

Таблица 11 — Сравнение ARL стандартных CUSUM-схем для размаха подгруппы

Объем подгруппы	Уровень изменчивости фактического процесса	Схема CS1	Схема CS2
2	$\overline{R}$	779,0	170,0
	$2\overline{R}$	7,2	5,5
	$4\overline{R}$	2,3	2,1

Окончание таблицы 11

Объем подгруппы	Уровень изменчивости фактического процесса	Схема CS1	Схема CS2
3	$\overline{R}$	893,0	196,0
	$2\overline{R}$	4,5	3,6
	$4\overline{R}$	1,6	1,5
4	$\overline{R}$	918,0	157,0
	$2\overline{R}$	3,3	2,7
	$4\overline{R}$	1,3	1,2
5	$\overline{R}$	771,0	179,0
	$2\overline{R}$	2,7	2,3
	$4\overline{R}$	1,2	1,1
6	$\overline{R}$	942,0	204,0
	$2\overline{R}$	2,4	2,0
	$4\overline{R}$	1,1	1,1
8	$\overline{R}$	893,0	162,0
	$2\overline{R}$	2,0	1,7
	$4\overline{R}$	1,0	1,0
10	$\overline{R}$	635,0	184,0
	$2\overline{R}$	1,7	1,5
	$4\overline{R}$	1,0	1,0
Примечание — Данные значения являются ARL. Необходимо знать, что фактическая длина серии для обнаружения изменения может быть больше или меньше ARL. При необходимости следует проверить распределение для определенных сдвигов от целевого значения, чтобы знать средний размах длин серий.			

Этап 6. Определение целевого значения, T

a) Данное значение

При статистическом контроле качества продукции или процесса наиболее распространен метод установки целевого значения размаха, описанный в b) ниже. Однако в некоторых случаях предпочтительно установить целевое значение на некотором предполагаемом уровне. Если это так, целевое значение размаха равно заданному значению размаха.

Если изменчивость описана с помощью стандартного отклонения, целевое значение размаха может быть вычислено по формуле $T = d_2\sigma$. Значение d_2 определяют по таблице 8. Оно зависит от объема подгруппы.

b) Функционально обоснованное значение

По данным, полученным за предварительный период наблюдений, устанавливают целевое значение размаха, равное $\overline{R}$.

Этап 7. Установление CUSUM-бумаги

Устанавливают CUSUM-таблицу (или добавляют данные к существующей CUSUM-таблице) и разрабатывают CUSUM-бумагу, как установлено в 9.3.1, этап 7.

CUSUM-бумага для размаха может иметь масштаб, отличный от масштаба бумаги для контроля среднего. Подходящий масштаб может быть вычислен по формуле $a\overline{R}$. Значение a приведено в таблице 12.

Таблица 12 — Коэффициент масштаба для CUSUM-бумаги размаха

Объем подгруппы	a
2	1,50
3	1,00

Окончание таблицы 12

Объем подгруппы	*a*
4	0,85
5	0,75
6	0,65
8	0,55
10	0,50

Этап 8. Установление CUSUM-маски

Используя значения *h* и *f*, выбранные на *этапе 3,* вычисляют:

a) $H = h\overline{R}$;

b) $F = f\overline{R}$.

Разрабатывают маску, используя расчетные значения *H* и *F* в соответствии с масштабом CUSUM-бумаги.

Этап 9. Вычисление кумулятивной суммы по данным предварительного периода наблюдений

Используя целевое значение, определенное на этапе 6, и таблицу, аналогичную таблице 12, вычисляют значение кумулятивной суммы для размаха по данным предварительного периода наблюдений.

Этап 10. Построение CUSUM-графика по данным предварительного периода наблюдений

Графически изображают кумулятивную сумму для размаха на CUSUM-бумаге, как описано в 9.3.1, этапы 7 и 10.

Этап 11. Анализ CUSUM-графика по данным предварительного периода наблюдений

Анализ CUSUM-графика выполняют, как установлено в 9.3.1, этап 11.

Этап 12. Идентификация и устранение специальных причин изменчивости

a) Общие положения

Важно исследовать все точки, расположенные за контрольными границами на CUSUM-графике, и идентифицировать соответствующую причину специальной изменчивости.

Если необходимо пересмотреть значения целевого размаха, в соответствии с одним из следующих подпунктов, то необходимо пересмотреть маску и возможно CUSUM-бумагу для контроля среднего.

b) Идентифицированная и устраненная специальная причина изменчивости

Как только специальная причина идентифицирована и выполнены действия по ее устранению, в будущем значение целевого размаха может быть изменено (при необходимости). При наличии только одной точки вне зоны стабильности, которая обработана в соответствии с перечислением a), ранее присвоенное целевое значение может быть пересмотрено с использованием данных предварительного периода наблюдений, за исключением данных, содержащих точку вне зоны стабильности подгруппы. Пересматривают вычисления для масштабирования CUSUM-бумаги и маски и повторно масштабируют бумагу и маску при необходимости.

Если данные предварительного периода наблюдений содержат несколько точек, это указывает на наличие у процесса проблем. Рекомендуется проанализировать и отрегулировать процесс и затем провести новый предварительный период наблюдений с регистрацией новых данных.

c) Идентифицированная, но не устраненная специальная причина

Существуют случаи, когда специальная причина не может быть устранена вследствие экономических или технических трудностей.

В этом случае CUSUM-параметры определяют на основе всех данных предварительного периода наблюдений и используют для продолжающегося контроля. Другими словами, такие специальные причины рассматривают как часть изменчивости случайного процесса.

d) Не выявленная специальная причина

Если специальная причина остается не выявленной, должны быть выполнены действия в соответствии с перечислением c).

Это крайне нежелательная ситуация, поскольку она препятствует улучшению процесса. Необходимо сделать все возможное для исследования специальных причин.

Этап 13. Продолжение построения карты

a) Общие положения

Выполнение действий по построению карты в соответствии с 9.3.1, этап 13.

b) Действия с процессом

Как при контроле среднего, если появляется сигнал о потере стабильности, то размер изменения можно оценить по градиенту CUSUM-графика. В этом случае интерпретация сводится к определению, насколько изменилась изменчивость, представленная в виде $\overline{R}$.

Если CUSUM-график, относящийся к оборудованию или машине, указывает на увеличение размаха, необходимо провести техническое обслуживание для восстановления оборудования. Если эти мероприятия успешны, предпринятые действия должны быть записаны, значение кумулятивной суммы обнулено, а процесс может продолжать функционировать. Если процесс возвратился к своему предыдущему уровню изменчивости, CUSUM-карта может применяться для контроля.

Если CUSUM-график показывает уменьшение размаха, то это обычно рассматривают как позитивное событие. Специальная причина и необходимые действия должны быть идентифицированы. Маски среднего и размаха (и возможно бумага) должны быть скорректированы для отражения новой ситуации. Целевое значение должно также быть заменено на новое меньшее значение. Для продолжения составления графика необходимо обнулить кумулятивную сумму размаха.

Обнуление кумулятивной суммы для среднего необходимо, поскольку анализ, сделанный с использованием пересмотренной маски для среднего, показал, что размах действительно стал меньше. Новые неконтролируемые точки теперь можно наблюдать на графике среднего.

c) Оценка изменчивости. Антирысканье

Как в случае кумулятивной суммы, при контроле положения, если необходимы меры по снижению рысканья, рекомендуется использовать регулировки на величину 75 % указанного изменения целевого размаха.

