**Министерство строительства
и жилищно-коммунального хозяйства
Российской Федерации**

**Федеральное автономное учреждение
«Федеральный центр нормирования, стандартизации
и технической оценки соответствия в строительстве»**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАССИВНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Москва 2019

gost.e-ecolog.ru

Содержание

1 Область применения..... 1
2 Нормативные ссылки..... 2
3 Термины и определения..... 2
4 Общие положения..... 5
5 Соотношения теории напряжений и теории деформаций, характеризующие трехосное (объемное) напряженно-деформированное состояние элементов 11
6 Диаграммы деформирования материалов применительно к моделированию объемного напряженного состояния..... 16
6.1 Диаграммы деформирования бетонов..... 17
6.2 Диаграммы деформирования арматуры..... 23
6.3 Диаграммы деформирования арматуры в элементах с трещинами.....29
6.4 Диаграммы деформирования бетона с учетом длительного действия нагрузки (диаграммы-изохроны)..... 33
6.5 Меры ползучести бетона.....38
6.6 Учет усадки бетона.....40
7 Определение прочности бетонных элементов при различных объемных напряженных состояниях. Условия образования трещин по различным схемам.... 41
7.1 Условие прочности..... 43
7.2 Коэффициенты запаса прочности. Предельные напряжения. Уровень напряжения..... 46
7.3 Учет возраста бетона, длительности действия напряжений и других факторов 48
7.4 Разрушение и трещинообразование по различным схемам..... 49
7.5 Предельные деформации бетона..... 50
8 Связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения) для бетонных элементов при объемном напряженном состоянии..... 52
8.1 Общие положения.....52
8.2 Связи между полными напряжениями и деформациями в случае активной нагрузки..... 54
8.3 Разгрузка. Запись физических соотношений в конечных приращениях.....57
8.4 Единые зависимости для нагрузки и разгрузки. 59
8.5 Связи между напряжениями и деформациями с учетом влияния ползучести... 61
8.6 Преобразование физических соотношений при повороте осей координат..... 62
9 Оценка прочности железобетонных элементов без трещин и с трещинами при различных напряженных состояниях..... 65
9.1 Ортогональное (ортотропное) и косоугольное армирование. Учет дискретно расположенных стержней..... 65
9.2 Условия прочности железобетонных элементов без трещин.....67
9.3 Условия прочности железобетонных элементов с трещинами по арматуре и бетону..... 72
9.4 Подбор арматуры.....78
10 Связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения) для железобетонных элементов при объемном напряженном состоянии. Учет влияния образования и развития трещин по различным схемам..... 80
10.1 Физические соотношения для железобетонных элементов без трещин при ортотропном армировании..... 80
10.2 Железобетонные трехмерные элементы с трещинами при ортотропном армировании..... 81
10.3 Железобетонные элементы при косоугольном армировании.....100
10.4 Ширина раскрытия трещин. 101
11 Математические методы расчета массивных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности..... 103

11.1 Предварительные замечания..... 103
11.2 Постановка задачи. Система разрешающих уравнений и граничные условия.104
11.3 Общие методы решения..... 109
11.4 Метод упругих решений для нелинейных задач теории железобетона..... 109
11.5 Метод переменных параметров упругости. Слабоитерационный метод переменных параметров упругости на приращениях нагрузки.....111
11.6 Метод начальных напряжений..... 112
11.7 Критерии сходимости.....114
11.8 Численные методы решения задач.....115
11.9 Метод конечных разностей (МКР).....116
11.10 Разностные сетки, применяемые в МКР.....116
11.11 Общие принципы построения разрешающей системы уравнений.....118
11.12 Метод конечных элементов (МКЭ). Общая характеристика метода..... 119
11.13 Выбор функций формы, построение матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) и разрешающей системы уравнений..... 120
11.14 Условия совместности.....122
11.15 Объемные изопараметрические элементы..... 122
11.16 Численное интегрирование.....127
11.17 Пример формирования матрицы жесткости прямоугольного восьмиузлового изопараметрического элемента.....128
Библиография..... 131

Введение

В настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники остро встает проблема перевода методов расчета и проектирования строительных конструкций на полностью автоматизированную компьютерную основу. Весьма перспективным и назревшим представляется решение этой проблемы и для конструкций, работающих в условиях объемных напряженных, состояний. Среди них – массивные фундаментальные плиты толщиной до 4 м и более, массивные колонны под высокой нагрузкой, стены ядер жесткости высотных зданий, защитные оболочки, плотины и др.

В основу автоматизированных методов, как правило, закладываются современные вычислительные методы и в первую очередь метод конечных элементов (МКЭ). Однако в вопросах применения современных вычислительных методов к расчетам массивных железобетонных конструкций наблюдаются негативные тенденции, которые могут свести на нет все выгоды, связанные с автоматизацией. Речь идет о полном или частичном игнорировании факторов нелинейности бетона и железобетона и связанного с ним перераспределения усилий в программах расчета конструкций методом конечных элементов и другими методами. Это может привести к количественным, а иногда и к качественным искажениям реальной картины деформирования конструкций под нагрузкой, а в итоге – к понижению надежности конструктивных решений в одних случаях и неоправданному перерасходу материалов в других.

Разработка методического пособия направлена на развитие и совершенствование современных ЭВМ-программ расчета массивных конструкций с учетом в них сложных физико-механических свойств бетона и железобетона при объемных напряженных состояниях (особенностей прочности и нелинейных связей между напряжениями и относительными деформациями, влияния образования трещин по различных схемам, приобретаемой в процессе деформирования и трещинообразования анизотропии, ползучести, усадки, особенностей сцепления арматуры с бетоном и других факторов).

Известно, что каждый материал «входит» в механику с набором только ему присущих соотношений. К таким соотношениям относят связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения), а также обще критерии оценки прочности и трещиностойкости бетона и железобетона. В целом они образуют систему определяющих соотношений материала.

В методическом пособии обобщены многолетние исследования, выполненные в НИИЖБ, НИИСФ РААСН и в других институтах страны и за рубежом по конструированию и экспериментальной проверке определяющих соотношений для бетона и железобетона. Рассматривается самый общий случай – объемное напряженное состояние. Это отвечает поставленной задаче расчета массивных конструкций. В виде частных случаев из полученных соотношений следуют соотношения для плоского и одноосного напряженных состояний, что существенно раздвигает возможности использования представленных зависимостей для расчета различных (не только массивных) конструкций.

Методическое пособие разработано для применения специалистами, чья деятельность связана с проектированием и оценкой надежности массивных железобетонных конструкций современных зданий и сооружений, включая:

– специалистов проектных организаций;

– органов лицензирования сертификации, а также проверки безопасности конструктивных решений.

Методическое пособие разработано авторским коллективом НИИСФ РААСН, членами и советниками РААСН (руководитель работы – д-р техн. наук *Н.И. Карпенко* (разделы 1 – 11); д-р техн. наук *В.И. Травуш* (разделы 1 – 5, 11), *С.Н. Карпенко* (разделы 4 – 11), *В.И. Корсун* (разделы 6 – 7), *А.Н. Петров* (разделы 6, 8), *В.А. Ерышев* (раздел 6), *Л.И. Ярин* (раздел 11); канд. техн. наук *И.Г. Чепизубов* (разделы 5, 6); научные сотрудники: *Г.А. Моисеенко* (разделы 5, 6), *М.В. Степанов* (разделы 5, 6), *Н.Г. Семенова* (оформление разделов 1 – 11).

1 Область применения

Пособие предназначено для расчета массивных железобетонных конструкций, работающих в условиях трехосного напряженного состояния (толстых плит, массивных стержней, массивных стен и ядер жесткости, например, высотных зданий, защитных оболочек, толстостенных сосудов и др.), а также, в частных случаях, немассивных конструкций (например, плит перекрытий и монолитных стен жесткости сложной конфигурации), отдельные области которых деформируются в условиях объемного напряженного состояния, на статические (или приводимые к ним) нагрузки, вынужденные деформации или перемещения вследствие внутренних и внешних силовых воздействий. Однако методы расчета и проектирования таких конструкций практически не нашли отражения в СП 63.13330.2018 «СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения». Разработка данного методического пособия в дополнение к СП 63.13330 направлена на устранение этого недостатка.

В методическом пособии обобщены физические модели и математические методы, ориентированные, в основном, на использование в программах и программных комплексах расчета конструкций современными вычислительными средствами.

Пособие может компенсировать отсутствие нормативных документов по составлению алгоритмов и программ расчета массивных и традиционных железобетонных конструкций с полным учетом физической нелинейности применительно к современным математическим методам.

По мере увеличения скорости вычислительных средств по объемным моделям с использованием МКЭ можно будет рассчитывать все виды железобетонных конструкций вплоть до балок и колонн.

Методическое пособие включает современные методы расчета и проектирования, основанные на использовании современных объемных моделей деформирования и исчерпания прочности бетона и железобетона с учетом различных факторов физической нелинейности, влияния трещинообразования,

приобретаемой и конструктивной анизотропии при трехосных напряженных состояниях.

Методическое пособие включает методы, направленные на решение задач расчета массивных железобетонных монолитных и сборных конструкций малозатратными слабоитерационными и безитерационными способами расчета.

2 Нормативные ссылки

В настоящем методическом пособии использованы ссылки на следующие нормативные документы:

СП 63.13330.2018 «СНиП 52-01-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» (с изменением № 1);

ГОСТ 27751–2014 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения и требования».

3 Термины и определения

В настоящем методическом пособии применяются следующие термины с соответствующими определениями:

3.1 о**бъемное напряженное состояние:** Напряженное состояние, характеризующееся у каждой точки в декартовых осях координат *x, y, z* шестью компонентами тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ (в бетоне $\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \sigma_{bz}, \tau_{bxy}, \tau_{byz}, \tau_{bzx}$).

3.2 **главные напряжения:** Объемное напряженное состояние характеризуется главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (в бетоне $\sigma_{b1}, \sigma_{b2}, \sigma_{b3}$). Рассматривается напряженное состояние у точки в осях *n, m, l* (или 1, 2, 3), повернутых относительно осей *x, y, z* на определенные углы, приводящие к условиям, когда касательные напряжения ($\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$) становятся равными нулю, а нормальные напряжения, обозначаемые $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, становятся главными.

3.3 **инварианты напряженного состояния:** Главные напряжения и отдельные соотношения между напряжениями, не зависящие от поворота осей координат.

3.4 **Диаграммы деформирования материалов:** Связи между напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры при одноосном напряженном состоянии, которые претерпевают существенные изменения (трансформацию) при объемном напряженном состоянии.

3.5 **исходные характеристики бетона и арматуры:** Нормативные (R_{bn}, R_{btn}) и расчетные (R_b, R_{bt}) характеристики бетона; нормативные (R_{sn}) и расчетные (R_s) характеристики арматуры; начальные модули упругости бетона E_b и арматуры E_s.

3.6 **прочность бетона при объемном напряженном состоянии:** Прочность бетонных элементов считается обеспеченной, если соблюдается критерий прочности.

3.7 **критерий прочности:** Определенная функция между главными напряжениями, их инвариантами и исходными характеристиками бетона, которая должна быть меньше или равна нулю (≤ 0); при нарушении этого условия (при > 0) наступает разрушение бетона.

3.8 **схемы исчерпания прочности бетона:** Различают четыре схемы исчерпания прочности бетона (схема 0 – разрушение элемента по всему объему; схема 1 – образование трещин вдоль площадок приложения напряжений σ_{b1}; схема 2 – образование трещин по двум ортогональным направлениям – вдоль площадок приложения σ_{b1} и σ_{b2}; схема 3 – образование трещин по трем ортогональным направлениям.

3.9 **деформированные состояния бетона при объемном напряженном состоянии:** Деформированные состояния бетонного элемента при объемном напряженном состоянии в главных осях 1, 2, 3 представляются тремя относительными главными деформациями ε_{b1}, ε_{b2}, ε_{b3} и тремя сдвиговыми деформациями γ_{b12}, γ_{b23}, γ_{b31}, которые равны нулю. Они остаются для удобства матричных преобразований.

3.10 **физические соотношения для бетонных элементов:** Связь между напряжениями и относительными деформациями. Физические соотношения устанавливаются в главных осях 1, 2, 3 как для нелинейного ортотропного материала, а затем переводятся в глобальную систему координат *x, y, z*.

3.11 **ортогональное (ортотропное) армирование:** Армирование с расположением арматуры по трем ортогональным направлениям (вдоль осей *x, y, z*).

3.12 **коэффициенты армирования** μ_{sx}, μ_{sy}, μ_{sz}**:** Площади стержней, приходящиеся на единицу площади плоскости, проведенной к направлениям стержней.

3.13 **косоугольное армирование:** дисперсное армирование стержнями, расположенными под произвольным углом к осям координат, μ_{sc} – коэффициент косоугольного армирования.

3.14 **виды критериев прочности железобетонных элементов:** Используются два вида критериев прочности – для железобетонных элементов без трещин и для железобетонных элементов с трещинами. В первом случае используются прочностные характеристики бетона и арматуры, а во втором – прочностные характеристики арматуры в сечениях с трещинами и отдельно (в отдельном условии) прочностные характеристики бетона между трещинами.

3.15 **физические соотношения для железобетонных элементов:** Связи между напряжениями и относительными деформациями до и после образования трещин по различным схемам.

3.16 **методы решения физически нелинейных задач железобетона:** Метод упругих решений, метод переменных параметров упругости, метод начальных напряжений, метод конечных разностей, метод конечных элементов, новый слабоитерационный метод конечных элементов с представлением физических соотношений в конечных приращениях.

4 Общие положения

Представленные модели и методы расчета массивных железобетонных конструкций основываются на следующих предпосылках:

4.1 Рассматриваются конструкции, работающие в условиях объемного напряженного состояния.

4.2 Расчет конструкций по предельным состояниям первой и второй групп производят по напряжениям (усилиям), деформациям и перемещениям, вычисляемым с учетом физической нелинейности и анизотропии бетона и железобетона, а в необходимых случаях – ползучести, термоползучести и накопления повреждений (в длительных процессах).

Примечание – Анизотропия – неодинаковость свойств (здесь – механических) по разным направлениям. Ортотропия – вид анизотропии, при котором имеются три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств.

4.3 Физическую нелинейность, анизотропию и ползучесть учитывают в физических соотношениях, связывающих между собой напряжения и относительные деформации. При этом следует выделять две стадии деформирования элементов – до и после образования трещин. Особенности разрушения бетона и железобетона учитывают в условиях (критериях) прочности, ограничивающих область безопасных (не вызывающих разрушение) напряжений.

4.4 Общие физические соотношения базируются на исходных одноосных диаграммах связи между напряжениями и деформациями в бетоне и арматуре и их трансформациях в зависимости от знака напряжений (сжатие «–», растяжение «+»), длительности действия напряжений, режима их приложения (мягкий, жесткий), влияния влажностных и других факторов.

4.5 До образования трещин для бетона используют нелинейные физические соотношения ортотропной модели, позволяющие учитывать неоднородность деформирования при сжатии и растяжении и влияние на деформации направленного развития в структуре бетона множества микротрещин, а также трещин большей протяженности (дефектов отрыва) в зависимости от напряженного состояния.

Для железобетона в стадии до образования трещин исходят из совместности осевых деформаций арматуры и окружающего бетона за исключением концевых участков арматуры, не снабженных специальными анкерами.

При опасности выпучивания арматуры следует ограничивать ее предельные сжимающие напряжения.

4.6 В общих условиях прочности бетона учитывают сочетание напряжений на площадках разных ортогональных направлений, в силу которых, в частности, его сопротивление двух- и трехосному сжатию превышает прочность при одноосном сжатии, а при комбинациях сжатия и растяжения может быть меньше, чем при действии одного из них. В необходимых случаях должна приниматься во внимание длительность действий напряжений.

Геометрическая интерпретация условия прочности в пространстве трех главных напряжений – поверхность, которая должна удовлетворять как традиционным требованиям (выпуклость, непрерывность, симметрии относительно гидростатической оси), так и обладать следующими специфическими свойствами:

быть функцией инвариантов тензора напряжений;

характеризоваться девиаторными кривыми, которые меняют форму при переходе от трехосного растяжения к сжатию-растяжению и трехосному сжатию, отображая этим различные механизмы разрушения бетона (отрывной; смешанный отрывно-сдвиговый; сдвиговый);

являться в области трехосного равномерного сжатия разомкнутой для плотных бетонов и замкнутой – для пористых (однако для плотных бетонов на величины напряжений трехосного равномерного сжатия ставится дополнительное ограничение, связанное с соблюдением целостности бетона как материала после разгрузки).

Условие прочности железобетона без трещин составляют, исходя из условий прочности составляющих материала (бетона и арматуры), как двухкомпонентной среды.

4.7 В качестве условия трещинообразования используют условия прочности бетона двухкомпонентной среды с учетом влияния физической нелинейности и в некоторых случаях, в основном в изгибаемых элементах, влияния градиентов деформаций и напряжений.

4.8 Для железобетона после образования трещин в бетоне используют нелинейные физические соотношения анизотропного тела общего вида, устанавливаемые с учетом следующих факторов:

– углов наклона трещин к арматуре и схем пересечения трещин;

– раскрытия трещин и сдвига их берегов;

– жесткости арматуры при осевых деформациях под действием напряжений в трещинах с учетом влияния на деформации сил сцепления арматуры с полосами или блоками бетона между трещинами;

– жесткости арматуры при тангенциальных перемещениях ее у берегов трещины под действием касательных напряжений в арматуре в трещинах с учетом податливости бетонного основания у берегов трещин;

– жесткостей бетона между трещинами при продольных (вдоль трещин) и сдвиговых (по нормали к трещинам) деформациях под действием соответствующих нормальных и касательных напряжений и снижения этих жесткостей для схем пересекающихся трещин;

– жесткостей остаточных бетонных связей зацепления берегов трещин при сдвигах берегов при достаточно малой ширине раскрытия трещин;

– нарушения совместности осевых деформаций арматуры и бетона между трещинами с сохранением лишь условия совместности перемещений арматуры и бетона по середине полос или блоков между трещинами.

В физических соотношениях для бетонных элементов с трещинами учитывается лишь жесткость бетона между трещинами и жесткость связей зацепления берегов трещин (при малом их раскрытии).

4.9 Ширину раскрытия трещин и взаимный сдвиг их берегов определяют исходя из смещений стержней различных направлений относительно

пересекаемых ими берегов трещин с учетом расстояний между трещинами и при соблюдении условия совместности этих смещений в трещине.

4.10 Условия прочности плоских и объемных элементов с трещинами основывают на следующих предпосылках:

– сопротивление бетона сжатию снижается из-за возникновения растяжений в перпендикулярном направлении, создаваемого силами сцепления с растянутой арматурой, а также при образовании пересекающихся трещин;

– при определении прочности арматуры учитываются схемы образования трещин и углы наклона трещин к арматуре;

– в стрежнях арматуры учитываются, как правило, нормальные напряжения, направленные вдоль их оси; допускается учитывать касательные напряжения в арматуре в местах трещин (нагельный эффект), принимая, что стержни не изменяют своей ориентации;

– принимается, что в трещине разрушения все пересекающие ее стержни арматуры, имеющие площадку текучести, достигают расчетных сопротивлений на растяжение; для стержней арматуры, не имеющих предела текучести, напряжения должны контролироваться в процессе деформационного расчета (или вводиться в виде расчетных сопротивлений с соответствующими коэффициентами условия работы).

Прочность бетона в различных его зонах оценивают по напряжениям в нем как в компоненте двухкомпонентной среды (за вычетом приведенных напряжений в арматуре между трещинами, определяемых с учетом напряжений в трещинах, сцепления и частичного нарушения совместности осевых деформаций арматуры с бетоном).

4.11 Физические соотношения для железобетона, а также известные уравнения равновесия, совместности деформаций, геометрические соотношения и граничные условия составляют системы определяющих уравнений механики бетона и железобетона. Поскольку элементы матриц жесткости физических соотношений (условной жесткости) не являются константами, а представляются функциями напряжений, деформаций или неаналитическими зависимостями типа

вычислительного оператора, то решение задач, в основном, выполняется численными методами. Разрешающие уравнения в основном конструируются с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Могут использоваться и другие методы: граничных элементов (МГЭ), конечных разностей (МКР) и вариационно-разностный (ВРМ). Решение разрешающих уравнений осуществляется шагово-итерационными методами, в основе которых, как правило, лежат различные модификации метода упругих решений применительно к железобетону.

4.12 Несущую способность железобетонных конструкций, способных претерпевать достаточные пластические деформации, допускается определять методом предельного равновесия, используя в качестве условий текучести соответствующие условия прочности железобетонных элементов (в основном с арматурой, имеющей достаточно протяженную площадку текучести).

4.13 Статический расчет конструкций выполняют отдельно на действие расчетных нагрузок (для оценки предельных состояний первой группы) и отдельно на действие эксплуатационных нагрузок (для оценки предельных состояний второй группы) с использованием, за некоторыми исключениями (они оговорены в разделах), соответствующих этим предельным состояниям значений характеристик бетона и арматуры по СП 63.13330. Значения этих характеристик умножаются на значения дополнительных коэффициентов условий работы, учитывающие особенности свойств бетона и арматуры при неодноосных и неоднородных напряженных состояниях. В отдельные формулы введены значения нормативных характеристик материалов (например, бетона R_{bn}, R_{btn}). Условно принято, что таким образом обозначенные величины не должны изменяться при расчетах по предельным состояниям обеих групп.

4.14 Расчет конструкций с учетом физической нелинейности, как правило, выполняют на каждую комбинацию (сочетание) нагрузок совместно с подбором соответствующего армирования сечений или его проверкой, если армирование задано. По подобранным коэффициентам армирования строится огибающая эпюра армирования для всех комбинаций нагрузок и по ней проводится окончательное

конструирование. При наличии данных учитывается последовательность приложения комбинаций нагрузок и их взаимное влияние.

4.15 Помимо внешних и внутренних нагрузок учитывают усилия обжатия их предварительно напряженной арматурой. Усилия обжатия могут учитываться как внутренние силы (начальные напряжения), вводимые в физические соотношения, и как внешние силы, равные контролируемым усилиям за вычетом первых потерь и приложенные на уровне центра тяжести напрягаемой арматуры в виде некоторой равнодействующей или в виде распределенных по длине зон анкеровки следящих сил (или в виде того и другого в зависимости от вида преднапряжения).

4.16 При расчете конструкций по прочности, деформациям, образованию и раскрытию трещин методом конечных элементов должны быть проверены условия прочности и трещиностойкости для всех конечных элементов, составляющих конструкцию, а также условия возникновения чрезмерных перемещений конструкции.

4.17 При оценке предельного состояния по прочности на экстремальные внутренние и внешние воздействия допускается учитывать возможную работу отдельных конечных элементов на нисходящих ветвях деформирования с развитием больших пластических деформаций, если это не влечет за собой потери конструкцией своих эксплуатационных и защитных свойств и развитие прогрессирующего разрушения и по истечении действия рассматриваемой нагрузки возникающие при этом повреждения могут быть устранены без риска для здоровья людей и загрязнения окружающей среды. В других случаях эти факторы моделируют лишь с тем, чтобы выявить действительные прочностные и деформативные свойства сооружений.

4.18 Общие принципы расчета и проектирования массивных железобетонных конструкций основаны на развитии принципов расчета, изложенных в методическом пособии «Статически неопределимые железобетонные конструкции. Диаграммные методы автоматизированного расчета и проектирования», на более общий класс железобетонных конструкций,

работающих в условиях объемного напряженного состояния. Таким образом они становятся применимыми для различных железобетонных конструкций.

5 Соотношения теории напряжений и теории деформаций, характеризующие трехосное (объемное) напряженно-деформированное состояние элементов

5.1 Напряженное состояние объемного (трехмерного) элемента в ортогональных осях *x, y, z* характеризуется шестью компонентами тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ (рисунок 5.1). При рассмотрении общих вопросов предлагается использовать тензорные обозначения, которые позволяют записывать ряд формул в компактном виде. При использовании тензорной символики декартовы координаты *x, y, z* обозначают x_1, x_2, x_3 или в общем виде x_i, где индекс i принимает значения 1, 2, 3.

Нормальные напряжения обозначают $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, а касательные $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$. Общий компонент записывают в виде $\sigma_{ij}(i, j = 1,2,3)$. Отдельные компоненты получаются из общего заменой букв i и j цифрами 1, 2 и 3. В дальнейшем под σ_{ij} будем понимать также совокупность всех девяти компонентов тензора напряжений.

5.2 Напряженное состояние можно также характеризовать главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Кроме этого используются следующие инвариантные характеристики напряженного состояния:

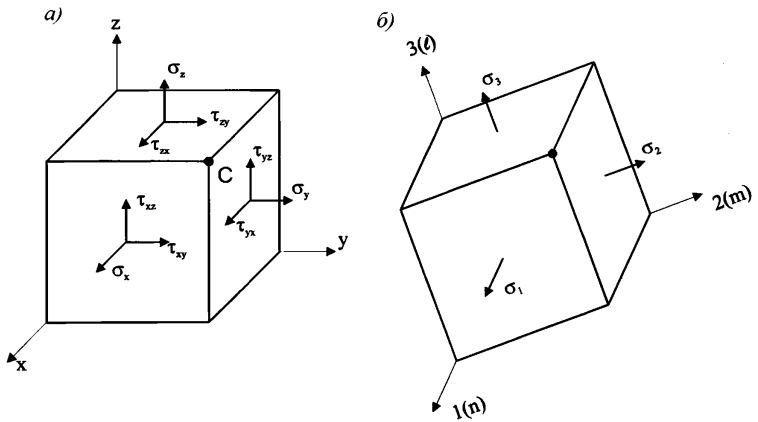
σ_o – нормальное октаэдрическое (среднее) напряжение;

$I_2(D_\sigma)$ – второй инвариант девиатора напряжений;

$I_3(D_\sigma)$ – третий инвариант девиатора напряжений.

Эти характеристики связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями:

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \qquad (5.1)$$



а – в произвольных осях; *б* – в осях главных напряжений 1, 2, 3

Рисунок 5.1 – Компоненты тензора напряжений:

$$I_2(\mathrm{D}_\sigma)=\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]=$$
$$=\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]; \qquad (5.2)$$

$$I_3(\mathrm{D}_\sigma)=(\sigma_x-\sigma_o)(\sigma_y-\sigma_o)(\sigma_z-\sigma_o)-(\sigma_x-\sigma_o)\tau_{yz}^2-$$
$$-(\sigma_y-\sigma_o)\tau_{zx}^2-(\sigma_z-\sigma_o)\tau_{xy}^2+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \qquad (5.3)$$

Производными второго инварианта девиатора напряжений служат:

T – интенсивность касательных напряжений;

τ_o – октаэдрическое касательное напряжение, которые определяются по формулам:

$$T=\sqrt{I_2(\mathrm{D}_\sigma)}; \qquad (5.4)$$

$$\tau_o=\sqrt{\frac{2}{3}I_2(\mathrm{D}_\sigma)}=\sqrt{\frac{2}{3}}T\,. \qquad (5.5)$$

Характеристики напряженного состояния, связанные со вторым и третьим инвариантами девиатора напряжений:

φ_σ – угол вида напряженного состояния,

μ_σ – параметр Лоде-Надаи по напряжениям.

Эти характеристики определяются соотношениями:

$$cos3\omega_\sigma = -\frac{3\sqrt{3}\,I_3(\mathrm{D}_\sigma)}{2\sqrt{I_2^3(\mathrm{D}_\sigma)}} \quad \text{откуда} \quad \varphi_\sigma = \frac{1}{3}arccos\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{I_3(\mathrm{D}_\sigma)}{[I_2(\mathrm{D}_\sigma)]^{3/2}}\right\} \qquad (5.6)$$

$$\left(0 \le \varphi_\sigma \le \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\varphi_\sigma + \frac{\pi}{3}\right) \qquad (5.7)$$

$$(-1 \le \mu_\sigma \le +1).$$

Параметр μ_σ, выраженный через главные напряжения, записывается в виде

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \qquad (5.8)$$

Главные напряжения определяются формулами:

при использовании инвариантов σ_o, T и φ_σ

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_o + \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\left(\varphi_\sigma - \frac{\pi}{3}\right);\\
\sigma_2 &= \sigma_o + \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\left(\varphi_\sigma + \frac{\pi}{3}\right);\\
\sigma_3 &= \sigma_o - \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\varphi_\sigma.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

при использовании инвариантов σ_o, τ_o и μ_σ

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_o + \frac{3-\mu_\sigma}{\sqrt{2}\left(3+\mu_\sigma^2\right)^{1/2}}\tau_o;\\
\sigma_2 &= \sigma_o + \frac{\sqrt{2}\mu_\sigma}{\left(3+\mu_\sigma^2\right)^{1/2}}\tau_o;\\
\sigma_3 &= \sigma_o - \frac{3+\mu_\sigma}{\sqrt{2}\left(3+\mu_\sigma^2\right)^{1/2}}\tau_o.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

5.3 Направляюще косинусы между главными напряжениями и осями координат $i = x, y, z$ определяются выражениями

$$l_{ei} = A_{ei} / A_e, \qquad (5.11)$$

где l_{ei} – направляющие косинусы между рассматриваемым главным напряжением σ_e и i -й осью координат $(i = x = 1;\ i = y = 2;\ i = z = 3)$ причем

$l_{e1}^2 + l_{e2}^2 + l_{e3}^2 = 1$; A_{ei} – адъюнкта i -го элемента строки e матрицы $\left|\sigma_{ei} - \sigma_e \mathrm{E}\right|$; E – единичная матрица $(e = 1, 2, 3)$;

$$A_e = \left(\sum_{i=1}^{3} A_{ei}^2 \right)^{1/2}. \tag{5.12}$$

Например, при $e = 1$, $i = 1, 2, 3$ (или i=x, y, z)

$$A_1 = \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2} = \sqrt{A_{1x}^2 + A_{1y}^2 + A_{1z}^2}\,.$$

В развернутом виде адъюнкты записываются выражениями

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix}; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix}; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} \end{vmatrix}; \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_2 \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_2 & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma_2 \end{vmatrix}; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_2 & \tau_{xy} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} \end{vmatrix} \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \sigma_y - \sigma_3 & \tau_{yz} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yz} \end{vmatrix}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_3 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Если $A_e = 0$, то

при $\sigma_x = \sigma_e$ $\quad l_{ex} = 1, \quad l_{ey} = l_{ez} = 0;$

при $\sigma_y = \sigma_e$ $\quad l_{ey} = 1, \quad l_{ex} = l_{ez} = 0;$

при $\sigma_z = \sigma_e$ $\quad l_{ez} = 1, \quad l_{ex} = l_{ey} = 0.$

5.4 Деформированное состояние объемного (трехмерного) элемента в ортогональных осях x, y, z характеризуется шестью компонентами деформаций ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Компоненты ε_x, ε_y, ε_z, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ образуют симметричный тензор деформаций. Подобно компонентам тензора напряжения σ_{ij} под символом ε_{ij} понимают соответствующий компонент тензора деформаций или совокупность всех девяти компонентов тензора деформаций.

Деформированное состояние можно также характеризовать главными линейными деформациями ε_1, ε_2, ε_3, а также инвариантами типа (5.1) – (5.10), где σ заменяется на ε, а τ на $\frac{1}{2}\gamma$.

5.5 Углы между направлениями главных напряжений и осями координат могут быть представлены в виде частного случая угла поворота осей x, y, z в положение x', y', z' (или $n,\ m,\ l$). При этом тензор напряжений σ_{ij} преобразуется в тензор σ'_{ek} по формуле

$$\sigma'_{ek} = \sigma_{ij} l_{ei} l_{kj}, \tag{5.14}$$

где l_{ij} – направляющие косинусы углов между старыми и новыми осями (рисунок 5.2) определяются тремя строками таблицы 5.1.

Таблица 5.1

	x	y	z
$x'(n)$	$l_{11}(n_x)$	$l_{12}(n_y)$	$l_{13}(n_z)$
$y'(m)$	$l_{21}(m_x)$	$l_{22}(m_y)$	$l_{23}(m_z)$
$z'(l)$	$l_{31}(l_x)$	$l_{32}(l_y)$	$l_{33}(l_z)$
α	l_{j1}	l_{j2}	l_{j3}

Первый индекс при l обозначает номер новой оси, второй – номер старой оси координат.

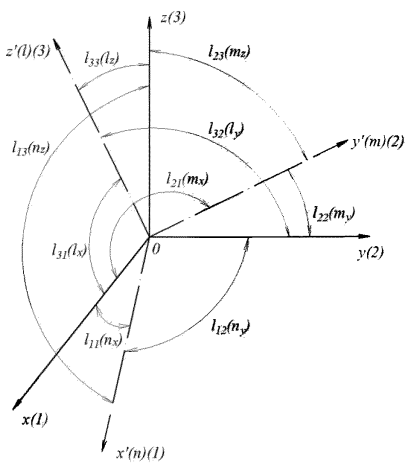


Рисунок 5.2 – Схемы обозначений направляющих косинусов углов поворота осей координат

Формула (5.14) представляет собой сокращенную запись двойного суммирования, которое производится по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$. Индексы e, k, стоящие в правой и левой частях формулы, –неповторяющимиеся или свободные. Для примера приведем отдельные компоненты тензора σ'_{ek} в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma'_{11} = \sigma_{11}l_{11}^2 + \sigma_{12}l_{11}l_{12} + \sigma_{13}l_{11}l_{13} + \sigma_{21}l_{12}l_{11} + \\
&+ \sigma_{22}l_{12}^2 + \sigma_{23}l_{12}l_{13} + \sigma_{31}l_{13}l_{11} + \sigma_{32}l_{13}l_{12} + \sigma_{33}l_{13}^2; \\
&\sigma'_{12} = \sigma_{11}l_{11}l_{21} + \sigma_{12}l_{11}l_{22} + \sigma_{13}l_{11}l_{23} + \sigma_{21}l_{12}l_{21} + \\
&+ \sigma_{22}l_{12}l_{22} + \sigma_{31}l_{13}l_{21} + \sigma_{32}l_{13}l_{22} + \sigma_{33}l_{13}l_{23}; \\
&\cdots\cdots\cdots

повышенных температур в диаграммы изохроны. Условно к разделу диаграмм также относятся нормируемые меры ползучести и усадки бетона.

Аналитические выражения диаграмм подобраны таким образом, что они, в последующих разделах, удобно входят в матрицы жесткости железобетона, представляются как через напряжения так и деформации (исходя из решения задач в напряжениях или деформациях), а также сравнительно просто трансформируются при учете неодноосных напряженных состояний.

Аналитические выражения для диаграмм записаны применительно к расчету конструкций по предельным состояниям второй группы. Если расчет ведется по предельным состояниям первой группы, то во всех формулах характеристики бетона $R_{b.ser}, R_{bt.ser}$ и арматуры $R_{s.ser}$ заменяются на R_b, R_{bt}, R_s.

6.1 Диаграммы деформирования бетонов

6.1.1 Характеристики бетонов

Характеристики бетонов, используемых в расчетах статически неопределимых железобетонных конструкций, приведены в пунктах 6.1.1 – 6.1.12 СП 63.13330.2018. Основными прочностными характеристиками бетона являются нормативные значения сопротивления бетона осевому сжатию R_{bn} и сопротивление осевому растяжению R_{btn}, устанавливаемые с обеспеченностью 0,95. По ним опеределяются расчетные характеристики бетона сжатию (с индексом b) и растяжению (с индексом *bt*) по предельным состояниям первой (R_b, R_{bt}) и второй ($R_{b.ser}$, $R_{bt.ser}$) групп. Эти характеристики приведены в СП 63.13330.

6.1.2 Виды диаграмм

В расчетах статически неопределимых конструкций используются следующие виды диаграмм деформирвоания бетона при кратковременном действии нагрузок:

– нормативных – при расчете на кратоковременное действие нагрузок;

– расчетных.

Нормативные диаграммы используются для расчета конструкций по предельным сосотояниям второй группы.

Диаграмма имеет две ветви: одна ветвь относится к сжатию (рисунок 6.1, а), а вторая – к растяжению (рисунок 6.1, б). Напряжения и деформации сжатия принимаются отрицательными, а растяжения – положительными.