9.4.3 CUSUM-схемы стандартных отклонений подгруппы

Процедура разработки CUSUM-схемы контроля стандартных отклонений очень похожа на аналогичную процедуру контроля размаха подгруппы. Поэтому ниже приведены положения, отличные от установленных в 9.4.2.

Рассмотренные ниже схемы контроля стандартных отклонений подгруппы предполагают, что в каждой подгруппе сделано не менее двух наблюдений. Если собранные данные содержат по одному наблюдению в подгруппе, следует использовать метод последовательных размахов.

Этап 3. Выбор CUSUM-схемы стандартного отклонения

В таблице 13 установлены стандартные схемы, соответствующие типовым требованиям контроля стандартного отклонения. В таблице приведены две основных схемы: CS1 с большим значением ARL на ожидаемом уровне изменчивости и CS2 с меньшим значением ARL. Схема CS2 даст некоторое количество «ложных сигналов» и обнаруживает значимое изменение стандартного отклонения быстрее, чем соответствующая схема CS1. В таблице 14 показаны различия этих стандартных схем.

Таблица 13 — Стандартные CUSUM-схемы для стандартных отклонений подгруппы

Объем подгруппы	Схема CS1		Схема CS2	
	h	*f*	*h*	*f*
2	2,00	0,50	2,00	0,25
3	1,60	0,35	1,60	0,15
4	1,15	0,35	1,15	0,20
5	0,90	0,35	0,90	0,20
6	0,80	0,32	0,80	0,20
7	0,70	0,30	0,70	0,20
8	0,60	0,30	0,60	0,20
9	0,55	0,30	0,55	0,20
10	0,50	0,30	0,50	0,20
12	0,40	0,30	0,40	0,20
15	0,35	0,27	0,35	0,18
20	0,30	0,23	0,30	0,16

Примечание 1 — Схеме CS1 соответствует средняя длина серии ARL_0 в интервале от 700 до 1000, если процесс работает на ожидаемом уровне изменчивости.

Примечание 2 — Схеме CS2 соответствует средняя длина серии ARL_0 в интервале от 150 до 200, если процесс работает на ожидаемом уровне изменчивости.

Выбирают одну из схем CS1 или CS2. При этом должны быть использованы те же самые критерии выбора, которые были использованы при выборе схемы для среднего подгруппы. Если требуется схема с большим значением ARL, при отсутствии изменений процесса выбирают схему CS1, в противном случае выбирают схему CS2.

Независимо от выбранной схемы, значения маски фактического размера и формы должны быть умножены на оценку $\hat{\sigma}_0$, чтобы определить новые маски. Это описано ниже (см. этап 5).

Таблица 14 — Сравнение ARL стандартных CUSUM-схем стандартных отклонений подгруппы

Объем подгруппы	Уровень изменчивости фактического процесса	Схема CS1	Схема CS2
2	σ_0	920,0	185,0
	$2\sigma_0$	7,4	5,6
	$4\sigma_0$	2,3	2,1
3	σ_0	920,0	155,0
	$2\sigma_0$	4,4	3,7
	$4\sigma_0$	1,6	1,5
4	σ_0	840,0	180,0
	$2\sigma_0$	3,2	2,6
	$4\sigma_0$	1,3	1,2
5	σ_0	820,0	155,0
	$2\sigma_0$	2,6	2,2
	$4\sigma_0$	1,1	1,1
6	σ_0	850,0	190,0
	$2\sigma_0$	2,2	1,9
	$4\sigma_0$	< 1,1	< 1,1
8	σ_0	720,0	180,0
	$2\sigma_0$	1,7	1,6
	$4\sigma_0$	1,0	1,0
10	σ_0	930,0	200,0
	$2\sigma_0$	1,5	1,4
	$4\sigma_0$	1,0	1,0
12	σ_0	840,0	170,0
	$2\sigma_0$	1,3	1,2
	$4\sigma_0$	1,0	1,0
15	σ_0	860,0	170,0
	$2\sigma_0$	1,2	1,1
	$4\sigma_0$	1,0	1,0

Примечание — Данные значения являются ARL. Необходимо учитывать, что фактическая длина серии для обнаружения фактического изменения может быть больше или меньше ARL. При необходимости следует проверить вид распределения длины серии для сдвигов от целевого значения, чтобы знать средний размах длины серий.

Этап 5. Определение оценки σ_0 по данным предварительного периода наблюдений

a) Для каждой подгруппы вычисляют выборочное стандартное отклонение (s) подгруппы.

b) Вычисляют среднее стандартное отклонение ($\bar{s}$) подгруппы.

Определяют оценку стандартного отклонения подгруппы $\hat{\sigma}_0 = \bar{s} / c_4$, где c_4 определяют по таблице 15.

Таблица 15 — Коэффициент c_4 для определения оценки стандартного отклонения подгруппы

Объем подгруппы n[a]	c_4
2	0,7979
3	0,8862
4	0,9213
5	0,9400
6	0,9515
7	0,9594
8	0,9650
9	0,9693
10	0,9727
12	0,9776
15	0,9823
20	0,9869

[a] Значения c_4 существуют для $n > 20$. См. ИСО 7870-2 или другие источники.

Этап 6. Определение целевого значения T

a) Заданное значение

При статистическом контроле качества продукции или процессов наиболее распространенный метод установления целевого значения стандартного отклонения подгруппы описан в b) ниже. Однако могут быть случаи установления целевого значения на основе заданного значения σ_0. В этом случае целевое стандартное отклонение подгруппы вычисляют по формуле $T = c_4\sigma_0$. Значение c_4 определяют по таблице 15.

b) Значение, выбранное на основе наблюдений

На основе данных предварительного периода наблюдений устанавливают целевое значение стандартного отклонения подгруппы s.

Этап 7. Установление CUSUM-бумаги

Устанавливают CUSUM-таблицу (или дополняют существующую CUSUM-таблицу) и разрабатывают CUSUM-бумагу. CUSUM-бумага для стандартного отклонения подгруппы может иметь другой масштаб, чем бумага для контроля среднего. Масштаб может быть выбран, используя округление вверх или вниз до ближайшего удобного значения.

Интервал шкалы CUSUM-карты для стандартного отклонения подгруппы составляет $a\sigma_0$. Значение a определяют по таблице 16.

Таблица 16 — Коэффициенты масштаба CUSUM-бумаги для стандартного отклонения подгруппы

Объем подгруппы	a
2	1,50
3	1,00
4	0,85
5	0,75
6	0,65
8	0,55

Окончание таблицы 16

Объем подгруппы	*a*
10	0,50
15	0,40
20	0,35

Этап 8. Установление CUSUM-маски

Используя значения *h* и *f*, установленные на этапе 3, вычисляют:

a) $H = h\hat{\sigma}_0$;

b) $F = f\hat{\sigma}_0$.

Разрабатывают маску, используя расчетные значения *H* и *F* и масштаб маски, равный масштабу CUSUM-бумаги.

9.5 Особые ситуации

9.5.1 Большая изменчивость между подгруппами

В некоторых случаях важно часть изменчивости средних между подгруппами рассматривать как случайную изменчивость. Примером являются небольшие колебания среднего, выявленные CUSUM-картой, устранение которых не планируется. Для предотвращения ситуаций, когда CUSUM-карта непрерывно показывает нестабильное состояние, эти небольшие колебания должны быть включены в оценку изменчивости.

Вычисляют среднее стандартное отклонение между подгруппами (стандартная ошибка среднего) $s_{\bar{x}}$. Для этого могут быть использованы данные предварительного периода наблюдений или некоторого другого периода, который является репрезентативным для изменчивости. Используют значение $s_{\bar{x}}$ в качестве шкалы CUSUM-бумаги и маски, вместо σ_e для средних.