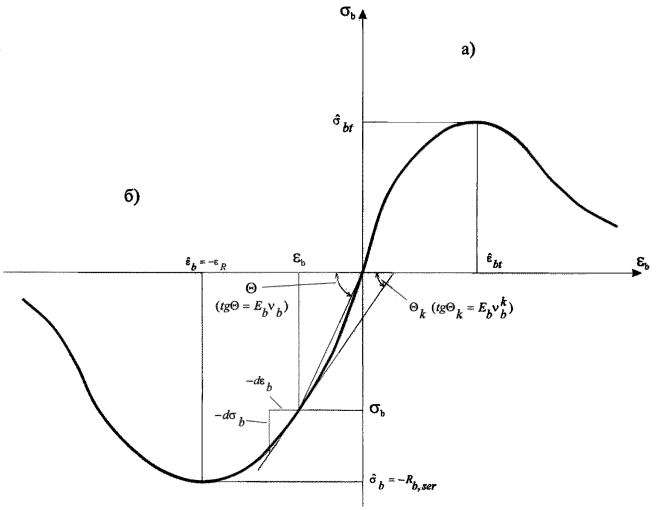


Рисунок 6.1 – Диаграмма деформирования бетона при растяжении (*а*) и сжатии (*б*)

6.1.3 Диаграмма сжатия бетона

Аналитическую зависимость описания диаграммы сжатия бетона «ε_b - σ_b» (рисунок 6.1, а) рекомендуется принимать по формуле:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b \nu_b}, \tag{6.1}$$

где E_b – начальный модуль упругости бетона (назначается по таблице 6.11 СП 63.13330.2018);

ν_b – коэффициент изменения секущего модуля, который вычисляется по формуле

$$\nu_b = \hat{\nu}_b \pm (\nu_0 - \hat{\nu}_b)\sqrt{1 - \omega\eta - (1-\omega)\eta^2} \tag{6.2}$$

(для восходящей ветви диаграммы применяется знак плюс «+», а нисходящий – минус «–»),

где η – уровень напряжений в бетоне (положительная величина),

$$\eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b, \tag{6.3}$$

σ_b – текущее напряжение в бетоне,

$\hat{\sigma}_b$ – напряжение в вершине диаграммы, для нормативной диаграммы $\hat{\sigma}_b = -R_{b.ser}$,

$\hat{\nu}_b$ – коэффициент изменения секущего модуля в вершине диаграммы (положительное значение),

$$\hat{\nu}_b = \frac{\hat{\sigma}_b}{E_b \hat{\varepsilon}_b} \tag{6.4}$$

$\hat{\varepsilon}_b$ – деформация бетона в вершине диаграммы (для напряжений сжатия – отрицательное значение)

$$\hat{\varepsilon}_b = -\frac{B}{E_b}\lambda \frac{1+\left(0,8-0,15\frac{B^2}{10000}\right)\lambda B/60+0,2}{0,12+1,03B/60} \tag{6.5}$$

,

здесь λ – безразмерный коэффициент, зависящий от вида бетона, принимаемый равным:

для тяжелого и мелкозернистого бетона $\lambda = 1$;

для легкого и поризованного бетона средней плотности D (кг/м^3) $\lambda = D/2400$;

для ячеистого бетона $\lambda = 0,25+0,35B$;

ν_0 – начальный коэффициент изменения секущего модуля,

ω – коэффициент, характеризующий кривизну диаграммы,

для восходящей ветви диаграммы в зависимости (6.2)

$$\nu_0 = 1,0; \qquad \omega = 2-2,5\hat{\nu}_b; \tag{6.6}$$

для нисходящей ветви диаграммы в зависимости (6.2)

$$\nu_0 = 2,5\hat{\nu}_b; \quad \omega = 1,95\hat{\nu}_b - 0,138; \tag{6.7}$$

$$\eta \geq 1-0,2\sqrt{\frac{B^* - B}{B^* + B}},$$

здесь B^* – фиксированный класс бетона, начиная с которого ниспадающая ветвь бетона исключается из расчета (B^*=105 МПа).

При определении значений ν_b для сжатой зоны изгибаемых, внецентренно сжатых и внецентренно растянутых элементов при условии, что ее высота x удовлетворяет условно

$$0{,}2h_0 \le x \le 0{,}5h_0 \tag{6.8}$$

значения ω допускается определять:

для восходящей ветви $\omega = 2 - 1{,}4\hat{\nu}_b$,

для нисходящей ветви $\omega = 2\hat{\nu}_b - 0{,}13$,

h_0 – полезная высота сечения, если высота сжатой зоны располагается в нижней части сечения h_0 заменяется на h_0'.

Коэффициент ν_b также определяется через уровень деформаций $\eta_d = \varepsilon_b / \hat{\varepsilon}_b$ из решения квадратного уравнения

$$A\nu_b^2 + B\nu_b + C = 0, \tag{6.9}$$

где

$$A = \hat{\nu}_b^2 + (1-\omega)\eta_d^2\left(\nu_0 - \hat{\nu}_b\right)^2;$$

$$B = 2\hat{\nu}_b^3 - \omega\eta_d\hat{\nu}_b\left(\nu_0 - \hat{\nu}_b\right)^2;$$

$$C = \hat{\nu}_b^2\left(\nu_0^2 - 2\nu_0\hat{\nu}_b\right) = 0.$$

При решении (6.9) перед квадратным корнем принимается знак плюс.

6.1.4 Диаграмма растяжения бетона

Аналитическую зависимость описания диаграммы растяжения бетона «$\varepsilon_{bt} - \sigma_{bt}$» (рисунок 6.1 б) рекомендуется принимать в виде формул (6.1), (6.2), (6.6) – (6.9), где ε_b, $\hat{\varepsilon}_b$, σ_b, $\hat{\sigma}_b$, ν_b, $\hat{\nu}_b$ заменяются соответственно на $\varepsilon_{bt}, \hat{\varepsilon}_{bt}, \sigma_{bt}, \hat{\sigma}_{bt}, \nu_{bt}, \hat{\nu}_{bt}$

$$\eta = \sigma_{bt} / \hat{\sigma}_{bt}, \tag{6.10}$$

где $\hat{\sigma}_{bt}$, $\hat{\varepsilon}_{bt}$ – напряжение и относительные деформации в вершине диаграммы растяжения, для нормативной диаграммы

$$\left.\begin{aligned} \hat{\sigma}_{bt} &= R_{bt.ser}\gamma_{btq};\quad \hat{\varepsilon}_{bt} = \frac{\hat{\sigma}_{bt}}{E_b\hat{\nu}_{bt}};\\ \hat{\nu}_{bt} &= \left(0,55+0,15R_{bt.ser}/R_{0,bt}\right)\tilde{\gamma}_{btq}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

здесь $R_{0,bt} = 2,5 МПа$,

γ_{btq} – коэффициент, учитывающий влияние градиентов деформаций на трещиностойкость: при выполнении условия (6.8) коэффициент $\tilde{\gamma}_{btg}$ определяется по формуле

$$0,97 \le \tilde{\gamma}_{btg} = 2,07 - \sqrt[5]{h/h_э} \qquad (6.12)$$

здесь, $h_э = 0,3$ м – некоторая эталонная высота сечения,

в остальных случаях $\tilde{\gamma}_{btg} = 1$.

Коэффициенты ω определяются по формулам (6.6), (6.7) с учетом их корректировок при выполнении условия (6.8).

Допускается для изгибаемых элементов из тяжелого бетона значение $\tilde{\gamma}_{btg}$ определять по зависимости

$$\tilde{\gamma}_{btg} = 0,73 + 0,27\sqrt[4]{r/r_{0t}}, \qquad (6.13)$$

где $r/r_{0t} \ge 1$, r – кривизна элемента; r_{0t} – некоторая эталонная кривизна,

$r_{0t} = \left(11+13\frac{R_{btn}}{R_0}\right)\cdot\frac{1}{L}$, $R_0 = 2$ МПа, $L = 10^5$ м.

Как для сжатого, так и для растянутого бетонов нисходящая ветвь при двухзначной эпюре напряжений используется до уровня напряжений η = 0,85 (рисунок 6.1). После этого уровня соответствующий элемент бетона принимается выключенным из работы. Для бетонов класса выше В80 ниспадающая ветвь не учитывается.

За максимальное принимается усилие, которое может быть воспринято сечением с учетом выключения из работы отдельных слоев бетона, деформации которых превышают предельные значения.

6.1.5 Запись диаграмм в конечных приращениях

Эта форма записи диаграмм используется при расчете конструкции путем последовательного шагового нагружения. В этом случае переход от точки i на

диаграмме к точке $i+1$ осуществляется по хорде $i \div i+1$ (рисунок 6.2) с использованием зависимости

$$\Delta\varepsilon_b = \frac{\Delta\sigma_b}{E_b \nu_b^k}, \tag{6.14}$$

где (применительно к рисунок 6.2)

$$\Delta\varepsilon_b = \Delta\varepsilon_{bi} = (\varepsilon_{bi+1} - \varepsilon_{bi});$$
$$\Delta\sigma_b = \Delta\sigma_{bi} = (\sigma_{bi+1} - \sigma_{bi});$$
$$E_b \nu_b^k = E_b \nu_{bi}^k = tg\alpha_i,$$

α_i – угол наклона хорды к оси ε_b.

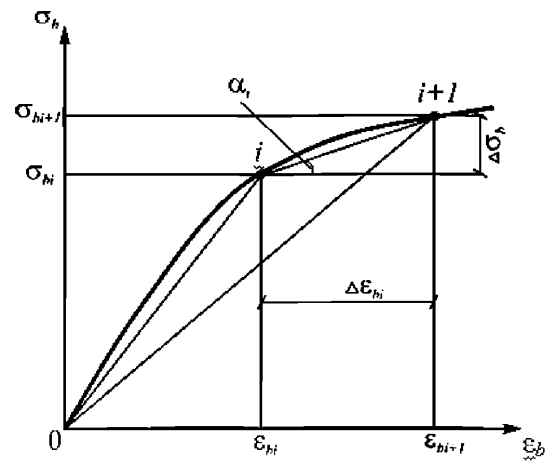


Рисунок 6.2. – К построению связей между приращениями напряжений и приращениями деформаций

При этом коэффициент ν_b^k (условно касательный коэффициент) может определяться по формулам

$$\nu_b^k = \frac{\varepsilon_{b+1}\nu_{bi+1} - \varepsilon_{bi}\nu_{bi}}{\Delta\varepsilon_{bi}}$$

или (6.15)

$$\nu_b^k = \frac{\Delta\sigma_{bi}\nu_{bi}\nu_{bi+1}}{\sigma_{bi+1}\nu_{bi} - \sigma_{bi}\nu_{bi+1}},$$

где ν_{bi}, ν_{bi+1} – определяются по формуле (6.2) с учетом п. 6.1.3, 6.1.4 в зависимости от ветви диаграммы (сжатия или растяжения).

6.1.6 Расчетные диаграммы деформирования бетона

Расчетные диаграммы бетона формируются по формулам (6.1) – (6.15), где нормативные значения $R_{b.ser}$, $R_{bt.ser}$ заменяются соответственно на расчетные R_b, R_{bt}.

6.2 Диаграммы деформирования арматуры

6.2.1 Характеристики арматуры

Характеристики арматуры, используемые в расчетах статически неопределимых конструкций, приведены в п. 6.2.1 – 6.2.11 СП 63.13330.2018. Основные прочностные характеристики арматуры – нормативные сопротивления растяжению $R_{s.n}$, устанавливаемые с обеспеченностью 0,95. По ним определяются расчетные характеристики арматуры растяжению предельным состояниям по второй группы ($R_{s.ser}$) и предельным состояниям первой группы (R_s). Для предельных состояний первой группы дополнительно вводятся расчетные характеристики сжатию R_{sc} (исходя из возможности выпучивания сжатой арматуры в конструкциях) и расчетные сопротивления R_{sw} поперечной арматуры (хомутов и отогнутых стержней). Эти характеристики приведены в таблицах 6.1.13, 6.1.14 и 6.1.15 СП 63.13330.2018.

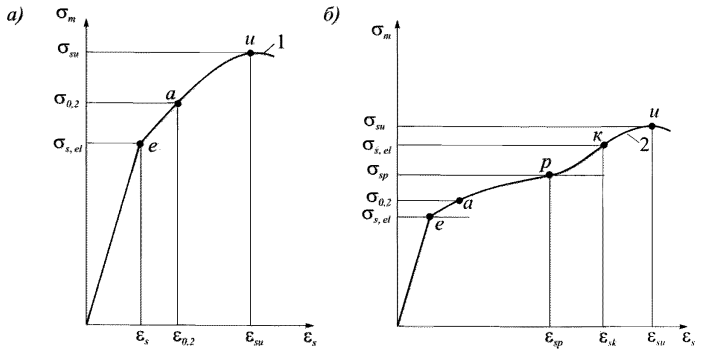
6.2.2 Виды диаграмм и их характерные точки

Диаграммы деформирования арматуры « $\varepsilon_s - \sigma_s$ », связывающие относительные деформации ε_s с напряжениями σ_s используют при расчете статически неопределимых конструкций по нелинейной диаграммной модели.

Диаграммы деформирования арматуры разделяются на два вида:

– на рисунке 6.3 а – без физической площадки текучести (согласно СП 63.13330.2018 для арматуры А600 – А1000, Вр500, Вр1200 – 1600, К1400 – 1700);

– на рисунке 6.3 б – с физической площадкой текучести (согласно СП 63.13330.2018 для арматуры А240, А400, А500, В500).



а – арматуры без физической площадки текучести;

б – арматуры с физической площадкой текучести

Рисунок 6.3 – Полные диаграммы деформирования

На диаграммах (рисунок 6.3) выделены следующие характерные точки:

e – точка конца линейного участка диаграммы с напряжениями $\sigma_{s.el}$ и деформациями

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_{s.el}}{E_s}, \tag{6.16}$$

a – точка соответствующая нелинейному отрезку диаграммы с напряжением $\sigma_{s0,2}$, которым соответствуют относительные деформации

$$\varepsilon_{0,2} = \frac{\sigma_{0,2}}{E_s} + 0{,}002, \tag{6.17}$$

u – точка, соответствующая разрыву арматуры с напряжениями σ_{su} деформациями ε_{su}.

Кроме этого для диаграммы с площадкой текучести вводятся две дополнительные точки – точка *p*, соответствующая концу площадки текучести с напряжениями σ_{sp} и деформациями ε_{sp} и промежуточная точка *k* на ветви упрочнения с напряжениями σ_{sk} и относительными деформациями ε_{sk}. Напряжения и недостающие относительные деформации в точках определяются по формулам:

$$\sigma_{s.el} = \sigma_{s0,2} \cdot \gamma_{s.el};\quad (6.18)$$

$$\sigma_{su} = \sigma_{s0,2} \cdot \gamma_{su};\quad (6.19)$$

$$\sigma_{sp} = \sigma_{s0,2} \cdot \gamma_{sp};\quad (6.20)$$

$$\sigma_{sk} = \sigma_{sp} + 0,2(\sigma_{su} - \sigma_{sp});\ \varepsilon_{sk} = 1,2\varepsilon_{sp}.\quad (6.21)$$

Коэффициенты $\gamma_{s.el}$, γ_{su}, γ_{sp}, а также относительные деформации ε_{sp}, соответствующие напряжениям, приведены в таблицах 6.1. и 6.2.

Таблица 6.1 – Характеристики арматуры с условным пределом текучести

Класс арматуры	Номинальный диаметр арматуры, мм	$\gamma_{s.el}$	γ_{su}	ε_{su}
A600	10 – 40	0,7	1,35	0,06
A800	10 – 32	0,7	1,28	0,07
A1000	10 – 32	0,7	1,23	0,06
Bp500	3 – 5	0,7	1,08	0,025
Bp1200	8	0,85	1,05	0,04
Bp1300	7	0,85	1,05	0,04
Bp1400	4 – 6	0,85	1,1	0,05
Bp1500	3	0,85	1,2	0,06
Bp1600	3 – 5	0,85	1,2	0,06
K1400	15	0,8	1,07	0,05
K1500	6 – 18	0,8	1,07	0,05
K1600	6,9,11,12,15	0,8	1,07	0,05
K1700	6 – 9	0,8	1,07	0,05

Таблица 6.2 – Характеристики арматуры с физическим пределом текучести

Класс арматуры	Номинальный диаметр арматуры, мм	$\gamma_{s.el}$	γ_{sp}	ε_{sp}	γ_{su}	ε_{su}
A240	6 – 40	0,97	1,01	0,015	2,0	0,19
A400	6 – 40	0,9	1,05	0,012	1,45	0,14
A500	10 – 40	0,85	1,07	0,008	1,3	0,10
B500	3 – 16	0,8	1,04	0,005	1,1	0,03

6.2.3 Нормативная диаграмма деформирования арматуры без физической площадки текучести

Диаграмма разделяется на два участка: линейный от $\sigma_s = 0$ до $\sigma_s = \sigma_{s.el}$ и нелинейный от $\sigma_s = \sigma_{s.el}$ до $\sigma_s = \sigma_{su}$.

Нормативная диаграмма используется при расчете конструкций по предельным состояниям второй группы. При этом

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{0,2} = R_{s.ser};\\ &\sigma_{s.el} = \sigma_{0,2}\gamma_{s.el} = R_{s.ser}\gamma_{s.el};\\ &\sigma_{su} = \sigma_{0,2}\gamma_{su} = R_{s.ser}\gamma_{su}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

где значения $\gamma_{s.el}$ и γ_{su} определяются по таблице 6.1.

На линейном отрезке (при $\sigma_s \le \sigma_{s.el}$)

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}, \qquad (6.23)$$

где E_s – модуль упругости арматуры.

На нелинейном отрезке (при $\sigma_s \ge \sigma_{s.el}$)

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{\nu_s E_s}, \qquad (6.24)$$

где ν_s – коэффициент изменения секущего модуля арматуры определяемый по формуле

$$\nu_s = \hat{\nu}_s + (\nu_0 - \hat{\nu}_s)\sqrt{1 - \omega\eta - (1-\omega)\eta^2}, \qquad (6.25)$$

где $\hat{\nu}_s$ – коэффициент изменения секущего модуля в вершине диаграммы (при $\sigma_s = \sigma_{su}$),

ω – коэффициент, характеризующий кривизну диаграммы,

η – уровень приращения напряжений,

ν_0 – коэффициент секущего модуля в начале диаграммы:

$$\nu_0 = 1, \qquad (6.26)$$

$$\hat{\nu}_s = \frac{\sigma_{su}}{E_s \varepsilon_{su}}, \qquad (6.27)$$

$$\eta = \frac{\sigma_s - \sigma_{s.el}}{\sigma_{su} - \sigma_{s.el}}, \quad (\text{при } \sigma_s = \sigma_{su} \quad \eta = 1), \qquad (6.28)$$

$$2 \ge \omega = \frac{(\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2(\eta_{0,2} - 1) + (\nu_{0,2} - \hat{\nu}_s)^2}{\eta_{0,2}(\eta_{0,2} - 1)(\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2}, \qquad (6.29)$$

$\eta_{0,2}$ – уровень напряжений при $\sigma_s = \sigma_{0,2}$

$$\eta_{0,2} = \frac{\sigma_{0,2} - \sigma_{s.el}}{\sigma_{su} - \sigma_{s.el}}; \ \nu_{0,2} = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,2} - 0{,}002E_s} \qquad (6.30)$$

$\nu_{0,2}$ – коэффициент секущего модуля при $\sigma_s = \sigma_{0,2}$.

Если оказывается, что вычисленные по формуле (6.29) значения $\omega > 2$, то зависимость (6.30) становится справедливой только до уровней $\eta \le \overline{\eta}$, где

$$\overline{\eta} = 0{,}92(\omega - 1); \qquad (6.31)$$

от $\overline{\eta}$ до $\eta = 1$ используется линейный участок диаграммы.

Коэффициент изменения секущего модуля также может определяться через уровень деформаций $\eta_d = \varepsilon_s / \varepsilon_{su}$ из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & A\nu_s^2 + B\nu_s + C = 0, \\ & A = 1 + \frac{(1-\omega)(\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \eta_d^2 \sigma_{s.u}^2}{\hat{\nu}_s^2 (\sigma_{su} - \sigma_{s.el})^2}; \\ & B = 2\hat{\nu}_s - \frac{\eta_d (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \sigma_{s.u}}{\hat{\nu}_s (\sigma_{su} - \sigma_{s.el})} \left(\omega - \frac{2(1-\omega)\sigma_{s.el}}{\sigma_{su} - \sigma_{s.el}} \right); \\ & C = \hat{\nu}_s^2 - (\nu_0 - \hat{\nu}_s)^2 \left[1 + \frac{\omega \sigma_{s.el}}{\sigma_{su} - \sigma_{s.el}} - \frac{(1-\omega)\sigma^2_{s.el}}{(\sigma_{su} - \sigma_{s.el})^2} \right] \end{aligned} \qquad (6.32)$$

(в решении уравнения (6.32) перед квадратным корнем принимается знак плюс).