Эта процедура должна приводить к сокращению неконтролируемых точек на CUSUM-графике.

9.5.2 «Одиночные» данные

Для некоторых объектов контроля данные наблюдений по своей природе появляются по одному, и понятие подгруппы для таких данных не имеет смысла. Примерами являются ежемесячный объем продаж, температура резервуара с химикатами, используемыми в производственном процессе, когда данные повторных измерений температуры сделаны приблизительно в одно и то же время и не могут показывать наличие изменчивости между измерениями. В этом случае изменчивость в пределах подгруппы равна нулю и таким образом маска не может быть построена.

Другим примером является определение счета при игре в гольф. Лункам соответствует различное среднее количество ударов и игрок в гольф определяет результат по сравнению со средним количеством ударов для каждой лунки. Совокупная сумма разностей представляет собой кумулятивную сумму.

Объемы подгрупп, равные единице, появляются в случаях, когда отбор и/или анализ выборок очень дороги.

В соответствии с принятым подходом необходимо установить объем подгруппы равным единице и затем действовать в соответствии с этапами, установленными в 9.3 для $n = 1$. Таким образом, контроль параметра положения (среднего уровня) проводят по отдельным результатам наблюдений, а контроль изменчивости по размаху между последовательными результатами наблюдений.

Целевое значение среднего должно быть $T = \bar{\bar{x}}$, причем выборочное среднее должно быть определено по данным предварительного периода наблюдений, или в качестве целевого значения должно быть выбрано заданное значение. Целевое значение размаха должно быть или $\bar{R}$, определенное по последовательным разностям за предварительный период наблюдений, или $T = 1{,}128\sigma$, если стандартное отклонение является заданным значением. Хотя объем подгруппы равен единице, эффективный объем подгруппы равен двум.

9.5.3 Зависимость наблюдений в серии

Одним из основных предположений, используемых при построении CUSUM-карты, как и для любой контрольной карты, является предположение о независимости точек на графике. В некоторых случаях независимость отсутствует, примером являются процессы с обратной связью, такой как передача информации от термостата к нагревающемуся устройству, или процессы с выраженной сезонностью, такой как в данных об объеме продаж.

Влияние CUSUM-графика может быть существенным и в некоторых случаях может приводить к ложным сигналам и неверным оценкам значимых изменений.

Существуют статистические критерии, позволяющие выявить наличие положительной или отрицательной зависимости данных. Прямой метод оценивает корреляцию между исходными данными в их последовательности появления, т. е. первого результата в исходных данных со вторым, второго с третьим и т. д. Если оценка коэффициента корреляции намного больше нуля, это указывает на непосредственную связь между наблюдениями. Если коэффициент корреляции намного меньше нуля, то имеется отрицательная зависимость, которая предполагает, что при увеличении результата по сравнению с предыдущим последующий результат изменится в противоположном направлении. Это процессы с избыточным управлением. Такие корреляции легко могут быть вычислены с применением программных средств.

Диапазон значений коэффициентов корреляции [–1, +1]. Пороговое значение, указывающее на существенное отличие коэффициента корреляции от нуля, зависит от количества точек, использованных в исследовании. Если объем набора данных небольшой, то даже большое численное значение коэффициента корреляции может быть статистически незначащим, тогда как для большого набора данных коэффициент корреляции может быть близок к нулю и интерпретирован как статистически существенный. В таблице 17 приведены приближенные значения коэффициентов корреляции.

Таблица 17 — Интервалы критических значений коэффициента корреляции

Количество пар данных	Критический интервал для коэффициента корреляции[a]
10	[–0,45; 0,45]
15	[–0,37; 0,37]
20	[–0,33; 0,33]
25	[–0,30; 0,30]
[a] Для уровня значимости 0,05 (двухсторонний критерий).	

Если вычисленное значение коэффициента корреляции находится в интервале, указанном в таблице 17, нет причин предполагать, что имеется последовательная зависимость данных. Возможно, имеется некоторая слабая последовательная зависимость, для выявления которой объем выборки слишком мал.

Если выявлена последовательная зависимость данных, необходима помощь специалиста. Дальнейшие действия могут включать более глубокий анализ процесса для выявления причин зависимости. Решение проблемы может быть простым или сложным. Если зависимость вызвана сезонностью, она может быть преодолена путем изменения целевого значения в каждом временном периоде. В результате значение кумулятивной суммы станет независимым от сезона. Более подробная информация приведена в ИСО 7870-9.

9.5.4 Выбросы

Применение CUSUM-карт требует защиты от выбросов. Влияние выбросов на значение кумулятивной суммы может быть большим и может привести к появлению сигнала о нестабильности процесса. Рекомендуется следующий простой, но эффективный метод для защиты от выбросов.

a) Результат является выбросом, если:

1) среднее подгруппы больше целевого значения плюс $3{,}5\sigma_e$ или меньше целевого значения минус $3{,}5\sigma_e$;

2) отдельный результат больше целевого значения $+3{,}5\sigma_e$ или меньше целевого значения минус $3{,}5\sigma_e$.

Такой результат фиксируют как выброс и не используют его при вычислении кумулятивной суммы, если последующий результат не является подозрительным на выброс.

b) Результат является подозрительным на выброс, если:

1) среднее подгруппы больше целевого значения плюс $2\sigma_e$ или меньше целевого значения минус $2\sigma_e$;

2) отдельный результат больше целевого значения плюс $2\sigma_e$ или меньше целевого значения минус $2\sigma_e$.

Если два последовательных результата находятся вне границ подозрения на выброс, их оба используют при вычислении кумулятивной суммы. Это почти всегда приводит к получению сигнала о нестабильности процесса.

Примечание — Более строгие методы обнаружения выбросов приведены в ИСО 5725-5. Они не очень применимы в режиме «реального времени». Метод, установленный в настоящем стандарте, является простым применимым на практике.

9.6 CUSUM-схемы для дискретных данных

9.6.1 Количество событий. Распределение Пуассона

9.6.1.1 Общие положения

Иногда данные представляют собой количество событий, а каждый элемент данных — количество событий за определенный период времени или количество продукции. Такими данными являются: количество несчастных случаев или количество отсутствующих за месяц, количество срабатываний или вылетов в день, количество входящих телефонных звонков в минуту или число несоответствий на единицу продукции или партию.

Распределение Пуассона имеет два важных применения в CUSUM-анализе:

a) это распределение является приближением более громоздкого биномиального распределения (см. 9.6.2), при большом n и малом p, например $n > 20$ и $p < 0,1$;

b) распределение используют самостоятельно, когда случайные события происходят во времени или пространстве, а наблюдением является количество событий в заданном интервале времени или объеме.

Для распределения Пуассона характерны независимость событий и постоянная интенсивность их реализации (при отсутствии специальных причин).

Поскольку плотность распределения Пуассона (а также биномиального распределения) не симметрична, для выявления сдвига процесса вверх и вниз необходимо использовать различные правила принятия решения. Поэтому усеченная V-маска в этом случае не симметрична, имеет различные значения угловых коэффициентов и интервалы решений в верхней и нижней частях.

Для обеспечения простоты вычислений в некоторых случаях используют аппроксимацию одних распределений другими. Например, распределение Пуассона и нормальное распределение используют как аппроксимацию биномиального распределения, а нормальное распределение — как аппроксимацию распределения Пуассона.

В 9.3 и 9.4 значения ARL для данных, подчиняющихся нормальному распределению, определены на основе стандартного нормального распределения со средним 0 и стандартным отклонением 1. Для дискретных распределений каждый параметр должен быть вычислен отдельно. Поэтому для дискретных распределений рассмотрены только ситуации, связанные со смещением процесса вверх. В настоящее время программное обеспечение позволяет решать эту задачу и для сдвига процесса вниз.

9.6.1.2 Общие правила решений для дискретных данных

CUSUM-схема для дискретных данных однозначно определяется видом распределения данных и двумя параметрами: значением показателя K и интервалом принятия решений H. При выборе параметров необходимо руководствоваться следующим:

a) Разработка CUSUM-схемы включает два этапа:

1) выбор комбинации K и H для обеспечения желательного значения ARL;

2) определение скорости появления сигнала при различных сдвигах среднего.

b) Значение K должно быть выбрано на основе заданного значения среднего, которое дает сигнал. Удобным значением K является значение между средним стабильного процесса и средним нестабильного процесса, для которых кумулятивная сумма должна быть максимально чувствительной. Значение K зависит от вида распределения данных и приемлемого значения среднего.

9.6.1.3 CUSUM-схемы для дискретных данных

Этап 1. Определение фактических средней интенсивности μ и стандартного отклонения σ_e.

Этап 2. Выбор опорной или целевой интенсивности T. Часто $T = \mu_0$.

Этап 3. Выбор наиболее подходящего правила принятия решений, на основе выбора применимой схемы. Предпочтительными вариантами являются схемы CS1 с ARL не менее 1000 для целевого уровня процесса или схема CS2 с ARL не менее 200 для целевого уровня процесса (см. таблицу 18).

Этап 4. Определение значений H и K:

a) для выбранного значения T ($0,1 \le T \le 25,0$) по таблице 18 определяют значения H и K. При необходимости используют линейную интерполяцию между значениями T от 10,0 до 25,0;

b) если $T > 25,0$, для определения H и K используют таблицы 9.3 для нормального распределения с $\sigma_e = \sqrt{T}$;

c) применяют нормальное приближение распределения Пуассона.

Например, если $T = 25$, для нормальной переменной со средним 25 и стандартным отклонением 5 $H = 24$ и $K = 28$. Соответствующее значение ARL приблизительно равно 1500. Истинное значение ARL для переменной из распределения Пуассона с $H = 24$ и $K = 28$ равно 1085. Это уменьшение значения ARL является следствием несимметричности распределения Пуассона.

Этап 5. Построение и применение V-маски или таблицы:

a) на CUSUM-карте строят CUSUM-график разностей ($x - T$) и используют V-маску с интервалом решения H и угловым коэффициентом F (= $K - T$);

b) для табличного CUSUM формируют сумму разностей ($x - K$), обнуляя ее всякий раз, когда накопленная сумма становится отрицательной. Проверяют H на наличие сигнала о сдвиге.

Этап 6. Определяют ARL для выбранной схемы при исследуемых сдвигах от номинала в соответствии с таблицей 20.

Пример

Этап 2. Опорная средняя интенсивность T = 4.

Этап 3. Используемая схема CS1.

Этап 4. В соответствии с таблицей 19 для T = 4,0, H = 8 и K = 6.

Этап 5 a). Изображают CUSUM-график и применяют V-маску (H = 8, F = 2).

Этап 5 b). Разрабатывают CUSUM-таблицы (H = 8, K = 6).

Этап 6. Выполнение схемы показано в таблице 18. Для процесса на целевом уровне ARL (ARL_0) равен 1736. Однако ARL уменьшается на 10 для интенсивности 6,60.

Таблица 18 — Данные таблицы 20, необходимые для примера

H	*K*	T_m	ARL_0	ARL_δ	*1000*	*500*	*200*	*100*	*50*	*20*	*10*	*5*	*2*
8,0	*6,00*	*4,000*	*1736*	$\mu = T + \delta$	*4,160*	*4,380*	*4,710*	*5,000*	*5,300*	*5,90*	*6,60*	*7,80*	*11,50*

9.6.2 Биномиальные данные

9.6.2.1 Общие положения

Возможна ситуация, когда каждый элемент данных относится к одной из нескольких категорий. Часто категорий две. Это случай биномиального распределения, когда результат обычно выражается в виде 0 или 1 и соответствует работоспособному/неработоспособному состоянию, прибыли/убыткам, наличию/отсутствию определенного свойства.

Такие данные называют биномиальными данными. Иногда данные характеризуют попадание другой количественной меры в некоторый интервал, например телефонные переговоры могут быть разделены по продолжительности (менее или более десяти минут).

Таблица 19 — Значения H и K схем CS1 и CS2 для распределения Пуассона

Целевое значение	Схема CS1		Схема CS2	
T	*H*	*K*	*H*	*K*
0,100	1,5	0,75	2,0	0,25
0,125	2,5	0,50	2,5	0,25
0,160	3,0	0,50	2,0	0,50
0,100	1,5	0,75	2,0	0,25
0,125	2,5	0,50	2,5	0,25
0,160	3,0	0,50	2,0	0,50
0,200	3,5	0,50	2,5	0,50
0,250	4,0	0,50	3,0	0,50
0,320	3,0	1,00	4,0	0,50
0,400	2,5	1,50	3,0	1,00
0,500	3,0	1,50	2,0	1,50
0,640	3,5[a] или 4,0	1,50	2,0	2,00
0,800	5,0	1,50	3,5	1,50
1,000	5,0	2,00	5,0	1,50
1,250	4,0	3,00	5,0	2,00

Окончание таблицы 19

Целевое значение	Схема CS1		Схема CS2	
T	*H*	*K*	*H*	*K*
1,600	5,0	3,00	4,0	3,00
2,000	7,0[a] или 8,0	3,00	5,0	3,00
2,500	7,0	4,00	5,0	4,00
3,200	7,0	5,00	5,0	5,00
4,000	8,0	6,00	6,0	6,00
5,000	9,0	7,00	7,0	7,00
6,400	9,0	9,00	9,0	8,00
8,000	9,0	11,00	9,0	10,00
10,000	11,0	13,00	11,0	12,00
15,000	16,0	18,00	11,0	18,00
20,000	20,0	23,00	14,0	23,00
25,000	24,0	28,00	17,0	28,00

Примечание 1 — Схеме CS1 обычно соответствуют значения ARL от 1000 до 2000 наблюдений. Схеме CS2 обычно соответствуют значения ARL от 200 до 400 наблюдений.

Примечание 2 — Значения *T* в интервале от 1 до 10 выбраны таким образом, чтобы обеспечить более равномерное представление значений параметров *H* и *K*.

Примечание 3 — Интервал значений *T* от 10 до 25 разбит на равные отрезки (10, 15, 20, 25) для обеспечения интерполяции. Параметры схем в этой области могут быть получены с помощью линейной интерполяции по *H* и *K* с округлением результата до целого значения. При этом округление *H* и *K* рекомендуется делать в одну и ту же сторону.

[a] Нижнему значению *H* соответствует ARL_0 много меньше 1000; верхнему значению — ARL_0 около 2000.

Для $T < 1$ рекомендуется выполнить масштабирование, поскольку отдельные наблюдения содержат ограниченное количество информации. Определяют среднее количество наблюдений, соответствующих одному событию, $1/T$. Это значение округляют до целого значения и используют в качестве единицы масштаба горизонтальной оси CUSUM-карты. Для вертикальной оси используют тот же масштаб. На осях ставят деления, соответствующие целым значениям единиц масштаба. На вертикальной оси должны быть предусмотрены положительная и отрицательная области изменения контролируемой величины.