6.2.4 Нормативная диаграмма деформирования арматуры с физической площадкой текучести

Линейный участок диаграммы описывается формулой (6.23). В диаграмму включается два нелинейных отрезка (рисунок 6.2 б).

– от точки *e* (конца линейного участка) до точки *p* (конца площадки текучести);

– от точки *p* до точки *u* (соответствующей разрыву арматуры).

Для описания первого нелинейного отрезка (*ep*) используются формулы (6.24) – (6.31), где σ_{su} заменяется σ_{sp}, ε_{su} на ε_{sp}; σ_{sp} определяется по формуле (6.20), а значение ε_{sp} назначается по таблице 6.2.

Для описания второго нелинейного участка (*pku*) – участка упрочнения арматуры, также используются формулы (6.24) – (6.32), в которых следует заменить

$$\begin{aligned} &\eta_{0,2} \text{ на } \eta_{sk} = (\sigma_{sk} - \sigma_{sp})/(\sigma_{su} - \sigma_{sp}); \\ &\nu_{0,2} \text{ на } \nu_{sk} = \sigma_{sk}/E_s\varepsilon_{sk}; \\ &\sigma_{s.el} \text{ на } \sigma_{sp} \end{aligned} \tag{6.33}$$

и принять

$$\begin{aligned} &\nu_0 = \sigma_{sp}/E_s\varepsilon_{sp}; \\ &\eta = (\sigma_s - \sigma_{sp})/(\sigma_{su} - \sigma_{sp}), \end{aligned} \tag{6.34}$$

где значения σ_{su}, σ_{sp}, σ_{sk}, ε_{sk} определяются по формулам (6.19) – (6.21).

6.2.5 Расчётная диаграмма для арматуры

Эта диаграмма используется для расчета конструкций по предельным состояниям первой группы. Она описывается зависимостями (6.16) – (6.34), где следует принимать

$$\sigma_{0,2} = R_s. \tag{6.35}$$

Относительные деформации ε_{su}, ε_{sp}, а также переходные коэффициенты $\gamma_{s.el}$, γ_{su}, γ_{sp}, приведены в таблицах 6.1 и 6.2 остаются без изменения. Согласно СП 63.13330 при расчете ответственных конструкций диаграмму без физической площадки текучести разрешается использовать до $\varepsilon_s \le 0{,}015$, а для арматуры с физической площадкой текучести $\varepsilon_s \le 0{,}025$. После этого арматура исключается из расчета.

Напряжения в арматуре, соответствующие $\varepsilon_s = 0{,}015$, $\varepsilon_s = 0{,}025$, представляется в виде $R_s \cdot \gamma_{s2}$, где γ_{s2} – коэффициент увеличения прочности. При этом разрешается принимать $\gamma_{s2} \le 1{,}1$.

6.3 Диаграммы деформирования арматуры в элементах с трещинами

6.3.1 Два вида диаграмм

Используются два вида диаграмм. Первая диаграмма связывает напряжения σ_{sc} относительными деформациями ε_s в трещине, она записывается как для свободной арматуры по указаниям СП 63.13330.

Вторая диаграмма связывает напряжения в арматуре в трещине σ_s со средними деформациями ε_{sm} арматуры на участках между трещинами, которые из-за влияния сцепления арматуры с бетоном на участках между трещинами оказываются меньше деформаций ε_s свободной арматуры. Средняя диаграмма имеет два участка. Первый участок (при $\sigma_s \le \sigma_{s.el}$) соответствует линейной стадии деформирования арматуры в трещинах. На этом участке

$$\varepsilon_{sm} = \sigma_s \psi_s / E_s = \sigma_s / E_s \nu_{sm}, \tag{6.36}$$

где

$$\nu_{sm} = 1/\psi_s . \tag{6.37}$$

ψ_s – коэффициент, учитывающий работу растянутого бетона на участках с трещинами определяется по формуле:

$$\psi_s = 1 - 0{,}75\varphi_{sl}\frac{\sigma_{crc}}{\sigma_s} \tag{6.38}$$

или

$$\psi_s = \frac{\left(1 - 0{,}75\varphi_{sl}\right)}{1 - 0{,}75\varphi_{sl}\left(1 - \frac{\varepsilon_{crc}}{\varepsilon_s}\right)} \tag{6.39}$$

где σ_{crc} – напряжения в арматуре в трещине в момент трещинообразования (в момент после образования трещины); σ_s – текущее напряжение в арматуре в трещинах; ε_{crc} – относительные деформации арматуры в трещине в момент трещинообразования; ε_s – текущие относительные деформации арматуры в трещине;

$\psi_{sl} = 1$ – при кратковременном действии напряжений;

$\psi_{sl} = 0{,}8$ – при длительном действии напряжений.

Второй участок диаграммы (при $\sigma_s > \sigma_{s.el}$) представляется в виде

$$\varepsilon_{sm} = \sigma_s \psi_s / E_s \nu_s = \sigma_s / E_s \nu_{sm}, \tag{6.40}$$

где параметр ν_s секущего модуля определяется по указаниям СП 63.13330.2018,

$$\nu_{sm} = \nu_s / \psi_s, \tag{6.41}$$

ψ_s определяется по формуле (6.38).

6.3.2 Связи между конечными приращениями напряжений и относительных деформаций арматуры

Эти связи используются при расчете железобетонных конструкций в приращениях слабоитерационными и безитерационными методами.

При этом используются два вида связей:

– для арматуры в элементах без трещин (рисунок 6.4);

– для арматуры в элементах с трещинами (рисунок 6.5).

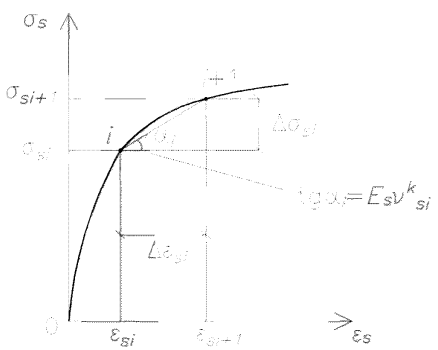


Рисунок 6.4 – К определению связей между приращениями напряжений и относительных деформаций на отрезках $i \div i+1$ диаграммы арматуры в пластической стадии ее деформирования в элементах без трещин

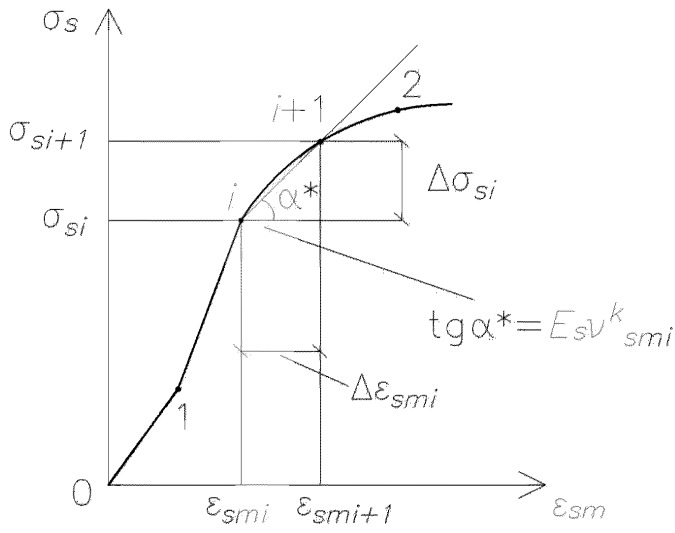


Рисунок 6.5 – К определению связей между приращениями напряжений и относительных деформаций на отрезках $i \div i+1$ диаграммы арматуры в элементах с трещинами (0-1 – отрезок диаграммы деформирования арматуры до образования трещины; 1-2 – отрезок средней диаграммы арматуры в элементах с трещинами)

Для арматуры в элементах без трещин связи между напряжениями и деформациями арматуры описываются диаграммами деформирования свободной арматуры, которые представлены в 6.2.1 – 6.2.4. В этом случае переход от точки i в точку $i+1$ на диаграмм (рисунок 6.4) осуществляется по хорде $i \div i+1$ в виде:

$$\Delta\sigma_{si} = E_s \nu_{si}^k \Delta\varepsilon_{si}\,; \tag{6.42}$$

$$E_s \nu_{si}^k = \mathrm{tg}\alpha_i\,, \tag{6.43}$$

где α_i – угол наклона хорды $i \div i+1$ к оси ε_s;

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{si} &= \varepsilon_{si+1} - \varepsilon_{si}\,, \\ \Delta\sigma_{si} &= \sigma_{si+1} - \sigma_{si}\,, \end{aligned} \tag{6.44}$$

здесь ε_{si}, ε_{si+1} – относительные деформации, соответствующие точкам i и $i+1$ на диаграмме; σ_{si}, σ_{si+1} – соответствующие точкам i и $i+1$ напряжениям в арматуре. Коэффициенты ν_{si}^k выражаются через следующие модули диаграммы в начале (в точке i) и в конце (в точке $i+1$) шага нагружения по формуле

$$v_{si}^{k}=\frac{\varepsilon_{si+1}v_{si+1}-\varepsilon_{si}v_{si}}{\Delta\varepsilon_{si}} \tag{6.45}$$

или

$$v_{si}^{k}=\frac{(\sigma_{si+1}-\sigma_{si})v_{si}v_{si+1}}{\sigma_{si+1}v_{si}-\sigma_{si}v_{si+1}}, \tag{6.46}$$

где ν_{si}, v_{si+1} – коэффициенты секущего модуля в точке i и $i+1$, определяемые по формулам (6.25). На линейном участке диаграммы $v_{si}=v_{si+1}=1$.

Для арматуры в элементах с трещинами используется средняя диаграмма (рисунок 6.5), связывающая напряжения в арматуре в трещинах σ_s с ее средними деформациями ε_{smi} между трещинами, которая описывается формулам (6.36) – (6.41). По аналогии с (6.42), (6.43) зависимости, описывающие переход от точки i и точке $i+1$ на средней диаграмме, представляются в виде:

$$\Delta\sigma_{si}=E_s\nu_{smi}^{k}\Delta\varepsilon_{smi}; \tag{6.47}$$

$$\mathrm{E}_s\nu_{smi}^{k}=tg\alpha_i^{*}, \tag{6.48}$$

где α_i^{*} – угол наклона хорды $i\div i+1$ к оси средних относительных деформаций ε_{sm};

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{smi}&=\varepsilon_{smi+1}-\varepsilon_{smi};\\ \Delta\sigma_{si}&=\sigma_{si+1}-\sigma_{si}\end{aligned} \tag{6.49}$$

здесь ε_{smi}, ε_{smi+1} – средние относительные деформации арматуры, соответствующие точкам i и $i+1$ на средней диаграмме; σ_{si}, σ_{si+1} – напряжение в арматуре в трещинах в точках i и $i+1$ диаграммы.

При этом коэффициенты ν_{smi}^{k} определяются по формуле

$$v_{smi}^{k}=\frac{\varepsilon_{smi+1}v_{smi+1}-\varepsilon_{smi}v_{smi}}{\Delta\varepsilon_{smi}} \tag{6.50}$$

или

$$v_{smi}^{k}=\frac{(\sigma_{si+1}-\sigma_{si})v_{smi}v_{smi+1}}{\sigma_{si+1}v_{smi}-\sigma_{si}v_{smi+1}}, \tag{6.51}$$

где ν_{smi}, ν_{smi+1} – коэффициенты секущего модуля средней диаграммы в точках i и $i+1$, определяемые по формулам (6.37), (6.41). На линейном участке диаграммы деформирования арматуры в трещинах,

$$\nu_{smi} = 1/\psi_{si};\quad \nu_{smi+1} = 1/\psi_{si+1}. \qquad (6.52)$$

6.4 Диаграммы деформирования бетона с учетом длительного действия нагрузки (диаграммы-изохроны)

6.4.1 Два вида диаграмм-изохрон

Для учета влияния на процесс деформирования элементов длительного действия нагрузок рекомендуется использовать два типа диаграмм-изохрон:

– диаграммы-изохроны 1 на рисунке 6.6, *а*, соответствующие ступенчатым режимам нагружения (далее такие режимы называются жесткими), когда нагрузка 3 мгновенно прикладывается в возрасте бетона t_0 с последующей выдержкой в течение времени $t-t_0$;

– диаграммы-изохроны 2, 3 на рисунке 6.6, *б*, соответствующие режиму нагружения бетона в возрасте t_0 возрастающими напряжениями 4 или деформациями 5 (далее такие режимы называют мягкими), причем скорость роста напряжений или деформаций, в течение времени нагружения остается в среднем близкой к постоянной (например, при учете стадии возведения зданий и сооружений).

Для каждой точки диаграммы-изохроны время натекания деформаций константа и равная времени загружения $t-t_0$. Вершина диаграммы-изохроны имеет координаты $\hat{\varepsilon}_b(t,t_0)$, $\hat{\sigma}_b(t,t_0)$. В случае одноосного сжатия $\hat{\sigma}_b(t,t_0)=R_{b.ser}(t,t_0)$ или $R_b(t,t_0)$.

Аналитическая зависимость для описания диаграмм-изохрон принимается в виде (6.1) – (6.12), где значения величин $\hat{\varepsilon}_b$, $\hat{\sigma}_b$, $\hat{\nu}_b$, $\hat{E}_b$, ν_0 определяют с учетом возраста бетона в момент загружения t_0, времени загружения $t-t_0$ и режима нагружения.

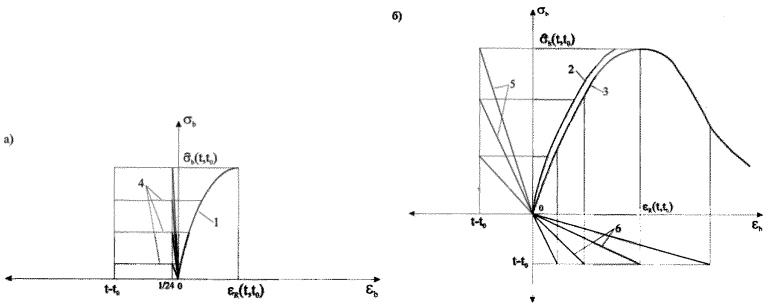


Рисунок 6.6. – К построению диаграмм-изохрон а – жестком, б – мягком режимах нагружения

6.4.2 Диаграммы-изохроны при бесконечно длительном нагружении $t - t_0 \to \infty$

Параметры аналитической зависимости (6.1) для описания диаграмм – изохрон бетона при жестком режиме нагружения и времени $t - t_0 \to \infty$ определяют по формулам (6.2) – (6.13), в которые необходимо вносить следующие изменения:

вместо $\hat{\nu}_b$ используется значение $\hat{\nu}_{b,\infty}$, определяемое по формуле

$$\hat{\nu}_{b,\infty} = \hat{\nu}_b / (1 + \hat{\nu}_b f_c \varphi), \tag{6.53}$$

вместо $\hat{\nu}_{bt}$ используется значение $\hat{\nu}_{b,\infty}$, определяемое по формуле (6.53) при замене $\hat{\nu}_b$ на $\hat{\nu}_{bt}$, здесь $\hat{\nu}_b$ вычисляют по формуле (6.4), а $\hat{\nu}_{bt}$ – по формуле (6.12);

на восходящей ветви ν_0 заменяется на $\nu_{0,\infty}$, определяемое по формуле

$$\nu_{0,\infty} = 1/(1 + \varphi), \tag{6.54}$$

f_c – функция, учитывающая нелинейность деформаций ползучести, равная

$$f_c = 1 + k\upsilon; \; k = 0{,}7; \tag{6.55}$$

φ – предельная характеристика ползучести бетона, зависящая от класса бетона, влажности среды и условий влагообмена и определяемая по формуле

$$\varphi = \varphi^N \xi_1 \xi_2 (0{,}5 + d\exp[-2\gamma_1 t_0]), \tag{6.56}$$

параметры υ_c, φ^N, ξ_1, ξ_2, d, γ_1 при подвижности бетонной смеси 4 – 6 см

принимают по таблицам 6.3 – 6.6;

t_0 – возраст бетона в момент приложения нагрузки, в сут, причем здесь и далее $t_0 \geq 7$ сут – при естественном твердении бетона и $t_0 \geq 28 R_{bp}/R_{bn}$ – при твердении с тепловой обработкой, причем R_{bp} – отпускная (передаточная) прочность бетона после пропаривания; R_{bn} – проектная прочность бетона.

При мягком режиме нагружения следует использовать зависимости (6.53) – (6.56), заменяя в формулах (6.53) – (6.54) φ на $0{,}5\varphi$ и полагая в формуле (6.55)

$$k = \left[0{,}74 + 0{,}18 t_0 / t^2\right]^4. \qquad (6.57)$$

При двухосном сжатии относительное снижение ползучести бетона учитывается заменой в формуле (6.53) параметра φ на φ_2:

$$\varphi_2 = \varphi\left(1 - 0{,}2\xi_3 \sigma_{max}/\sigma_{min}\right), \qquad (6.58)$$

где ξ_3 принимается по таблице 6.6; $\sigma_{max} = \sigma_1$, $\sigma_{min} = \sigma_2$ – главные напряжения.

Таблица 6.3.

Обозначение параметра		Значение параметра для класса бетона						
		B12,5	B15	B20	B30	B40	B50	≥B60
φ^N	Тяжелый бетон	3,34	3,29	3,1	2,73	2,41	1,95	1,56
	Мелкозернистый бетон	3,26	3,0	2,82	2,44	2,14	1,7	1,38
υ_c		2,24	1,87	1,41	0,97	0,74	0,74	0,74

Таблица 6.4.

Обозначение параметра		Значение параметра для модуль открытой поверхности M_0, M^{-1}, элемента			
		10 и менее	20	30	40 и более
γ_1, сут $^{-1}$		0,004	0,006	0,08	0,01
d	t_0 =7 сут.	0,752	0,842	0,942	1,052
	$t_0 \geq 28$ сут.	0,625	0,7	0,785	0,875

Примечания.

1 Для бетонов классов B12,5 – B50, с осадкой конуса 1–2 см или жесткостью 10–15 с, значение φ^N умножают на коэффициент 0,9, при 7сут< t_0 <28 сут, значение d принимают по линейной интерполяции.

2 Для бетонов, подвергнутых тепловой обработке, значение φ^N следует умножать на 0,8.

Таблица 6.5

Относительная влажность среды φ_{int}, %	Коэффициент ξ_1
40 и менее	1,27
50	1,13
60	1,00
70	0,87
80	0,73
90	0,60
100	0,47

Таблица 6.6

Модуль открытой поверхности M_0, $м^{-1}$, элемента	Коэффициенты	
	ξ_2	ξ_3
0	0,51	0,89
5	0,65	0,89
10	0,76	0,89
20	0,93	1,00
30	1,00	1,13
40	1,22	1,27
60 и более	1,27	1,27

6.4.3 Диаграммы-изохроны при текущем времени

Параметры аналитической зависимости (6.1), (6.2) для описания диаграмм – изохрон сжатого бетона в течение времени $t-t_0$ определяют по 6.1.3, подставляя вместо $R_{b,ser}$, E_b, ν_b, ν_0, σ_b, η значения $R_{b.ser}(t,t_0)$, $E_b(t,t_0)$, $\hat{\nu}_b(t,t_0)$, $\nu_0(t,t_0)$, $\sigma_0(t,t_0)$, $\eta(t,t_0)=\sigma_b(t,t_0)/R_{b.ser}(t,t_0)$.