Таблица 20 — Значения ARL для CUSUM-схем (распределение Пуассона)

H	*K*	Схема CS1		Схема CS2		Среднее значение ARL								
		T	ARL_0	*T*	ARL_0	1000	500	200	100	50	20	10	5	2
2,0	0,25	—	—	0,100	212	0,057	0,072	0,102	0,135	0,179	0,29	0,43	0,74	1,99
2,5	0,25	—	—	0,125	227	0,078	0,097	0,131	0,166	0,220	0,33	0,49	0,82	2,12
2,0	0,50	—	—	0,160	230	0,095	0,121	0,168	0,220	0,280	0,42	0,59	0,91	2,09
1,5	0,75	0,100	1 033	—	—	0,120	0,130	0,181	0,240	0,320	0,46	0,66	0,99	2,11
2,5	0,50	0,125	1 371	0,200	278	0,138	0,167	0,220	0,280	0,350	0,49	0,68	1,05	2,32
3,0	0,50	0,160	1 609	0,250	264	0,179	0,210	0,270	0,330	0,400	0,56	0,77	1,12	2,74
3,5	0,50	0,200	1 461	—	—	0,220	0,250	0,310	0,370	0,440	0,60	0,84	1,31	3,02
4,0	0,50	0,250	966	0,320	271	0,250	0,280	0,340	0,400	0,470	0,65	0,91	1,41	3,37
3,0	1,00	0,320	1 174	0,400	446	0,330	0,390	0,480	0,570	0,690	0,91	1,17	1,63	3,08

Окончание таблицы 20

H	*K*	Схема CS1		Схема CS2		Среднее значение ARL								
		T	ARL_0	*T*	ARL_0	1000	500	200	100	50	20	10	5	2
2,0	1,50	—	—	0,500	260	0,360	0,420	0,540	0,640	0,780	1,04	1,32	1,78	3,17
2,5	1,50	0,400	1 103	—	—	0,410	0,490	0,610	0,730	0,890	1,15	1,46	1,93	3,37
2,0	2,00	—	—	0,640	221	0,420	0,510	0,650	0,790	0,970	1,27	1,58	2,09	3,44
3,0	1,50	0,500	1 475	—	—	0,540	0,620	0,740	0,860	1,010	1,28	1,60	2,12	3,85
3,5	1,50	0,640	833	0,800	249	0,620	0,700	0,830	0,950	1,100	1,38	1,70	2,26	3,74
4,0	1,50	0,640	1 843	—	—	0,700	0,790	0,920	1,040	1,190	1,47	1,81	2,38	4,44
5,0	1,50	0,800	1 439	1,000	274	0,840	0,920	1,040	1,160	1,310	1,60	1,95	2,64	5,25
5,0	2,00	1,000	1 904	1,250	259	1,090	1,190	1,350	1,500	1,680	2,00	2,37	3,09	5,90
4,0	3,00	1,250	1 867	1,600	354	1,380	1,530	1,750	1,950	2,200	2,61	3,04	3,76	6,35
5,0	3,00	1,600	1 118	2,000	188	1,640	1,770	1,940	2,180	2,420	2,83	3,29	4,07	6,60
7,0	3,00	2,000	894	—	—	1,980	2,110	2,310	2,490	2,710	3,09	3,57	4,59	7,55
8,0	3,00	2,000	1 927	—	—	2,110	2,330	2,430	2,600	2,810	3,23	3,78	4,80	8,40
5,0	4,00	—	—	2,500	300	2,170	2,350	2,600	2,870	3,160	3,63	4,16	5,00	7,60
7,0	4,00	2,500	1 761	—	—	2,620	2,800	3,050	3,260	3,450	3,99	4,53	5,60	8,85
5,0	5,00	—	—	3,200	245	2,730	2,940	3,270	3,560	3,890	4,45	5,00	6,00	8,50
7,0	5,00	3,200	1 318	—	—	3,280	3,480	3,780	4,030	4,320	4,88	5,50	6,50	9,80
6,0	6,00	—	—	4,000	373	3,640	3,880	4,240	5,550	4,930	5,50	6,20	7,20	10,40
8,0	6,00	4,000	1 736	—	—	4,160	4,380	4,710	5,000	5,300	5,90	6,60	7,80	11,50
7,0	7,00	—	—	5,000	348	4,600	4,840	5,200	5,600	5,900	6,60	7,30	8,50	11,60
9,0	7,00	5,000	1 268	—	—	5,100	5,300	5,700	6,000	6,400	6,90	7,70	9,10	13,50
9,0	8,00	—	—	6,400	226	5,800	6,100	6,500	6,800	7,200	7,90	8,60	10,00	14,20
9,0	9,00	6,400	1 351	—	—	6,500	6,800	7,200	7,600	8,100	8,80	9,60	11,10	15,20
9,0	10,00	—	—	8,000	213	7,200	7,600	8,000	8,400	8,900	9,70	10,50	11,90	16,20
9,0	11,00	8,000	946	—	—	8,000	8,300	8,800	9,300	9,800	10,50	11,40	13,00	16,40
11,0	12,00	—	—	10,000	234	9,300	9,600	10,100	10,500	11,000	11,90	12,80	14,60	19,80
11,0	13,00	10,000	1 052	—	—	10,000	10,400	11,000	11,400	11,900	12,70	13,70	15,50	20,30
11,0	18,00	—	—	15,000	214	13,900	14,300	15,100	15,600	16,300	17,40	18,50	20,40	25,90
16,0	18,00	15,000	1 289	—	—	15,100	15,500	16,100	16,500	17,200	18,20	19,40	21,70	29,10
14,0	23,00	—	—	20,000	215	18,800	19,300	20,100	20,700	21,400	22,60	24,00	26,20	32,90
20,0	23,00	20,000	1 140	—	—	20,100	20,500	21,100	21,700	22,300	23,50	24,90	27,60	36,80
17,0	28,00	—	—	25,000	222	23,700	24,300	25,100	25,800	26,500	27,80	29,30	31,90	40,00
24,0	28,00	25,000	1 085	—	—	25,100	25,500	26,200	26,700	27,400	28,70	30,40	33,50	44,90
Примечание — Таблица относится к сдвигам среднего вверх.														

Условия, при выполнении которых данные могут быть отнесены к биномиальному распределению:

a) фиксированное количество предварительных данных *n*;

b) в каждом предварительном наблюдении возможны лишь два исхода;

c) результаты наблюдений независимы;

d) в каждом предварительном наблюдении вероятность «успеха» *p* постоянная;

e) переменной является общее количество «успехов» в *n* наблюдениях.

Биномиальное распределение является очень громоздким для вычислений, поэтому для вычисления ARL и критериев принятия решений могут быть использованы аппроксимации биномиального распределения другими распределениями.

Из-за большого диапазона возможных значений параметров биномиального распределения n (значение n, как правило, связано с объемом выборки) и p (значение p представляет собой долю объектов, обладающих исследуемым альтернативным признаком) составление таблиц для всех возможных комбинаций затруднительно. Однако во многих случаях могут быть применены приближенные процедуры:

- Ситуация 1. $T < 0,1$ (т. е. целевое или опорное значение ниже 10 %), используют соответствующую схему для распределения Пуассона с $T = np$.

- Ситуация 2. $T > 20$ (т. е. среднее количество «событий» на выборку в целевых условиях превышает 20), используют соответствующую схему для нормального распределения.

9.6.2.2 Ситуация 1: $T < 0,1$

В данном случае используют аппроксимацию биномиального распределения распределением Пуассона. Может быть применим метод, установленный в 9.6.1.3, для $T = np$. Использование распределения Пуассона всегда дает значение ARL меньше, чем использование биномиального распределения. Однако при существенных отклонениях от целевых условий значения ARL близки друг к другу.

Пример

Этап 2. Пусть n = 20 и p = 0,025. Таким образом, np = 0,5 и T = 0,5.

Этап 3. Использована схема CS1.

Этап 4. В соответствии с таблицей 19 для T = 0,5, H = 3 и K = 1,5.

Этап 5 a). Строят CUSUM-график, разрабатывают и применяют V-маску (H = 3, F = 1,0).

Этап 5 b). Разрабатывают CUSUM-таблицу (H = 3, K = 1,5).

Этап 6. Выполнение схемы показано в таблице 21. Если процесс работает на целевом уровне, ARL (ARL_0) равно 1475. Однако ARL снижается на 10, если интенсивность повышается до 1,60, т. е. p = 0,080.

Таблица 21 — Данные таблицы 20, необходимые для примера

H	K	T	ARL_0	ARL_δ	1000	500	200	100	50	20	10	5	2
3,0	1,50	0,500	1475	$\mu = T + \delta$	0,540	0,620	0,740	0,860	1,010	1,28	1,60	2,12	3,85

9.6.2.3 Ситуация 2: $T > 20$

В ситуации 2 выбирают подходящую пару параметров h, f, например, 5 и 0,5, для соответствующей нормальной переменной. CUSUM-параметры для биномиального распределения определяют по следующим формулам:

$H = h\sqrt{nT(1-T)}$ с округлением H до ближайшего целого числа.

$K = nT + \left[f\sqrt{nT(1-T)}\right]$ с округлением K до ближайшего целого числа.

$F = f\sqrt{nT(1-T)}$ с округлением F до ближайшего целого числа.

Пример

Этап 2. Пусть n = 80 и T = 0,3, h = 5 и f = 0,5.

Этап 4. $H = h\sqrt{nT(1-T)} = 5\sqrt{80 \cdot 0,3(1-0,3)} \approx 20$

$$K = nT + \left[f\sqrt{nT(1-T)}\right] = (80 \cdot 0,3) + \left[0,5\sqrt{80 \cdot 0,3(1-0,3)}\right] \approx 26$$

$$F = f\sqrt{nT(1-T)} = \left[0,5\sqrt{80 \cdot 0,3(1-0,3)}\right] \approx 2$$

Этап 5 a). Графическое представление кумулятивной суммы, разработка и применение V-маски (H = 20, F = 2).

Этап 5 b). Разработка CUSUM-таблицы (H = 20, K = 26).

Этап 6. Если процесс находится на целевом уровне, ARL (ARL_0) равна приблизительно 930. Однако ARL уменьшится приблизительно на 10, если p увеличится до 0,35.

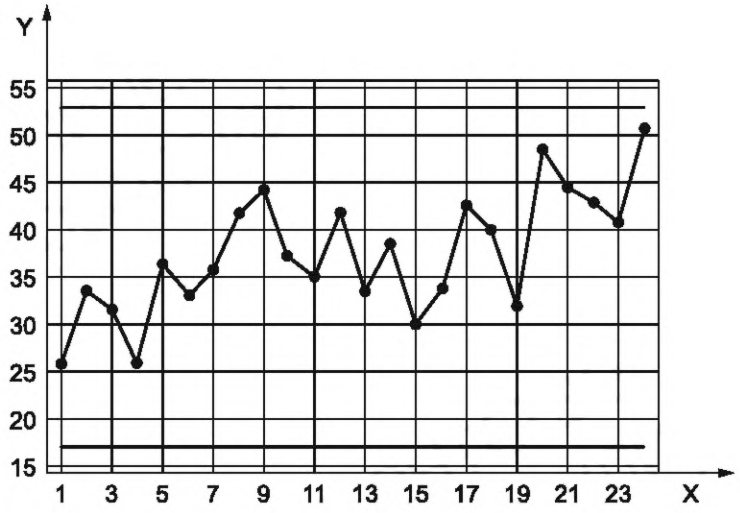
Приложение А
(справочное)

Пример табличной формы CUSUM

Среднее 35 и стандартное отклонение 6 были получены по предыдущим данным и использованы в качестве параметров для карты Шухарта и CUSUM-карты. Установлено целевое значение 35.

Собраны данные за двадцать четыре дня: 25,8; 33,4; 31,6; 26,0; 36,4; 33,0; 35,8; 41,8; 44,2; 37,2; 35,0; 41,8; 33,4; 38,4; 30,2; 33,8; 42,6; 39,6; 32,0; 48,4; 44,6; 43,0; 40,8 и 50,6.

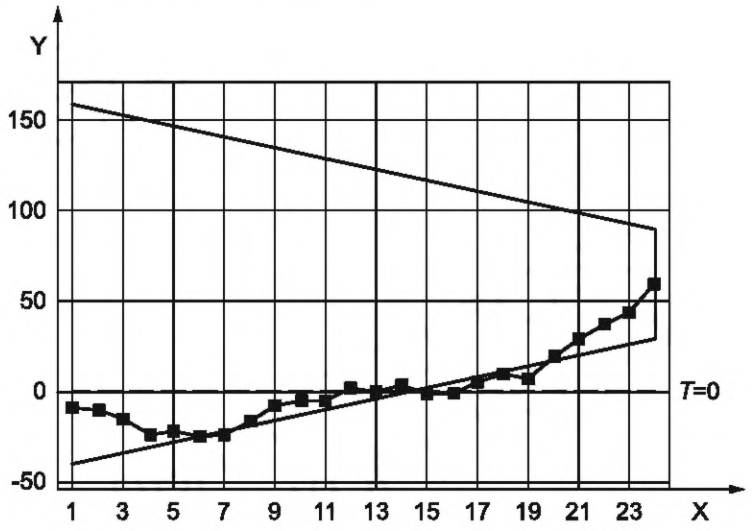
Карта Шухарта показана на рисунке А.1. С помощью стандартных критериев карты Шухарта не выявлено никаких сигналов.



X — день; Y — наблюдаемое значение

Рисунок А.1 — Карта Шухарта для среднего

CUSUM-график данных показан на рисунке А.2. Он показывает «сигнал» в двадцать четвертый день. Карта Шухарта на рисунке А.1 не обнаруживает это изменение.



X — день; Y — кумулятивная сумма; *T* — целевое значение

Рисунок А.2 — CUSUM-график и V-маска для среднего

Табличная версия этой CUSUM-карты приведена в таблице А.1.