При растяжении учитывают особенности перехода к диаграммам растяжения, указанные в п. 6.1.4, при этом величины $R_{b,ser}(R_b)$ заменяют на $R_{bt,ser}(R_{bt})$.

Параметры $\hat{\nu}_b(t,t_0)$, $\nu_0(t,t_0)$ вычисляют по формулам (6.53), (6.54), заменяя $\hat{\nu}_{b,\infty}$ на $\nu_0(t,t_0)$ и подставляя вместо φ и f_c соответственно значения $\varphi_0(t,t_0)$ и $f_c(t,t_0)$, вычисляемые по формулам:

$$\varphi_0(t,t_0)=0{,}5\varphi\{1+\exp[-2\gamma_1(\tau-t_0)]\}\{1-0{,}8\exp[-\gamma_1(\tau-t_0)]\}\Delta(t,t_0);$$

$$f_c(t,t_0)=1+k\upsilon_c/1-0{,}8\exp[-\gamma_1(\tau-t_0)], \qquad (6.59)$$

где k и υ_c вычисляют по 6.4.2 и таблице 6.1; t, t_0 – принимают в сутках; $\tau = t_0$ – для жесткого режима нагружения; $\tau = t$ – для мягкого режима нагружения;

$$\tau - t_0 \geq 1/24;\ \Delta(t,t_0)=1 \text{ при } t-t_0 \geq 1$$
$$\Delta(t,t_0)=\sqrt{1+0{,}314\ln(t-t_0)} \text{ при } t-t_0<1 \qquad (6.60)$$

В формуле (6.54) следует принимать $\varphi_0(t,t_0)\geq 0$.

Прочность бетона с учетом возраста, режима и времени его нагружения определяют по формуле

$$R_{b.ser}(t,t_0)=R_{b.ser}(t_0)\left\{\begin{matrix}[0.95-1.57\cdot 10^{-2}\ln(t-t_0)]\gamma_t+\bar{\gamma}_{b2}(1-\gamma_t)/\\ /[1-(1-\bar{\gamma}_{b2})\exp[-4\gamma_1(t-t_0)]]\end{matrix}\right\}, \qquad (6.61)$$

где для мягкого режима нагружения

$$\gamma_1 = 1/\{1+\exp[1{,}5(t-t_0)/t_1-4{,}5]\}; \qquad (6.62)$$

$$t_1 = 365\{1-\exp(-8\cdot 10^{-4}t_0)\}; \qquad (6.63)$$

для жесткого режима нагружения $\gamma_1 = 1$, кроме этого, для момента времени $(t-t_0) > 365$ сут принимают $t-t_0 = 365$ сут.

Значение $R_{b.ser}(t_0)$ равно $R_{b.ser}$, определяемому для заданного возраста бетона t_0 в момент начала загружения. Если характеристики прочности бетона заданы в возрасте 28 сут, то $R_{b.ser}(t_0)$ вычисляют по формуле (6.69) с учетом условий внешней среды.

Значение коэффициента $\bar{\gamma}_{b2}$ в формуле (6.61) принимают: при условиях эксплуатации конструкций, благоприятных для нарастания прочности бетона (под водой, во влажном грунте или при влажности окружающей среды выше 75 %)

$$\bar{\gamma}_{b2} = 0{,}85 + 2{,}39\exp(-0.16\,t_0) + 0.178\exp(-0.015\,t_0); \qquad (6.64)$$

в остальных случаях

$$\bar{\gamma}_{b2} = 0{,}85 + 1.44\exp(-0.1\,2t_0). \qquad (6.65)$$

Для ячеистого бетона принимают $\bar{\gamma}_{b2} = 0{,}85$.

Начальный модуль упругости бетона с учетом возраста и времени нагружения определяют по формуле

$$E_b(t,t_0) = 52000\, R_{bn}(t) / [14 + R_{bn}(t)], \qquad (6.66)$$

где $R_{bn}(t) = \max[R_{b.ser}(t_0); R_{b.ser}(t,t_0)]$ – большее из двух значений, указанных в скобках; значение $R_{b.ser}(t,t_0)$ определяют по формуле (6.61); при расчете конструкций по предельным состояниям первой группы структура формулы (6.66) не изменяется (допускается вместо $R_{b.ser}(t_0)$, $R_{b.ser}(t,t_0)$) вводить средние значения сопротивлений бетона, тогда в знаменателе 14 МПа заменяется на 18 МПа). При тепловой обработке значение $E_b(t,t_0)$, вычисляемое по формуле (6.66), снижается на 10 %.

При описании ниспадающей ветви полной диаграммы бетона в формуле (6.7) при определении ω_1 значение $1.95\hat{\nu}_b$ заменяется на $1.95\hat{\nu}_b(t,t_0)/\nu_0(t,t_0)$.

6.5 Меры ползучести бетона

Деформации ползучести могут определяться на основании нелинейных теорий ползучести с использованием мер ползучести. При этом общие деформации суммируются из кратковременных и длительных (деформаций ползучести). В частном случае общие деформации сжатого или растянутого бетонного призматического элемента в момент времени t, нагруженного в момент t_0 постоянными напряжениях $\sigma_b(t_0)$ определяются по формуле

$$\varepsilon_b(t,t_0) = \sigma_b(t_0) \cdot \delta(t,t_0), \qquad (6.67)$$

где $$\delta(t,t_0) = 1/[E_b(t_0)\nu_b(t_0)] + C(t,t_0)\{1 + \nu_c[\eta(t_0)]^4/\sqrt{1 - 0{,}8\exp[-\gamma_1(t-t_0)]}\} \qquad (6.68)$$

где $E_b(t_0)$ – модуль упругости (определяют по формуле (6.66) при $t = t_0$); $\nu_b(t_0)$ – коэффициент, определяемый по 6.1.3 как ν_b при кратковременном действии нагрузки; $C(t,t_0)$ – линейные деформации ползучести при действии постоянного единичного напряжения – линейная составляющая меры ползучести; $\eta(t_0)$ – уровень напряжений определяемый по формуле

$$\eta(t_0) = \sigma_b(t_0) / R_{b.ser}(t_0),$$

где $R_{b.ser}(t_0)$ определяется с учетом влияния внешней среды по формуле

$$R_{b,ser}(t_0) = R_{b,ser}(28)\left[1 + \frac{23}{55 + B\left(\frac{t_0 - 28}{t_0 + 11}\right)}\right], \qquad (6.69)$$

где B – класс бетона в возрасте 28 сут; $R_{b,ser}(28)$ – определяется по СП 63.13330.2018 как $R_{b.ser}$.

При внешней среде, благоприятной для нарастания прочности бетона (согласно 6.4.3), формула (6.68) справедлива для $t_0 \geq 7$ сут. В противном случае в формуле (6.68) принимают $7 \leq t_0 \leq 28$ сут.

Значения линейной меры ползучести бетона к моменту времени t, загруженного в момент времени t_0, принимают в виде

$$C(t,t_0) = (\infty,28)\Omega(t_0)f(t - t_0), \qquad (6.70)$$

где $C(\infty,28)$ – предельное значение меры ползучести,

$$C(\infty,28) = C^N(\infty,28)\xi_1\xi_2, \qquad (6.71)$$

$\Omega(t_0)$ – функция, определяемая по формуле

$$\Omega(t_0) = c + d\ \exp(-2\gamma_1 t_0),$$

где $c = 0{,}5$, коэффициенты d и γ_1 принимают по таблице 6.4;

$f(t - t_0)$ – функция, учитывающая развитие деформаций ползучести во времени:

$$f(t - t_0) = 1 - 0{,}2\ \exp[-0{,}6(t - t_0)] - 0{,}8\ \exp[-\gamma_1(t - t_0)]. \qquad (6.72)$$

Предельное значение меры ползучести $C^N(\infty,28)$ бетона, загруженного в возрасте $t_0 = 28$ сут. и твердеющего в естественных условиях при влажности окружающей среды $W = 60\%$, принимают по таблице 6.7, а значение коэффициентов ξ_1 и ξ_2, учитывающих влияние размеров поперечного сечения и влажность среды, по таблицам 6.5 и 6.6;

Таблица 6.7

Вид бетона	$C^N(\infty,28)\cdot 10^6$, МПа, для бетона класса						
	B12,5	B15	B20	B30	B40	B50	≥B60
Обычный тяжелый и мелкозернистый на кварцевом песке	163	143	115	84	67	50*	39**

*При осадке конуса 1–2 см.
**При жесткости смеси 35–30 с.

Примечания.

1 Для бетонов B12,5 – B50, с осадкой конуса 1–2 см или жесткостью бетонной смеси 15–10 с, значения $C^N(\infty,28)$ следует умножать на коэффициент 0,9.

2 Для бетонов, изготовленных на шлакопортландцементе, значения $C^N(\infty,28)$ надо умножать на 1,15; для бетонов, изготовленных на пуццолановом портландцементе, – на 1,35; для бетонов, изготовленных на крупном заполнителе из известняка, – на 0,85.

3 Для бетонов, подвергнутых тепловой обработке, значения $E_b(t)$ и $C^N(\infty,28)$ следует умножать на коэффициент 0,9.

6.6 Учет усадки бетона

Предельное значение усадки тяжелого бетона при окончании его хранения в момент времени t_W определяют по выражению

$$\varepsilon_{bs}(\infty,t_W)=\varepsilon_{bs}^N(\infty,7)\xi_{S1}\xi_2\xi_3, \qquad (6.73)$$

принимая значения $\varepsilon_{bs}^N(\infty,7)$, ξ_1, ξ_2, ξ_3, по таблице 6.8.

Значения деформаций усадки бетона к моменту t определяют по формуле

$$\varepsilon_{bs}(t,t_W)=\varepsilon_{bs}(\infty,t_W)\{1-\exp[\alpha_{bs}(t-t_W)]\}, \qquad (6.74)$$

где α_{bs} принимают по таблице 6.8.

Таблица 6.8

Характеристики	Значения для класса обычного тяжелого бетона						
	B12,5	B15	B20	B30	B40	B50	B60
$\varepsilon_{bs}^N(\infty,7)\cdot 10^6$	350	350	400	400	400	400	400
	Для возраста бетона в момент окончания влажного хранения t_w, сут.						
	7 и менее	28	60	90	180	360 и более	
ξ_1	1	0,95	0,93	0,92	0,91	0,90	
	При относительной влажности и среды W, %						
	40 и менее	50	60	70	80	90	
ξ_3	1,29	1,14	1	0,87	0,73	0,56	
	Модуль открытой поверхности образца M_0, M^{-1}						
	0	5	10	20	40	60	80 и

							более
ξ_2	0,22	0,65	0,83	0,95	1,09	1,13	1,15
α_{bs}	0,004	0,004	0,004	0,008	0,016	0,025	0,033

Примечания.

1 Для бетонных смесей, с осадкой конуса 1–2 см или жесткостью 15–40 с, значения $\varepsilon_{bs}^{N}(\infty,7)$, приведенные в таблице, умножают на коэффициент 0,85.

2 Для конструкций, эксплуатируемых на открытом воздухе в районах, относящихся к IV климатической зоне, указанные в настоящей таблице значения α_{bs} относят к началу усадки в осенний и весенний периоды года (октябрь, апрель); значения параметра α_{bs} увеличивают на 30%, если усадка начинается в летнее время года (июнь), и уменьшают на 50% при начале усадки в зимнее время года (январь), в промежуточных случаях применяют линейную интерполяцию.

3 Для мелкозернистого бетона значения $\varepsilon_{bs}^{N}(\infty,7)$, приведенные в настоящей таблице, умножают на коэффициент 1,6.

4 Для бетонных смесей с пластифицирующими добавками значения $\varepsilon_{bs}^{N}(\infty,7)$, приведенные в настоящей таблице, умножают на коэффициент 1,15.

7 Определение прочности бетонных элементов при различных объемных напряженных состояниях. Условия образования трещин по различным схемам

7.1 Условие прочности

7.1.1 Прочность бетонных элементов массивных конструкций, работающих в условиях трехосных напряженных состояний, должна оцениваться на основании условия прочности бетонов.

Условие прочности должно согласовываться с результатами экспериментальных исследований при различных напряжениях бетона и соответствовать требованиям 4.5. Компонентам напряжений в бетоне присваиваются индексы « b » по типу σ_{bij} . Положительными считаются растягивающие напряжения. В координатах главных напряжений σ_{b1}, σ_{b2}, σ_{b3} в бетоне критерий прочности представляется поверхностью общего вида, которая является разомкнутой в области всестороннего равномерного сжатия (рисунок 7.1, *а*) для плотных бетонов и замкнутой для пористых (рисунок 7.2, *б*). Построение поверхности прочности (рисунок 7.1, *а–в*) удобно осуществлять в цилиндрических координатах нормального $\sqrt{3}\sigma_0$ и касательного $\sqrt{3}\tau_0$ октаэдрических напряжений и угла вида напряженного состояния (или параметра Лоде-Надаи μ_σ согласно 5.2).

Поверхность прочности состоит из шести одинаковых частей (лепестков), которые располагаются между сечениями $\mu_\sigma = +1$ и $\mu_\sigma = -1$. Каждому μ_σ соответствует своя меридиональная линия (рисунок 7.1, *а, г*). На линии $\mu_\sigma = -1$ находятся точки одноосного растяжения t_1 и двухосного равномерного сжатия b_2, а на линии $\mu_\sigma = +1$ – двухосного равномерного растяжения t_2 и одноосного сжатия b_1. Кроме этого на рисунке 7.1,*а,б,г* приведены: t_3 – точка, соответствующая трехосному равномерному растяжению; b_3 – точка соответствующая трехосному равномерному сжатию; r – линия, соответствующая двухосному растяжению; C – линия, соответствующая двухосному сжатию. Формы девиаторных кривых (рисунок 7.2) зависят от вида бетона и изменяются в различных областях напряженных состояний (неравномерного растяжения, смешанных, неравномерного сжатия).

Прочность бетонных элементов считается обеспеченной при выполнении условия прочности, записанного в виде неравенства

$$\begin{aligned} &a\sigma_{b1}^2 + b\sigma_{b3}^2 + \sigma_{b1}[\tilde{\gamma}_b(f-b) + \tilde{\gamma}_{bt}]R_b + \sigma_{b3}(\tilde{\gamma}_b b - f\tilde{\gamma}_{bt})R_b - \\ &-\sigma_{b1}\sigma_{b3}(a+b+1-f) - \tilde{\gamma}_b f\tilde{\gamma}_{bt}R_b^2 \le 0 \end{aligned} \qquad (7.1)$$

при $$\sigma_{b1} \ge \sigma_{b2} \ge \sigma_{b3} \qquad (7.2)$$

Коэффициенты $\tilde{\gamma}_b$, $\tilde{\gamma}_{bt}$, a, b, f, входящие условие (7.1), вычисляют по 7.1.2, 7.1.3.

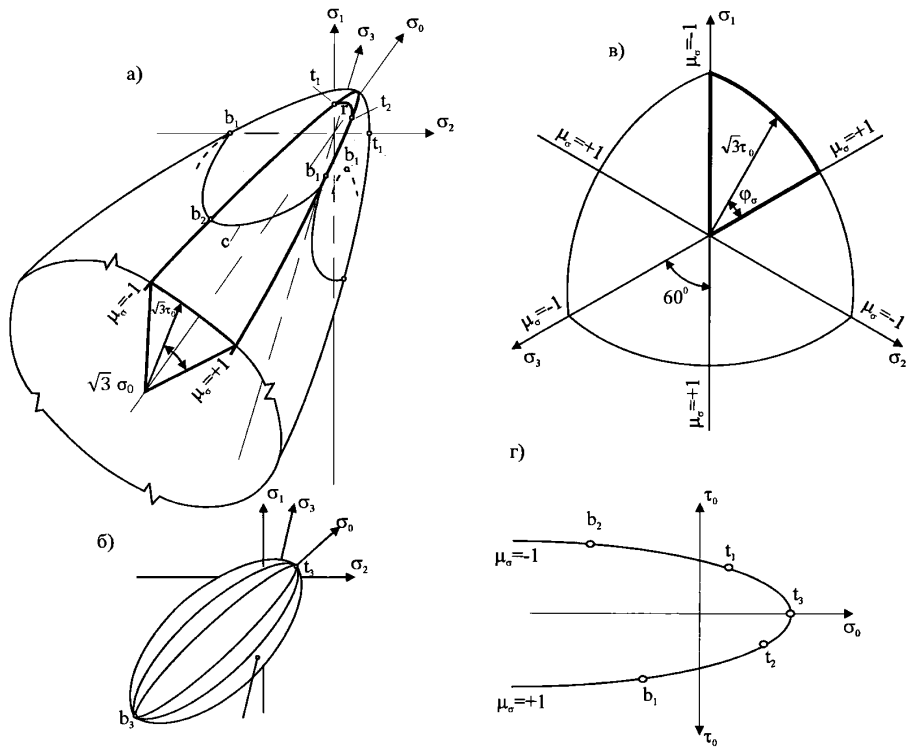


Рисунок 7.1 – Характеристики поверхности прочности бетонов

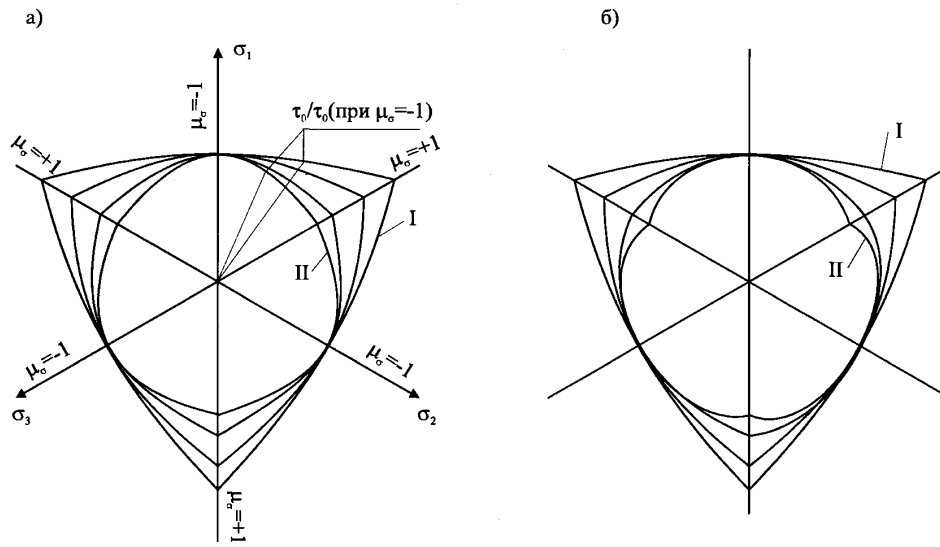


Рисунок 7.2 – Действительные формы девиаторных кривых и их изменение при изменении напряженных состояний (от неравномерного растяжения – 1 до высоких уровней неравномерного сжатия – П); а) – для высокопрочного бетона (R_b = 50 МПа),б) – для низкопрочного бетона (R_b = 10 МПа)

7.1.2 Коэффициентом $\widetilde{\gamma}_b$ в условии (7.1) учитывается влияние вида напряженного состояния (по параметру μ_σ Лоде-Надаи) на изменение прочности бетона в области трехосного или двухосного (плоского) сжатия (при $\sigma_{b1} \le 0$). Этот коэффициент определяют по формуле

$$\widetilde{\gamma}_b = 1 + \frac{3R_{btn}}{R_{bn}}\left(1 - \frac{R_{btn}}{R_{bn}}\right) \cdot \left\{1 - \left[\frac{(1-\psi)(1-\mu_\sigma - 2\beta)}{2\beta + \psi(1-\mu_\sigma - 2\beta)}\right]^2\right\}, \tag{7.3}$$

где $0{,}6 \ge \beta = 0{,}3 + \frac{R_{bn}}{200\ \text{МПа}}$; $\psi = \frac{1-\beta-\beta\sqrt{1-\beta}}{(1-\beta)\left(1+\sqrt{1-\beta}\right)}$, (7.4)

μ_σ – вычисляют по формуле (5.8); R_{bn}, R_{btn} – вычисляют по таблице 6.7 СП 63.13330.2018 ($R_{bn} = R_{b,ser}, R_{btn} = R_{bt,ser}$).