Таблица А.1 — CUSUM-таблица для средних

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
День	Среднее за день (x)	($x - T - F$)	Сумма «Hi»	Номер «Hi»	($x - T + F$)	Сумма «Lo»	Номер «Lo»
0			15,0	0		–15,0	0
1	25,8	–12,2	2,8	1	–6,2	–21,2	1
2	33,4	–4,6	0,0	0	1,4	–19,8	2
3	31,6	–6,4	0,0	0	–0,4	–20,2	3
4	26,0	–12,0	0,0	0	–6,0	–26,2	4
5	36,4	–1,6	0,0	0	4,4	–21,8	5
6	33,0	–5,0	0,0	0	1,0	–20,8	6
7	35,8	–2,2	0,0	0	3,8	–17,0	7
8	41,8	3,8	3,8	1	9,8	–7,2	8
9	44,2	6,2	10,0	2	12,2	0,0	0
10	37,2	–0,8	9,2	3	5,2	0,0	0
11	35,0	–3,0	6,2	4	3,0	0,0	0
12	41,8	3,8	10,0	5	9,8	0,0	0
13	33,4	–4,6	5,4	6	1,4	0,0	0
14	38,4	0,4	5,8	7	6,4	0,0	0
15	30,2	–7,8	0,0	0	–1,8	–1,8	1
16	33,8	–4,2	0,0	0	1,8	0,0	0
17	42,6	4,6	4,6	1	10,6	0,0	0
18	39,6	1,6	6,2	2	7,6	0,0	0
19	32,0	–6,0	0,2	3	0,0	0,0	0
20	48,4	10,4	10,6	4	16,4	0,0	0
21	44,6	6,6	17,2	5	12,6	0,0	0
22	43,0	5,0	22,2	6	11,0	0,0	0
23	40,8	2,8	25,0	7	8,8	0,0	0
24	50,6	12,6	37,6	8	18,6	0,0	0
Примечание — $T = 35$; $f = 0{,}5s$; $h = 5s$.							

В этой CUSUM-таблице использована «быстрая начальная реакция на сдвиг» (FIR), таким образом, начальное значение помещено в «День 0», в колонки «Сумма Hi» и «Сумма Lo». Эти значения равны +2,5s и –2,5s соответственно, то есть +15,0 и –15,0. Аналогично, 0 помещен в колонки «Номер Hi» и «Номер Lo» в строке «День 0». Таким образом, $h = 5s$, границы сигнала составляют +30 и –30 соответственно.

Значение для «Дня 1» равно 25,8. Вычисления для колонки (3) следующие:

25,8 – 35 – 3 = –12,2.

Значение (–12,2) прибавляют к предыдущему значению 15,0 в колонке «Сумма Hi» (–12,2 + 15,0 = 2,8). Так как 2,8 положительно, к предыдущему значению колонки «Номер Hi» добавляют единицу. Новое значение в колонке «Номер Hi» равно 1.

Вычисления для столбца (6)

25,8 – 35 + 3 = –6,2.

Значение (–6,2) прибавляют к предыдущему значению колонки «Сумма Lo» (–15,0) и получают (–21,2). Так как (–21,2) отрицательно, добавляют 1 к предыдущему значению в колонке «Номер Lo», т. е. к нулю. Новый «Номер Lo» равен 1.

Для вычислений рекомендуется использовать компьютер.

Среднее за «День 2» составило 33,4. Вычисления для столбца (3) следующие:

33,4 – 35 – 3 = –4,6.

Значение (–4,6) добавляют к предыдущему значению (2,8) колонки «Сумма Hi», в результате получают (–1,8). Так как это значение отрицательно, значение в колонке «Сумма Hi» изменяют на 0, «Номер Hi» также изменяют на 0, т е. для этой стороны CUSUM-карты считаются только положительные значения CUSUM.

Вычисления для столбца (6)

33,4 – 35 + 3 = 1,4.

Значение 1,4 прибавляют к предыдущему значению (–21,2) в колонке «Сумма Hi», получают (–19,8). Поскольку (–19,8) отрицательно, к предыдущему значению колонки «Номер Lo» прибавляют 1 (значение в колонке «Номер Lo» равно 2).

Эту процедуру продолжают до тех пор, пока значение в колонках «Сумма Hi» или «Сумма Lo» не превысит значение h (30 или —30 в данном примере). Это происходит на 24-й день, когда «Сумма Hi» принимает значение 37,6.

Анализ того, когда произошел сдвиг, и определение его величины могут быть выполнены по таблице. Из таблицы А.1 видно, что «Сумма Hi» и «Сумма Lo» уменьшаются достаточно быстро, если уровень процесса находится вблизи целевого значения. Если это не так, то обычно «Сумма Hi» и «Сумма Lo» дают сигнал об изменении процесса.

В данном примере сигнал дает «Сумма Hi». При этом «Номер Hi» равен 8. Это означает, что изменение произошло между 16-м и 17-м днем. Оценка сдвига в предположении отсутствия FIR равна

$$F+\frac{\text{Сумма Hi}}{\text{Номер Hi}}.$$

Если выявленный сдвиг отрицателен, оценка равна:

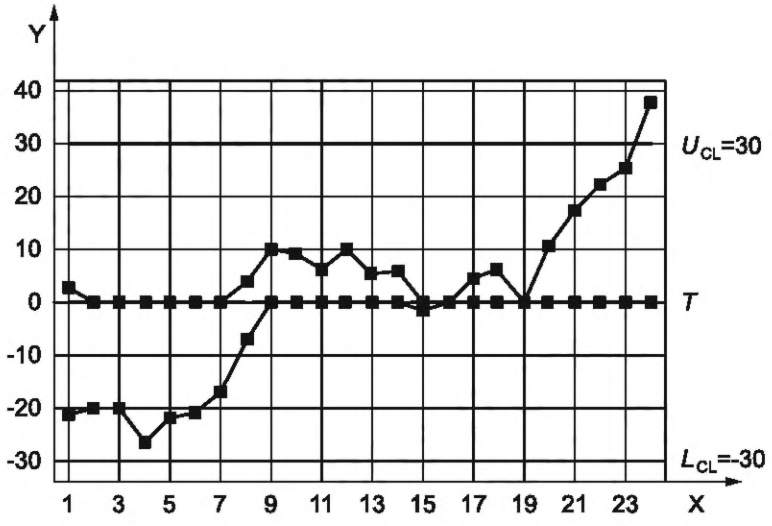
$$-F-\frac{\text{Сумма Lo}}{\text{Номер Lo}}.$$

Так как «Сумма Hi» превысила значение h = 30, оценка сдвига

$$F+\frac{\text{Сумма Hi}}{\text{Номер Hi}}=3+\frac{37,6}{8}=7,70.$$

Примечание — Последние восемь значений исходных данных смещены вверх приблизительно на одно стандартное отклонение, т. е. на 6 единиц. Таким образом, кумулятивная сумма выявила место сдвига и позволила оценить его величину (7,7), которая несущественно отличается от 6.

На рисунке А.3 представлен CUSUM-график, соответствующий таблице.



X — день; Y — кумулятивная сумма; T — целевое значение (T = 0)

Рисунок А.3 — CUSUM-график, соответствующий таблице А.1

Приложение В
(справочное)