Коэффициент $\widetilde{\gamma}_b$ устанавливают на основании обработки экспериментальных исследований при плоском сжатии. В этом случае он характеризует влияние среднего напряжения σ_{b2} на увеличение прочности бетона при двухосном сжатии (на увеличение предельного значения σ_{b3} по модулю; в случае двухосного сжатия $\mu_\sigma = 1 - 2\frac{\sigma_{b2}}{\sigma_{b3}}$).

7.1.3 Коэффициент $\widetilde{\gamma}_{bt}$ в условии (7.1) учитывает влияние вида напряженного состоянии на изменение прочности бетона в области всестороннего трехосного или двухосного (плоского) растяжения (при $\sigma_{b3} \ge 0$). Этот коэффициент определяют по формуле

$$\widetilde{\gamma}_{bt} = \widetilde{\gamma}_{bt(2)} + \left(\widetilde{\gamma}_{bt(1)} - \widetilde{\gamma}_{bt(2)}\right)\left[1 - \frac{\left(\mu_\sigma^* - \mu_p^*\right)\left(\mu_\sigma^* + p\right)}{\left(1 - \mu_p^*\right)(1+p)}\right], \tag{7.5}$$

где $$\widetilde{\gamma}_{bt(1)} = \frac{R_{bt}}{R_b}; \tag{7.6}$$

$\widetilde{\gamma}_{bt(2)}$ – коэффициент изменения прочности бетона при двухосном растяжении

$$\widetilde{\gamma}_{bt(2)} = \widetilde{\gamma}_{bt(1)}\left(1 - \widetilde{\gamma}_{bt(1)}\right), \tag{7.7}$$

p – коэффициент, влияющий на характер изменения прочности в области двуосного растяжения

($p=(-1)-(2)$; в расчетах следует принимать $p=0$);

μ_σ^* – параметр, отличающийся от параметра Лоде-Надаи константой Δ,

$$\mu_\sigma^* = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}{\sigma_1 - \sigma_3 + \Delta}, \tag{7.8}$$

здесь $\Delta \approx 0{,}25 R_{bt}$; μ_p^* – получают, заменяя в (7.8) σ_2 на σ_3.

Коэффициенты f и n зависят от вида бетона и принимаются по таблице 7.1; $f \le 1$; при $f=1$ поверхность прочности разомкнута в области трехосного равномерного сжатия (рисунок 7.1 а), а в случае $f>1$ – замкнута (рисунок 7.1 б);

$$b = \frac{\widetilde{\gamma}_{bt}}{\widetilde{\gamma}_b - n\widetilde{\gamma}_{bt}}; \quad a = nb. \tag{7.9}$$

На значения параметра a накладывается ограничение

$$a \le \frac{\left[\widetilde{\gamma}_b f(3+\mu_\sigma) + 3\widetilde{\gamma}_{bt}(f+1) + \widetilde{\gamma}_{bt}\mu_\sigma(f-1)\right](f-1) + 6\widetilde{\gamma}_{bt}}{6(\widetilde{\gamma}_b f - \widetilde{\gamma}_{bt})}, \tag{7.10}$$

которое, однако, при рекомендуемых параметрах удовлетворяется автоматически.

Таблица 7.1

Вид бетона	Значение коэффициента	
	f	n
Тяжелый бетон	1,0	1,0
Мелкозернистый бетон	1,05	-3,0
Шлакопемзобетон	1,1	0,7
Бетон на зольном гравии	1,1	1,0
Керамзитобетон	1,1	1,2

7.1.4 Условие прочности (7.1) может быть представлено в ином виде – в зависимости от октаэдрического касательного напряжения в бетоне τ_{bo}, среднего напряжения σ_{bo} и параметра Лоде-Надаи по напряжениям μ_σ,

$$\frac{\tau_{b0}^2}{2\left(3+\mu_\sigma^2\right)}\left[6b\left(3+\mu_\sigma\right)+6a\left(3-\mu_\sigma\right)-9\left(f-1\right)+\mu_\sigma^2\left(f-1\right)\right]+$$
$$+\frac{\tau_{b0}R_b}{\sqrt{2\left(3+\mu_\sigma^2\right)}}\left[\gamma_b\left(3f-6b-f\mu_\sigma\right)+3\widetilde{\gamma}_{bt}\left(f+1\right)+\widetilde{\gamma}_{bt}\mu_\sigma\left(f-1\right)\right]- \qquad (7.11)$$
$$-\frac{2\tau_{b0}\sigma_{b0}}{\sqrt{2\left(3+\mu_\sigma\right)}}\left[3\left(b-a\right)+\mu_\sigma\left(f-1\right)\right]+\sigma_{b0}R_b\left[\widetilde{\gamma}_b f-\widetilde{\gamma}_{bt}\left(f-1\right)\right]+$$
$$\sigma_{b0}^2\left(f-1\right)-\widetilde{\gamma}_b f\widetilde{\gamma}_{bt}R_b^2\le 0.$$

Параметры $\widetilde{\gamma}_{bt}$, $\widetilde{\gamma}_b$, a,b,f, μ_σ вычисляют по 7.2, 7.3. При этом формулу (7.8) для параметра μ_σ^*, входящего в формулу (7.5) по определению $\widetilde{\gamma}_{bt}$, удобно использовать в виде:

$$\mu_\sigma^*=\frac{\mu_\sigma+\Phi\tau_{b0}^{-1}R_b}{1+\Phi\tau_{b0}^{-1}R_b}, \qquad (7.12)$$

где
$$\Phi=\frac{\Delta\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}{3\sqrt{2}R_b}, \qquad (7.13)$$

здесь Δ – см. 7.1.3.

Зависимость (7.11) в виде равенства равна нулю (=0) удобно использовать при анализе геометрии рекомендуемой поверхности прочности, которая заключает внутри себя области безопасных напряженных состояний (выход за поверхность прочности приводит к разрушению). Фиксируя μ_σ, строят меридиональные кривые (функции σ_0,τ_0 – образующие поверхности прочности, рисунок 7.1 г); фиксируя σ_0 – строят девиаторные кривые (функции τ_0, μ_σ^* – направляющие поверхности прочности, рисунок 7.1 в). Соблюдение условия (7.10) обеспечивает выпуклость поверхности (7.11).

7.2 Коэффициенты запаса прочности. Предельные напряжения. Уровень напряжения

7.2.1 Основной для оценки прочности – критерий (7.1), однако, в ряде случае удобно использовать коэффициенты запаса прочности, которые устанавливают на основе критерия (7.1). Коэффициентом запаса прочности элемента конструкции называют величину θ, на которую следует умножать соответствующие расчетной нагрузке напряжения $\sigma_{b1},\sigma_{b2},\sigma_{b3}$ в элементе (или некоторые из напряжений $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ (в зависимости от режима нагружения), чтобы

таким образом увеличенные напряжения $\sigma_{b1},\sigma_{b2},\sigma_{b3}$ (они обозначаются $\hat{\sigma}_{b1},\hat{\sigma}_{b2},\hat{\sigma}_{b3}$) удовлетворяли условию (7.1) в виде равенства нулю. Напряжения $\hat{\sigma}_{b1},\hat{\sigma}_{b2},\hat{\sigma}_{b3}$ называют предельными.

Вместо θ при определении деформаций используют уровень напряжений η, где

$$\theta = 1/\eta \ . \tag{7.14}$$

Значение η вычисляют по 7.2.2. Прочность элемента обеспеченна, если

$$\theta \geq 1 \text{ или } \eta \leq 1, \tag{7.15}$$

в других случаях элемент считается разрушенным.

7.2.2 В случае простого нагружения, когда все напряжения увеличиваются пропорционально одному параметру (в нашем случае в качестве такого параметра используется уровень η),

$$\hat{\sigma}_{b1} = \sigma_{b1}/\eta;\ \hat{\sigma}_{b2} = \sigma_{b2}/\eta;\ \hat{\sigma}_{b3} = \sigma_{b3}/\eta. \tag{7.16}$$

Внося (7.16) в (7.1), приходят к определению η из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} &a\sigma_{b1}^2 + b\sigma_{b3}^2 + \eta\sigma_{b1}\left[\tilde{\gamma}_b(f-b)+\gamma_{bt}\right]R_b + \eta\sigma_{b3}\left(\tilde{\gamma}_b b - f\tilde{\gamma}_{bt}\right)R_b - \\ &-\sigma_{b1}\sigma_{b3}(a+b+1-f) - \eta^2 f\tilde{\gamma}_{bt}R_b^2\tilde{\gamma}_b = 0. \end{aligned} \tag{7.17}$$

В случае одностороннего догружения главным напряжением σ_{b1}, когда

$$\hat{\sigma}_{b1} = \sigma_{b1}/\eta;\ \hat{\sigma}_{b2} = \sigma_{b2};\ \hat{\sigma}_{b3} = \sigma_{b3}, \tag{7.18}$$

но так, чтобы

$$\hat{\sigma}_{b1} \geq \sigma_{b2} \geq \sigma_{b3}. \tag{7.19}$$

Коэффициент η находят из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} &a\sigma_{b1}^2 + b\eta^2\sigma_{b3}^2 + \eta\sigma_{b1}\left[\tilde{\gamma}_b(f-b)+\tilde{\gamma}_{bt}\right]R_b + \eta^2\sigma_{b3}\left(\tilde{\gamma}_b b - f\tilde{\gamma}_{bt}\right)R_b - \\ &-\eta\sigma_{b1}\sigma_{b3}(a+b+1-f) - \eta^2\tilde{\gamma}_b f\tilde{\gamma}_{bt}R_b^2 = 0 \end{aligned} \tag{7.20}$$

или непосредственно определяют $\hat{\sigma}_{b1}$ из решения квадратного уравнения (7.1) при известных значениях $\hat{\sigma}_{b2} = \sigma_{b2}$ и $\hat{\sigma}_{b3} = \sigma_{b3}$, а затем уже вычисляют $\eta = \dfrac{\sigma_{b1}}{\hat{\sigma}_{b1}}$.

Указанными способами вычислять η рекомендуется при $\sigma_{b1} > 0$.

В случае одностороннего догружения напряжениями σ_{b3}, когда

$$\hat{\sigma}_{b1} = \sigma_{b1};\hat{\sigma}_{b2} = \sigma_{b2};\hat{\sigma}_{b3} = \sigma_{b3}/\eta, \tag{7.21}$$

$$\sigma_{b1} \geq \sigma_{b2} \geq \hat{\sigma}_{b3}, \tag{7.22}$$

коэффициент η находят из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} &a\eta^2\sigma_{b1}^2 + b\sigma_{b3}^2 + \eta^2\sigma_{b1}\left[\tilde{\gamma}_b(f-b)+\gamma_{bt}\right]R_b + \eta\sigma_{b3}\left(\tilde{\gamma}_b b - f\tilde{\gamma}_{bt}\right)R_b - \\ &- \eta\sigma_{b1}\sigma_{b3}(a+b+1-f) - \eta^2\tilde{\gamma}_b f\tilde{\gamma}_{bt}R_b^2 = 0 \end{aligned} \tag{7.23}$$

или непосредственно определяют $\hat{\sigma}_{b3}$ из решения квадратного уравнения (7.1) при известных значениях $\hat{\sigma}_{b1} = \sigma_{b1}$; $\hat{\sigma}_{b2} = \sigma_{b2}$, а затем уже вычисляют $\eta = \sigma_{b3} / \hat{\sigma}_{b3}$. указанными способами рекомендуется вычислять η при $\sigma_{b1} > 0$.

Различают случай трехосного неравномерного сжатия $(\sigma_{b1} < 0)$ и случай смешанных напряжений $(\sigma_{b3} < 0, \sigma_{b1} > 0)$. Если режим возможного догружения конструкции неизвестен, то в случае смешанных напряжений η вычисляют дважды – из решения уравнений (7.17) и (7.20) и из двух значений выбирают большее. В случае трехосного сжатия используют уравнение (7.23), которое приводит к большему значению η.

7.3 Учет возраста бетона, длительности действия напряжений и других факторов

7.3.1 Если прочностные характеристики бетона известны в возрасте $t_0 = 28$ сут., $(R_b = R_b(28), R_{bt} = R_{bt}(28))$, а бетон нагружается в более позднем возрасте t_0, то вместо величин $R_b(28)$ и $R_{bt}(28)$ вводят в условие (7.1) и формулу (7.6) величины $R_b(t_0)$, $R_{bt}(t_0)$, соответствующие действительному возрасту t_0 и определяемые по формуле (6.69).

7.3.2 При учете длительности действия напряжений в условии (7.1) и формуле (7.6) величины R_b и R_{bt} заменяют соответственно на величины $R_b(t,t_0)$, $R_{bt}(t,t_0)$, определяемые по формуле (6.61).

7.3.3. При учете других факторов величины R_b и R_{bt} вводятся в условие (7.1) после умножения на коэффициенты условия работы $\gamma_{bi}(i = 1, 3, 5)$, принимаемые по пункту 6.1.12 СП 63.13330.2018.

7.4 Разрушение и трещинообразование по различным схемам

7.4.1. Различают четыре схемы исчерпания прочности бетонных элементов (рисунок 7.3) при нарушении условия (7.1) и его преобразований (7.17), (7.20) и (7.23):

0 схемы разрушение элемента по всему объему вследствие трехосного, двухосного или одноосного сжатия;

1 – образование трещин, плоскость которых ортогональна направлению главного напряжения σ_{b1};

2 – образование двух взаимно перпендикулярных трещин, плоскости которых ортогональны направлениям главных напряжений σ_{b1} и σ_{b2};

3 – образование трех взаимно ортогональных трещин.

Эти схемы реализуются при следующих комбинациях напряжений:

$\sigma_{b1} < 0, \sigma_{b2} < 0, \sigma_{b3} < 0$ – схема 0;

$\sigma_{b1} \geq 0, \sigma_{b2} < 0, \sigma_{b3} < 0$ – схема 0, 1;

$\sigma_{b1} > 0, \sigma_{b2} \geq 0, \sigma_{b3} < 0$ – схема 0, 1, 2;

$\sigma_{b1} > 0, \sigma_{b2} > 0, \sigma_{b3} \geq 0$ – схема 1, 2, 3.

Для схемы 0 возможны две ситуации:

– происходит полное разрушение бетона и элемент полностью выключается из работы;

– напряжения в элементе начинают уменьшаться при работе его на ниспадающей ветви диаграмм $\sigma - \varepsilon$ и разрушение носит постепенный характер.

Для схем 1 и 2 допускается возможность полагать лишь образование трещин и учитывать сопротивление бетона по направлениям главных напряжений σ_{b2} и σ_{b3}.

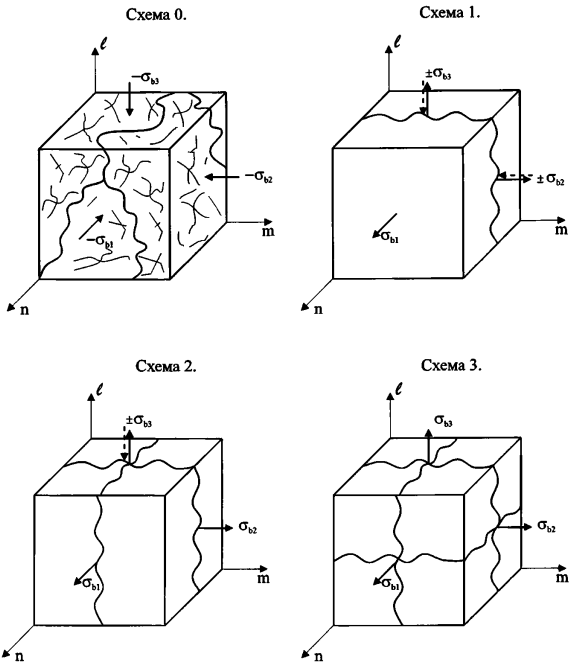


Рисунок 7.3 – Схемы разрушения и трещинообразования

Для схемы 3 при появлении трех взаимно ортогональных трещин бетон элемента полностью выключается из работы (за исключением некоторых сил зацепления).

Все ситуации должны быть рассмотрены в процессе деформационных расчетов конструкции с разрушенными элементами и должен быть решен вопрос о потере прочности конструкции в целом при соответствующем распределении усилий между отдельными элементами или частями конструкции.

7.5 Предельные деформации бетона

7.5.1 Главные относительные деформации бетона в момент исчерпания прочности бетона называют предельными. Эти деформации при кратковременном действии напряжений определяют по формулам:

$$\begin{Bmatrix}\hat{\varepsilon}_{b1}\\ \hat{\varepsilon}_{b2}\\ \hat{\varepsilon}_{b3}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E_b}\cdot\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{\hat{\nu}_{b1}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b12}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b13}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right)\\ \left(-\frac{\hat{\mu}_{b12}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right) & \left(\frac{1}{\hat{\nu}_{b2}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b23}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right)\\ \left(-\frac{\hat{\mu}_{b13}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right) & \left(-\frac{\hat{\mu}_{b23}}{\hat{\nu}_{b3}^{-}}\right) & \left(\frac{1}{\hat{\nu}_{b3}}\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\hat{\sigma}_{b1}\\ \hat{\sigma}_{b2}\\ \hat{\sigma}_{b3}\end{Bmatrix} \qquad (7.24)$$

где если $\hat{\sigma}_{b1}\le 0$ (случай трехосного сжатия, то

$$\hat{\nu}_{b1}=\hat{\nu}_{b2}=\hat{\nu}_{b3}=\hat{\nu}_{b3}^{-}=\hat{\nu}_b\cdot\varphi_R=\frac{R_b\cdot\varphi_R}{\hat{\varepsilon}_b\cdot E_b}\ ; \qquad (7.25)$$

$$\hat{\mu}_{bek}=\mu_b^0+\left(1-\sqrt[3]{\hat{\nu}_{b3}}\right)\cdot\frac{\left|\hat{\sigma}_{be}-\hat{\sigma}_{bk}\right|\cdot\varphi_R^s+\left|\hat{\sigma}_{b1}-\hat{\sigma}_{b3}\right|\cdot\left(1-\varphi_R^s\right)}{\left|\hat{\sigma}_{b1}-\hat{\sigma}_{b3}\right|}; \qquad (7.26)$$

$$(ek=12,13,23\ ),$$

здесь $\hat{\nu}_b$, $\hat{\varepsilon}_b$ – соответственно коэффициент изменения секущего модуля и относительные деформации в вершине диаграммы одноосного сжатия: $\hat{\nu}_b=\frac{R_b}{\hat{\varepsilon}_b\cdot E_b}$, $\hat{\varepsilon}_b$ определяют по формуле (6.5); φ_R – параметр, учитывающий тот факт, что предельные деформации бетона в условиях трехосного сжатия намного превышают деформации в условиях одноосного сжатия, и определяемый по формуле

$$\varphi_R=\left|\frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\sigma}_{b3}}\right|, \qquad (7.27)$$

$\hat{\sigma}_b$ – предельные напряжения в вершине диаграммы одноосного сжатия ($\hat{\sigma}_b=R_b$); $\hat{\sigma}_{b3}$ – предельные напряжения в условиях трехосного сжатия; μ_b^0 – начальный коэффициент поперечной деформации ($\mu_b^0=0{,}2$); s=1 для тяжелого бетона, s=2 для мелкозернистого.

7.5.2 Если $\sigma_{b1}>0$ (область смешанных напряжений и всестороннего растяжения), то предварительно выполняется сортировка напряжений $\sigma_{be}(e=1,2,3)$ на положительные σ_{be}^{+} и отрицательные σ_{be}^{-} напряжения (например, если $\sigma_{b1}>0$, то $\sigma_{b1}^{+}=\sigma_{b1}$, $\sigma_{b1}^{-}=0$; если $\sigma_{b3}<0$, то $\sigma_{b3}^{+}=0$; $\sigma_{b3}^{-}=\sigma_{b3}$), затем определяются соответствующие им величины

$$\left.\begin{aligned}\hat{\nu}_{be} &= \hat{\nu}^{+}_{be}\cdot\hat{\nu}^{-}_{be};\\ \hat{\mu}_{bek} &= \mu^{0}_{b}+\left(1-\sqrt[3]{\hat{\nu}^{-}_{b3}}\right)\cdot\frac{\left|\hat{\sigma}^{\Pi}_{be}-\hat{\sigma}^{\Pi}_{bk}\right|}{\left|\hat{\sigma}^{\Pi}_{b1}-\hat{\sigma}^{\Pi}_{b3}\right|},\end{aligned}\right\} \qquad (7.28)$$

$$(ek = 13,23,12);$$

здесь величины $\hat{\nu}_{be}$, $\hat{\nu}^{+}_{be}$, $\hat{\nu}^{-}_{be}$ – меньше или равны единице,

$$\hat{\nu}^{+}_{be} = 1-\left(1-\hat{\nu}_{bt}\right)\cdot\sqrt[4]{\frac{\hat{\sigma}^{+}_{e}}{\hat{\sigma}_{bt}}},$$

причем $\frac{\hat{\sigma}^{+}_{e}}{\hat{\sigma}_{bt}}\le 1$; $\hat{\nu}_{bt}$ вычисляют по формуле (6.11); $\hat{\sigma}_{bt}$ – прочность бетона в вершине диаграммы одноосного сжатия ($\hat{\sigma}_{bt} = R_{bt.ser}$); если $\left|\frac{\hat{\sigma}^{-}_{b3}}{\hat{\sigma}_{b}}\right|\le 1$, то

$$\hat{\nu}^{-}_{b3} = 1-\left(1-\hat{\nu}_{b}\right)\cdot\left|\frac{\hat{\sigma}^{-}_{b3}}{\hat{\sigma}_{b}}\right|. \qquad (7.29)$$

7.5.3 Если $\left|\frac{\hat{\sigma}^{-}_{b3}}{\hat{\sigma}_{b}}\right|>1$, то $\hat{\nu}^{-}_{b3}$ вычисляют по формуле (7.25), $\hat{\sigma}^{\Pi}_{be}$ или $\hat{\sigma}^{\Pi}_{bk}$ $(e,k = 1,2,3, e\ne k)$ – приведенные главные напряжения, причем $\hat{\sigma}^{\Pi}_{be} = \alpha_{R}\cdot\hat{\sigma}_{be}$; если $\hat{\sigma}^{\Pi}_{be} = \hat{\sigma}^{+}_{be}$ (напряжения положительны); $\hat{\sigma}^{\Pi}_{be} = \hat{\sigma}_{be}$, если $\hat{\sigma}_{be} = \hat{\sigma}^{-}_{be}$ (напряжения отрицательны); $\alpha_{R} = \left|\frac{\hat{\sigma}_{b}}{\hat{\sigma}_{bt}}\right|$.

8 Связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения) для бетонных элементов при объемном напряженном состоянии

8.1 Общие положения

8.1.1 Исходные физические соотношения для бетонных элементов записывают в виде: связей между главными напряжениями и главными относительными деформациями (первый вид записи, согласно 8.2, 8.5); связей между приращениями главных напряжений и деформаций (второй вид записи, согласно 8.3, 8.5). В этих соотношениях учитывается физическая нелинейность (коэффициенты жесткости или податливости зависят от напряжений или деформаций) и приобретаемая в процессе деформирования ортотропия.

Ортотропия обусловлена возникновением и направленным развитием микротрещин (в основном вдоль площадок максимальных растягивающих и минимальных по модулю сжимающих главных напряжений) в процессе увеличения напряжений, а также различными диаграммами деформирования бетона при сжатии и растяжении.

При длительном приложении напряжений учитывается ползучесть на основе использования диаграмм-изохрон. Соотношения, учитывающие ползучесть приведены в 8.5.

8.1.2 Вводимые в физические соотношения главные напряжения в бетоне ($\sigma_{b1},\sigma_{b2},\sigma_{b3}$), как и при рассмотрении условий прочности полагаются расположенными в последовательности: $\sigma_{b1} \geq \sigma_{b2} \geq \sigma_{b3}$. Если при этом направлении главных напряжений $\sigma_{b1},\sigma_{b2},\sigma_{b3}$ в процессе нагружения не меняются, то такие напряжения называются главными с фиксированными направлениями. Положительные – напряжения растяжения. Отдаленность (или близость) главных напряжений к их предельным значениям, характеризующим начало разрушения бетонного элемента, оцениваются согласно указаниям пункта 7.2 по уровню напряжений η.

Модули деформации физических соотношений зависят от уровня η и программы (режима) нагружения.

8.1.3 Под простой нагрузкой (разгрузкой) подразумевают нагрузку (разгрузку), в результате которых все три главных напряжения с фиксированными направлениями увеличиваются (уменьшаются) пропорционально одному параметру. В случае, если главные напряжения остаются фиксированными, но при этом их значения изменяются не пропорционально одному параметру, однако так, что уровень η возрастает, то такое нагружение называют активным (при убывании уровня получают случай активной разгрузки). Остальные случаи нагрузки (разгрузки) относятся к сложным.

8.1.4 Сформированные для каждого элемента физические соотношения в локальных осях n , m , l главных напряжений затем переводятся в глобальную (общую для всей конструкции) систему координат по 8.6.

Связи между приращениями напряжений и деформаций представлены в двух видах: – между конечными приращениями главных напряжений и деформаций, – между малыми приращениями (дифференциалами) главных напряжений и деформаций.

8.2 Связи между полными напряжениями и деформациями в случае активной нагрузки

8.2.1 Главные относительные деформации в физических соотношениях обозначают: $\varepsilon_{b1}, \varepsilon_{b2}, \varepsilon_{b3}$, $\frac{1}{2}\gamma_{b12}, \frac{1}{2}\gamma_{b23}, \frac{1}{2}\gamma_{b31}$, а главные напряжения: $\sigma_{b1}, \sigma_{b2}, \sigma_{b3}$, $\tau_{b12}, \tau_{b23}, \tau_{b31}$. Они образуют два вектор-столбца:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_b\}_n &= \left\{\varepsilon_{b1}, \varepsilon_{b2}, \varepsilon_{b3}, \frac{1}{2}\gamma_{b12}, \frac{1}{2}\gamma_{b23}, \frac{1}{2}\gamma_{b31}\right\}^T; \\ \{\sigma_b\}_n &= \{\sigma_{b1}, \sigma_{b2}, \sigma_{b3}, \tau_{b12}, \tau_{b23}, \tau_{b31}\}^T, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где T – знак транспонирования.

Касательные компоненты напряжений и деформаций – симметричны (т.е. $\gamma_{b12} = \gamma_{b21}$, $\gamma_{b23} = \gamma_{b32}$, $\gamma_{b31} = \gamma_{b13}$, $\tau_{b12} = \tau_{b21}$, $\tau_{b23} = \tau_{b32}$, $\tau_{b31} = \tau_{b13}$). Кроме этого в осях главных напряжений и деформаций все касательные компоненты равны нулю. Однако они остаются в приведенных ниже выражениях с целью использования стандартных матричных преобразований при переводе физических соотношений из локальной системы координат в глобальную (п. 8.6).

Связи между полными напряжениями и деформациями в случае простой и активной нагрузок представляются в виде

$$\{\varepsilon_b\}_n = [C_b]_n \{\sigma_b\}_n, \tag{8.2}$$

где $[C_b]_n$ – матрица податливости бетона.

Матрица податливости бетона определяется:

$$[C_b]_n = \frac{1}{E_b}\begin{bmatrix} (1/\nu_{b1}) & (-\mu_{b12}/\nu_b^-) & (-\mu_{b13}/\nu_b^-) & 0 & 0 & 0 \\ (-\mu_{b12}/\nu_b^-) & (1/\nu_{b2}) & (-\mu_{b23}/\nu_b^-) & 0 & 0 & 0 \\ (-\mu_{b13}/\nu_b^-) & (-\mu_{b23}/\nu_b^-) & (1/\nu_{b23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_{G12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{G23}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_{G13}^{-1} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

В матрице (8.3):

$\nu_{be}(e=1,2,3)$ – коэффициенты изменения секущих модулей деформации бетона,

$$\nu_{be} = \hat{\nu}_{be} \pm (\nu_{oe} - \hat{\nu}_{be})\sqrt{1-\omega_{1e}\eta_e - \omega_{2e}\eta_e^2}, \quad (8.4)$$

здесь и ниже из двух знаков выбирается знак плюс (знак минус вводится при учете деформирования элемента на нисходящей ветви, т.е. после выхода напряжений на поверхность прочности);

$$\omega_{1e} = 2 - 2{,}05\hat{\nu}_{be};\ \omega_{2e} = 1 - \omega_{1e}; \quad (8.5)$$

η_e – уровень главных напряжений,

$$\eta_e = \sigma_{be}/\hat{\sigma}_{be}; \qquad \nu_{be}(e=1,2,3)$$

здесь значения $\hat{\nu}_{be}$ вычисляют по п.7.5 (на восходящей ветки $\eta_e = \eta$, где η указаны в п. 7.2). Остальные значения, входящих в формулу (8.4) конкретизируются ниже в зависимости от области напряженного состояния;

ν_b^- – доля ν_{be}, зависящая от уровня максимальных по модулю напряжений сжатия (определяется по формуле (8.4) с указанными ниже особенностями в зависимости от области напряженного состояния);

μ_{bek} – коэффициент поперечной деформации,

$$\mu_{bek} = \mu_{bke} = \hat{\mu}_{bek} + (\mu_b^0 - \hat{\mu}_{bek})\sqrt{1-\eta_3^2}; \quad (8.6)$$

$$(ek = 12,\ 23,\ 13),$$

ν_{Gek} – коэффициенты изменения секущих модулей сдвига,

$$\frac{1}{\nu_{Gek}} = \frac{1}{\nu_{be}} + \frac{1}{\nu_{bk}} + \frac{2\mu_{bek}}{\nu_b^-} \quad (8.7)$$

$$(ek = 12,\ 23,\ 13).$$

При использовании формулы (8.4) различают две области напряженного состояния: область $\sigma_{b1} \le 0$ и область $\sigma_{b1} > 0$.

8.2.2 Область напряжений $\sigma_{b1} < 0$ (случай трехосного сжатия)

Принимают

$$\nu_{b1} = \nu_{b2} = \nu_b^- = \nu_{b3}, \tag{8.8}$$

где коэффициент ν_{b3} вычисляют по формуле (8.4), полагая

$$\eta_e = \eta_3;\ \hat{\nu}_{be} = \hat{\nu}_{b3};\ \nu_{0e} = \nu_{03} = \nu_0\left[1 - c\left(\left|\frac{\sigma_{b3}}{R_{b,ser}}\right|\right)^{\frac{1}{3}}\right], \tag{8.9}$$

здесь $\hat{\nu}_{b1} = \hat{\nu}_{b2} = \hat{\nu}_{b3}$ определяют по указаниям пункта 7.5; ν_{0e} – начальные значения коэффициента ν_{be}; ν_0 = I-на восходящей ветви, $\nu_0 = 2{,}05\hat{\nu}_{b3}$ – на нисходящей; на восходящей ветви

$$c = \left(0{,}75\left|\hat{\nu}_b - \hat{\nu}_{b3}\right|\right)^s;\ 5 \ge s = R_1/\left(R_2 - R_{b,ser}\right); \tag{8.10}$$

R_1, R_2 – импирические величины

$$R_1 = 60\ \text{МПа};\ R_2 = 75\ \text{МПа}; \tag{8.11}$$

на нисходящей ветви c=0.

$\hat{\nu}_b$ – соответствует вершине диаграммы одноосного сжатия и вычисляется по п. 6.1.3.

Значения величин $\hat{\mu}_{bek}$ и μ_b^0, входящих в формулу (8.6), вычисляют п. 7.5.

8.2.3 Область напряжений $\sigma_{b1} \succ 0$ (смешанных напряжений и всестороннего растяжения)

Коэффициенты $\nu_{be}(e = 1,2,3)$ вычисляют по формуле (8.4), полагая $\nu_{0e} = \nu_0 = 1$ на восходящей ветви и $\nu_{0e} = 2{,}05\,\hat{\nu}_{0e}$ – на нисходящей и назначая $\hat{\nu}_{be}$ по п. 7.5.

Коэффициент ν_b^- вычисляют по формуле (8.4), заменяя в ней ν_{be} на ν_{b3}^-; η_e на η_3; $\hat{\nu}_{be}$ на $\hat{\nu}_b^-$, значения $\hat{\nu}_b^-$ указаны в п.7.5 и полагая $\nu_{0e} = 1$ на восходящей ветви и $\nu_{0e} \approx 2{,}05\nu_{b3}^-$ на нисходящей (при $\sigma_{b3} > 0$ – в случае трехосного растяжения эти вычисления можно не выполнять, принимая $\nu_b^- = 1$).

Параметры μ_b^0 и μ_{bek}, входящие в формулу (8.6), назначают по указаниям п.7.5.

Если история активной нагрузки заранее не известна, то она может заменяться последовательным рассмотрением простых нагрузок на шагах. При этом на каждом шаге нагрузки фиксируют главные напряжения $\sigma_{be}(e=1,2,3)$, принимают их как компоненты простого нагружения для данного шага и переходят к формированию матрицы податливости бетона (8.3) по представленным выше указаниям и формулам.

8.3 Разгрузка. Запись физических соотношений в конечных приращениях

8.3.1 Пусть теперь простая или активная нагрузка в некоторой точке A (при напряжениях $\sigma_{be(A)}$ и относительных деформациях $\varepsilon_{be(A)}$) сменяется простой или активной разгрузкой; σ_{be}, ε_{be} – текущие (на шагах) напряжения и деформации на ветви разгрузки.

Приращения напряжений и деформаций, отсчитываемые от точки A – конечные (в принципе любые, в отличие от бесконечно малых); эти приращения составляют:

$$\sigma_{\Delta be}=\sigma_{be}-\sigma_{be(A)};\ \varepsilon_{\Delta be}=\varepsilon_{be}-\varepsilon_{be(A)}\ (e=1,2,3). \tag{8.12}$$

Физические соотношения на ветви разгрузки записываются в приращениях:

$$\{\varepsilon_{\Delta b}\}_n=[c_{\Delta b}]_n\{\sigma_{\Delta b}\}_n, \tag{8.13}$$

где $\{\varepsilon_{\Delta b}\}_n$ – вектор-столбец приращений деформаций

$$\{\varepsilon_{\Delta b}\}_n=\{\varepsilon_{\Delta b1},\varepsilon_{\Delta b2},\varepsilon_{\Delta b3},\gamma_{\Delta b12},\gamma_{\Delta b23},\gamma_{\Delta b31}\}^T, \tag{8.14}$$

вектор-столбец приращений напряжений

$$\{\sigma_{\Delta b}\}_n=\{\sigma_{\Delta b1},\sigma_{\Delta b2},\sigma_{\Delta b3},\tau_{\Delta b12},\tau_{\Delta b23},\tau_{\Delta b31}\}^T, \tag{8.15}$$

$[c_{\Delta b}]_n$ – матрица податливости бетона на приращениях напряжений и деформаций при разгрузке,

$$[c_{\Delta b}]_n = \frac{1}{E_b}\begin{bmatrix} (1/\nu_{\Delta b1}) & -\mu_b^0 & -\mu_b^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_b^0 & (1/\nu_{\Delta b2}) & -\mu_b^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_b^0 & -\mu_b^0 & (1/\nu_{\Delta b3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G23}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\nu_{\Delta G13}) \end{bmatrix}. \qquad (8.16)$$

Коэффициенты $\nu_{\Delta be}$ $(e=1,2,3)$, входящие в матрицу (8.16), вычисляют двояким способом. При первом способе

$$\nu_{\Delta be} = \nu_{be}^{\cdot}\left[1+0{,}2(\eta_{(A)}-\eta)^2\right], \qquad (8.17)$$

где $\nu_{be}^{\cdot}$ – коэффициенты, вычисляемые по текущим (на шагах) напряжениям σ_{be} как при простой нагрузке; $\eta_{(A)}$ – уровень напряжений в точке A начала разгрузки; η – уровень текущих напряжений σ_{be}.

Во втором способе коэффициенты ν_{be} вычисляют по формуле (8.4), полагая в ней

$$\nu_{0i} = \nu_{bi(A)}^{-1};\ \hat{\nu}_{bi} = 1-0{,}2\eta_{(A)} \qquad (8.18)$$

и заменяя η на $\eta_{\Delta} = \eta_{(A)} - \eta$;

$\nu_{bi(A)}$ – коэффициент ν_{bi} вычисляемый на ветви нагрузки в точке A.

Коэффициент $\nu_{\Delta Gek}$ вычисляют по формуле (8.7), заменяя в ней ν_{Gek} на $\nu_{\Delta Gek}$, $\nu_{be}(\nu_{bk})$ на $\nu_{\Delta be}(\nu_{\Delta bk})$, μ_{bek} на μ_b^0 и полагая $\nu_b^{-} = 1$.

8.3.2 Повторная нагрузка

Если в процессе разгрузки переходят из области напряженного состояния $\sigma_{b1} < 0$ в область $\sigma_{b1} > 0$ и наоборот, то начало перехода в другую область относится к началу нагрузки в этой области.