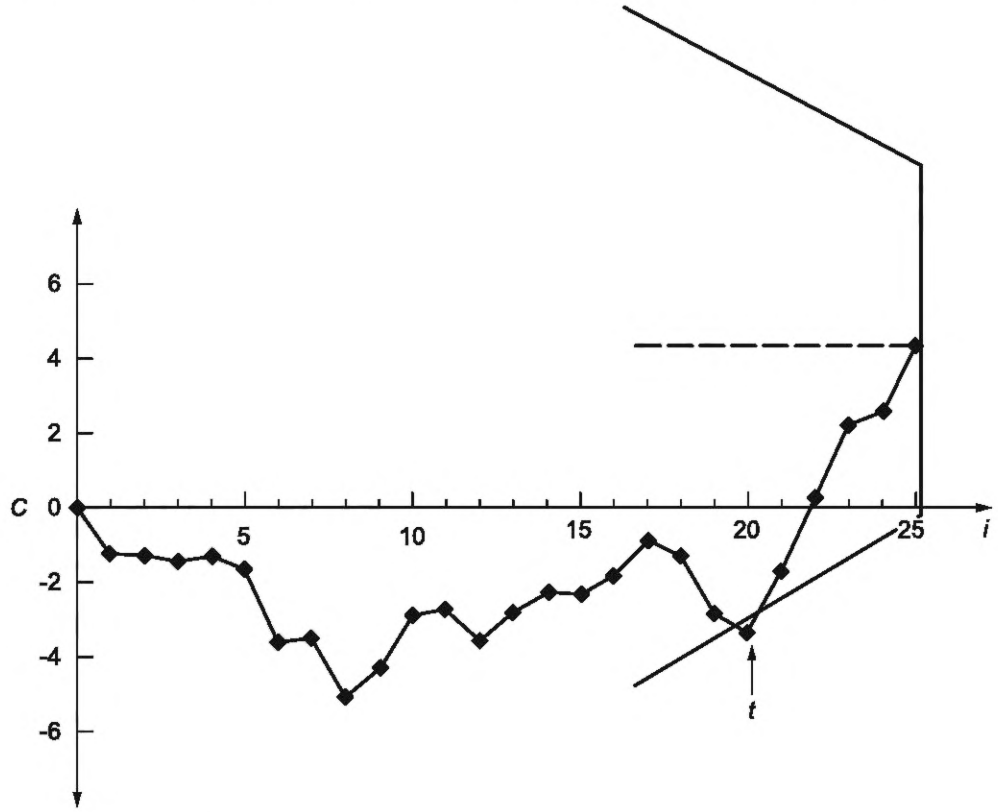
Определение точки изменений

Стабильность (нестабильность) процесса может быть определена по контрольным картам при использовании определенных критериев, но контрольные карты не могут выявить неслучайную причину изменчивости процесса. Однако анализ предыдущих графиков на контрольных картах может дать информацию для поиска неслучайных причин. Эту важную задачу выполняет оценка точки изменения.

В случае изменения среднего процесса $\mu(t)$, точку изменения можно описать системой уравнений:

$$\mu(t) = \begin{cases} T & (t = 1,\ldots,\tau) \\ T + \delta & (t = \tau + 1,\ldots) \end{cases}.$$

CUSUM-карта обладает возможностью определения точки изменения процесса. Точка изменения — это момент времени, когда CUSUM-график выходит за границы V-маски, как показано на рисунке В.1.

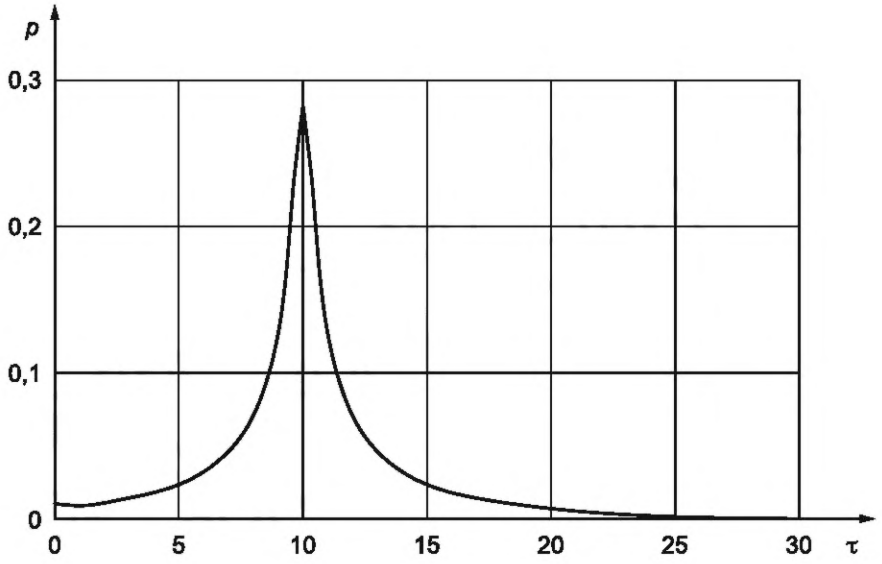


C — кумулятивная сумма; *i* — номер точки; *t* — точка изменения

Рисунок В.1 — Определение точки изменения при использовании V-маски

На рисунке В.2 показано определение точки изменения по CUSUM-карте при использовании схемы CS1 (h = 0,5, f = 0,5). Следует учитывать ошибку первого рода, поскольку изменения определяют только после того, как карта выявляет сигнал об изменении процесса. Поэтому распределение, представленное на рисунке В.2, получено при условии отсутствия ошибки первого рода.

Распределение является унимодальным, и его мода указывает на истинную точку изменения τ = 10. Несмотря на то, что величина сдвига невелика (см. рисунок В.2) и составляет δ = 1,0 σ_e = Δ, такой подход предпочтителен.



Примечание — Для усеченной V-маски с параметрами h = 5,0, f = 0,5, Δ = 1,0 и τ = 10.

Рисунок В.2 — Распределение точки изменения процесса при использовании CUSUM-карты

Приложение ДА
(справочное)

Сведения о соответствии ссылочных международных стандартов национальным стандартам

Таблица ДА.1

Обозначение ссылочного международного стандарта	Степень соответствия	Обозначение и наименование соответствующего национального стандарта
ISO 3534-1	IDT	ГОСТ Р ИСО 3534-1—2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 1. Общие статистические термины и термины, используемые в теории вероятностей»
ISO 3534-2	IDT	ГОСТ Р ИСО 3534-2—2019 «Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Часть 2. Прикладная статистика»
Примечание — В настоящей таблице использовано следующее условное обозначение степени соответствия стандартов: - IDT — идентичные стандарты.		

Библиография

[1] ISO 5725-5 Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results — Part 5: Alternative methods for the determination of the precision of a standard measurement method

[2] ISO 7870-1 Control charts — Part 1: General guidelines

[3] ISO 7870-2 Control charts — Part 2: Shewhart control charts

[4] ISO 7870-9 Control charts — Part 9: Control charts for stationary processes

[5] ISO 9000 Quality management systems — Fundamentals and vocabulary

[6] BS 5703 Guide to data analysis, quality control and improvement using CUSUM techniques

[7] Hawkins D. M., Olwell D. H., Cumulative sum charts and charting for quality improvement. Springer. 1998

[8] Montgomery D. C., Statistical quality control: a modern introduction. Wiley. 2009

[9] Nishina K., Estimation of the change-point from cumulative sum tests. Reports of Statistical Application Research, JUSE, 33(4), 1986

[10] Nishina K., Estimation of the amount of shift using cumulative sum tests. Reports of Statistical Application Research, JUSE, 35(3), 1988

[11] Nishina K., A comparison of control charts from the viewpoint of change-point estimation. Quality and Reliability Engineering International, 8, 1992

[12] Qiu P., Introduction to statistical process control. Chapman and Hall/CRC. 2013

УДК 658.562.012.7:65.012.122:006.352 ОКС 03.120.30

Ключевые слова: контрольная карта, карта кумулятивных сумм, статистическое управление процессом, средняя длина серии

Редактор *Л.В. Коретникова*
Технический редактор *В.Н. Прусакова*
Корректор *О.В. Лазарева*
Компьютерная верстка *Е.О. Асташина*

Сдано в набор 28.09.2023. Подписано в печать 19.10.2023. Формат 60×84⅛. Гарнитура Ариал.
Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 4,60.

Подготовлено на основе электронной версии, предоставленной разработчиком стандарта

Создано в единичном исполнении в ФГБУ «Институт стандартизации»
для комплектования Федерального информационного фонда стандартов,
117418 Москва, Нахимовский пр-т, д. 31, к. 2.

gost.e-ecolog.ru gost.e-ecolog.ru