Теперь пусть разгрузка в одной области напряжений следует до точки B, а затем начинается повторная нагрузка. В точке B фиксируются значения величины $\nu_{\Delta be(B)}$, вычисляемые по формуле (8.17) или (8.18) в которых коэффициент 0,2 заменяется на 0,25. Физические соотношения записываются в виде (8.13), где приращения напряжений и деформаций вычисляются по формулам (8.12) после

замены в этих формулах индекса A на индекс B. Матрицу податливости $\left[c_{\Delta b}\right]_n$ представляют в виде (8.16), заменяя $\nu_{\Delta be}$ на $\nu_{\Delta be(B)}$. Эти соотношения используют до тех пор, пока текущие уровни η не достигнут величины $\eta_{(A)}$ – уровня напряжений, соответствующего началу разгрузки в точке A. После этого переходят к определению деформаций по первоначальным соотношениям (8.2) – (8.11).

8.4 Единые зависимости для нагрузки и разгрузки

8.4.1 В практических расчетах не всегда удобно одновременно использовать деформационные (типа (8.2)) и инкрементальные (типа (8.13)) формулировки физических соотношений, а встает задача приведения соотношений к единому виду. Это приведение следует осуществлять по указанным ниже правилам. Пусть на линии нагружения, изображенной в координатах главных напряжений $\sigma_{be}\left(e=1,2,3\right)$, намечены три точки 0, 1, 2 и записаны соотношения с индексами $\left(p-s\right)=\left(1-0\right),\left(2-1\right),\left(2-0\right)$, в виде

$$\left\{\varepsilon_b\right\}_{n(p-s)}=\left[C_b\right]_{n(p-s)}\left\{\sigma_b\right\}_{n(p-s)}\ , \tag{8.19}$$

где вторые индексы $s=0,1,0$ в круглых скобках указывают на точку, от которой отсчитываются приращения напряжений и деформаций, а также значения секущих модулей, а первые $p=1,2,2-$ на точку, для которой устанавливаются связи между таким образом найденными приращениями напряжений и деформаций. Если точка 0 помещена в начало координат, то, естественно, приращения на участках (1-0) и (2-0) переходят в общие величины напряжений и деформаций для точек 1,2 и лишь на участке (2-1) они выступают как приращения.

В соотношениях (8.19):

Вектор столбец приращений напряжений и относительных деформаций на участке $\left(p-s\right)$,

$$\left.\begin{aligned}\left\{\varepsilon_b\right\}_{n(p-s)}&=\left\{\varepsilon_{b1(p-s)},\varepsilon_{b2(p-s)},\varepsilon_{b3(p-s)},\gamma_{b12(p-s)},\gamma_{b23(p-s)},\varepsilon_{b31(p-s)}\right\}^T;\\ \left\{\sigma_b\right\}_{n(p-s)}&=\left\{\sigma_{b1(p-s)},\sigma_{b2(p-s)},\sigma_{b3(p-s)},\tau_{b12(p-s)},\tau_{b23(p-s)},\tau_{b31(p-s)}\right\}^T;\end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

$[C_b]_{n(p-s)}$ – матрица податливости бетона на приращениях напряжений и деформаций на участке $(p-s)$

$$[C_b]_{n(p-s)}=\begin{bmatrix} c^n_{b11(p-s)} & c^n_{b12(p-s)} & c^n_{b13(p-s)} & 0 & 0 & 0 \\ c^n_{b12(p-s)} & c^n_{b22(p-s)} & c^n_{b23(p-s)} & 0 & 0 & 0 \\ c^n_{b13(p-s)} & c^n_{b23(p-s)} & c^n_{b33(p-s)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^n_{b44(p-s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^n_{b55(p-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^n_{b66(p-s)} \end{bmatrix}, \quad (8.21)$$

где $c^n_{bke(p-s)}$ – элементы матрицы, определяемые через элементы матриц (8.3) и (8.15) на основе соотношений:

$$c_{ke(2-0)}\left[\sigma_{\Delta e(2-0)}+\sigma_{\Delta k(2-0)}\right]=c_{ke(1-0)}\left[\sigma_{\Delta e(1-0)}+\sigma_{\Delta k(1-0)}\right]+c_{ke(2-1)}\left[\sigma_{\Delta e(2-1)}+\sigma_{\Delta k(2-1)}\right], \quad (ke=11,12,13,22,23,33), \quad (8.22)$$

$$\left.\begin{aligned} c^n_{b44(p-s)}&=c^n_{b11(p-s)}+c^n_{b22(p-s)}+2c^n_{b12(p-s)};\\ c^n_{b55(p-s)}&=c^n_{b22(p-s)}+c^n_{b33(p-s)}+2c^n_{b23(p-s)};\\ c^n_{b66(p-s)}&=c^n_{b11(p-s)}+c^n_{b33(p-s)}+2c^n_{b13(p-s)}. \end{aligned}\right\}. \quad (8.23)$$

Формулы (8.22) связывают коэффициенты податливости на трех участках деформирования (1–0), (2–1) и (2–0). Значения податливостей на двух участках ((1–0), (2–0) – на ветви нагрузки и (1–0), (2–1) – в случае, если в точке 1 нагрузка сменяется разгрузкой) вычисляют по п.8.2, 8.3, а на третьем участке их находят, используя соотношения (8.22).

Например, на указанном выше пути нагружения 0–*A*–*B* с разгрузкой (которой является одним из вариантов пути нагружения 0–1–2) коэффициенты $c_{ke(A-0)}$ вычисляют по п.8.2, коэффициенты $c_{ke(B-A)}$ – по п. 8.3, коэффициенты $c_{ke(B-0)}$ находят, используя соотношения (8.22), (8.23). Внося коэффициенты $c_{ke(B-0)}$ в матрицу (8.3), можно на ветви разгрузки (если она является частичной) вместо соотношений (8.19), записанных в конечных приращениях, использовать деформационные соотношения (8.2). И, наоборот, путь нагружения до точки *A* можно пройти, используя вместо (8.2) соотношение (8.19) на отрезке типа 2–1, при этом на отрезках (1–0) и (2–0) жесткости c_{ke} вычисляются по формулам (8.4) – (8.11), а на отрезке 2–1 они находятся из соотношений (8.22) или (8.23).

Записывая физические соотношения относительно небольших конечных приращений, можно, с некоторым приближением, использовать эти соотношения и для описания сложного нагружения при изменении нумерации и ориентации осей главных напряжений.

8.5 Связи между напряжениями и деформациями с учетом влияния ползучести

8.5.1 Деформации ползучести учитываются на основе приведенных в п.6.4.1 – 6.4.3 диаграмм-изохрон с учетом указанных в настоящем пункте дополнительных особенностей «натекания» таких деформаций в условиях длительного трехосного напряжения. Изохронами описываются жесткие режимы ступенчатого нагружения, когда напряжения $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ прикладываются в возрасте t_0 в течение непродолжительного периода времени (одного часа), а затем выдерживаются в течении времени $t-t_0$ практически постоянными (допускаемое изменение напряжений в течении $t-t_0$ составляет 10%).

Физические соотношения представляются формулами (8.1) – (8.10), (7.24) – (7.29) и п. 7.5 и 8.2.1, в которые вносят следующие изменения:

– функции напряжений, а также константы, входящие в формулы п. 7.5 и 8.2.1 за исключением констант μ_b^0, R_1, R_2 (они не изменяются), становятся зависимыми еще и от времени действия напряжений $(t-t_0)$ и возраста бетона t_0 к моменту приложения напряжений, что сказывается формально на их обозначениях, например, ν_{be}, η_e, $\hat{\nu}_{be}$, $\hat{\sigma}_{be}(e=1,2,3)$, μ_{bek}, $\hat{\mu}_{bek}$, $\nu_{Gek}(ek=12,23,13)$, ν_0, $\hat{\nu}_b$, $\hat{\nu}_{bt}$, $R_{b,ser}$, $R_{bt,ser}$, E_b и др. заменяются соответственно на $\nu_{be}(t,t_0)$, $\eta_e(t,t_0)$, $\hat{\nu}_{be}(t,t_0)$, $\hat{\sigma}_{be}(t,t_0)$, $\mu_{bek}(t,t_0)$, $\hat{\mu}_{bek}(t,t_0)$, $\nu_{Gek}(t,t_0)$, $\nu_0(t,t_0)$, $\hat{\nu}_b(t,t_0)$, $\hat{\nu}_{bt}(t,t_0)$, $R_{b,ser}(t,t_0)$, $R_{bt,ser}(t,t_0)$, $E_b(t,t_0)$ и т.д.;

– функции $\hat{\sigma}_{be}(t,t_0)$ вычисляют по п.7.5; заменяют φ_R в формулах п.7.5 на $\varphi_R(t,t_0)$, где

$$1\ge\varphi_R(t,t_0)=R_b(t,t_0)/|\hat{\sigma}_{b3}(t,t_0)|, \tag{8.24}$$

допускается заменять φ_R на $\varphi_R(t_0^*)$, где

$$1 \ge \varphi_R(t_0^*) = R_b(t_0^*) \Big/ \left|\hat{\sigma}_{b3}(t_0^*)\right|, \tag{8.25}$$

($\varphi_R(t_0^*)=1$; $\varphi_R(t,t_0)=1$ в области смешанных напряжений сжатия-растяжения и трехосного растяжения; здесь и ниже $t_0^* = t_0 + 1/24$ сут.); предельные напряжения $\hat{\sigma}_{b3}(t,t_0)$ – вычисляют по п.7.3; $\varphi(t,t_0)$ – определяется формулой (6.59));

– функции $v_0(t,t_0)$, $\hat{v}_b(t,t_0)$, $\hat{v}_{bt}(t,t_0)$, $R_{b,ser}(t,t_0)$, $E_b(t,t_0)$ вычисляют по п.6.4.1 – 6.4.3, заменяя в формулах (6.55) и (6.59) коэффициент k на $k\varphi_R(t,t_0)$ (допускается заменять k на $k\varphi_R(t_0^*)$);

– коэффициент c в формуле (8.9), который теперь может обозначаться $c(t,t_0)$, на восходящей ветви определяют по формуле

$$c(t,t_0) = 0{,}75\left|\hat{v}_0(t_0^*) - \hat{v}_{b3}(t,t_0)\right|^s, \tag{8.26}$$

здесь s вычисляют по формуле (8.10).

На нисходящей ветви $c(t,t_0)=0$.

8.6 Преобразование физических соотношений при повороте осей координат

Физические соотношения (8.2), (8.13), (8.19) для бетона записаны в локальных осях координат n,m,l в виде связей относительных деформаций (или их конечных приращений) с напряжениями (или их приращениями) через матрицу податливости. Прежде чем использовать эти соотношения в зависимостях метода конечных элементов, выполняют две операции:

–операция обращения соотношений к виду, связывающему наоборот напряжения с деформациями через матрицу жесткости и

– операция перевода полученных соотношений из локальных осей координат n,m,l (или 1, 2, 3, или x',y',z', как они еще иначе обозначены в п.5.5) в глобальную (общую для всей конструкции) систему x,y,z. В некоторых случаях физические соотношения используют в виде (8.2) и выполняют лишь одну процедуру перевода этих соотношений в глобальную систему координат x,y,z.

В результате операции обращения соотношений (8.2) получают

$$\{\sigma_b\}_n = [C_b]_n^{-1}\{\varepsilon_b\}_n = [d_b]_n\{\varepsilon_b\}_n, \tag{8.27}$$

где $$[d_b]_n = [C_b]_n^{-1} \quad (8.28)$$

здесь $[d_b]_n$ – матрица жесткости.

Преобразованные к координатам x,y,z соотношения (8.3) и (8.27) соответственно записываются

$$\left.\begin{aligned} \{\varepsilon_b\}_x &= [C_b]_x \{\sigma_b\}_x; \\ \{\sigma_b\}_x &= [d_b]_x \{\varepsilon_b\}_x, \end{aligned}\right\} \quad (8.29)$$

где $\{\varepsilon_b\}_x$, $\{\sigma_b\}_x$ – вектор-столбцы соответственно относительных деформаций и напряжений в осях координат

$$\left.\begin{aligned} \{\varepsilon_b\}_x &= \{\varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}, \varepsilon_{bz}, \gamma_{bxy}, \gamma_{byz}, \gamma_{bzx}\}^T; \\ \{\sigma_b\}_x &= \{\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \sigma_{bz}, \tau_{bxy}, \tau_{byz}, \tau_{bzx}\}^T, \end{aligned}\right\} \quad (8.30)$$

$\{C_b\}_x$ – матрица податливости материала размером 6х6 с элементами $c_{bji} = c_{bij}$ в координатах x,y,z $(i,j = 1,2,3,4,5,6)$; здесь и далее первый индекс – номер строки в матрице, второй – номер столбца, на пересечении которых расположен конкретный элемент;

$[d_b]_x = [C_b]_x^{-1}$ – матрица жесткости материала размером 6×6 с элементами $d_{bij} = d_{bji} (i \neq j)$ в координатах x,y,z.

Между вектор-столбцами напряжений и деформаций в осях n,m,l и x,y,z имеются связи:

$$\{\sigma_b\}_n = [\alpha]\{\sigma_b\}_x; \ \{\sigma_b\}_x = [\alpha]^{-1}\{\sigma_b\}_n; \quad (8.31)$$

$$\{\varepsilon_b\}_x = [\alpha]^T \{\varepsilon_b\}_n; \ \{\varepsilon_b\}_n = \left([\alpha]^{-1}\right)^T \{\varepsilon_b\}_x, \quad (8.32)$$

где T – знак транспонирования матрицы,

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & 2l_{11}l_{12} & 2l_{12}l_{13} & 2l_{11}l_{13} \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 & l_{23}^2 & 2l_{22}l_{21} & 2l_{22}l_{23} & 2l_{21}l_{23} \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & l_{33}^2 & 2l_{31}l_{32} & 2l_{32}l_{33} & 2l_{33}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}l_{12} & l_{23}l_{13} & (l_{11}l_{22}+l_{21}l_{12}) & (l_{12}l_{23}+l_{22}l_{13}) & (l_{13}l_{21}+l_{23}l_{11}) \\ l_{21}l_{31} & l_{22}l_{32} & l_{23}l_{33} & (l_{21}l_{32}+l_{22}l_{31}) & (l_{22}l_{33}+l_{23}l_{32}) & (l_{23}l_{31}+l_{21}l_{33}) \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} & l_{33}l_{13} & (l_{31}l_{12}+l_{32}l_{11}) & (l_{32}l_{13}+l_{33}l_{12}) & (l_{33}l_{11}+l_{31}l_{13}) \end{bmatrix}, \quad (8.33)$$

$[\alpha]^{-1}$ – обратная матрица, эту матрицу в наших случаях можно получать формально, поменяв местами индексы направляющих косинусов в матрице $[\alpha]$ (т.е. l_{12} заменяется на l_{21}, l_{13} на l_{31} и т.д.).

Направляющие косинусы l_{ij} фиксируются согласно таблице 5.1; преобразования (8.31) и (8.32) устанавливаются по п.5.5. В этом случае компоненты $\{\varepsilon_b\}_n$ и $\{\varepsilon_b\}_x$ не образуют симметричный тензор, поскольку касательные компоненты γ_{ek} применяются без коэффициента $\frac{1}{2}$, поэтому их преобразования сводятся к формулам (8.32). Если коэффициент $\frac{1}{2}$, если $\frac{1}{2}\gamma_{ek}$ вводится, тогда компоненты деформаций преобразовываются по формулам типа (8.31). При этом γ_{ek} заменяется на $\frac{1}{2}\gamma_{ek}$.

Несимметричные компоненты $\{\varepsilon_b\}_x$, $\{\varepsilon_b\}_n$ вводятся для того, чтобы при повороте осей координат можно было сохранять симметрию матриц жесткости и податливости материала относительно главной диагонали.

Используются вторые обозначения направляющих косинусов согласно таблице 5.1 матрицу (8.33) можно также представить в виде:

$$[\alpha]=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} n_x^2 & n_y^2 & n_z^2 & 2n_xn_y & 2n_yn_z & 2n_zn_x \\ \hline m_x^2 & m_y^2 & m_z^2 & 2m_xm_y & 2m_ym_z & 2m_zm_x \\ \hline l_x^2 & l_y^2 & l_z^2 & 2l_xl_y & 2l_yl_z & 2l_zl_x \\ \hline m_xn_x & m_yn_y & m_zn_z & (n_xm_y+m_xn_y) & (n_ym_z+m_yn_z) & (n_zm_x+m_zn_x) \\ \hline m_xl_x & m_yl_y & m_zl_z & (m_xl_y+m_yl_x) & (m_yl_z+m_zl_y) & (m_zl_x+m_xl_z) \\ \hline l_xn_x & l_yn_y & l_zn_z & (l_xn_y+l_zn_x) & (l_yn_z+l_zn_y) & (l_zn_x+l_xn_z) \end{array}\right], \qquad (8.34)$$

Матрицы жесткости и податливости при повороте осей координат преобразовываются в виде

$$\left.\begin{array}{l} [C_b]_x=[\alpha]^T[C_b]_n[\alpha]; \\ [d_b]_x=[\alpha]^{-1}[d_b]_n\left([\alpha]^{-1}\right)^T \end{array}\right\} \qquad (8.35)$$

и наоборот

$$\left.\begin{aligned}[C_b]_n &= \left([\alpha]^{-1}\right)^T [C_b]_x [\alpha]^{-1};\\ [d_b]_n &= [\alpha][d_b]_x [\alpha]^T\end{aligned}\right\}. \tag{8.36}$$

Соотношения (8.13), (8.19) преобразовывают таким же образом.

9 Оценка прочности железобетонных элементов без трещин и с трещинами при различных напряженных состояниях

9.1 Ортогональное (ортотропное) и косоугольное армирования. Учет дискретно расположенных стержней.

Рассматривается элемент, с взаимно ортогональным (ортотропным) армированием, совпадающим с осями координат *x, y, z* в виде объемных (рисунок 9.1 а) каркасов, а также, возможно, дисперсным армированием арматурными стержнями *i* -го направления, расположенными под произвольным углом к осям координат (рисунок 9.1 б). Каждое направление стержней ($i = x$, y, z, j) характеризуется коэффициентом армирования μ_{si} , который равен площади A_i стержней, приходящейся на единицу площади плоскости, проведенной нормально к направлению стержней. Согласно рисунку 9.1 а

$$\mu_{sx} = \frac{A_x}{a_y a_z};\ \ \mu_{sy} = \frac{A_y}{a_x a_z};\ \mu_{sz} = \frac{A_z}{a_x a_y} \tag{9.1}$$

где $a_i (i = x,y,z)$ – расстояния между стержнями.

Согласно рисунку 9.1 б

$$\mu_{sj} = \frac{A_j}{a_1 a_2}, \tag{9.2}$$

где A_j – площади отдельных стержней *j* направлений;

a_1, a_2 – расстояния между стержнями.

Если к некоторому направлению *i* дисперсно устанавливаемой арматуры добавляются отдельные дискретные стержни, то

$$\mu_{si} = \mu_{si} + \sum_i \frac{A_{si(1)}}{S_{i(1)}} \tag{9.3}$$

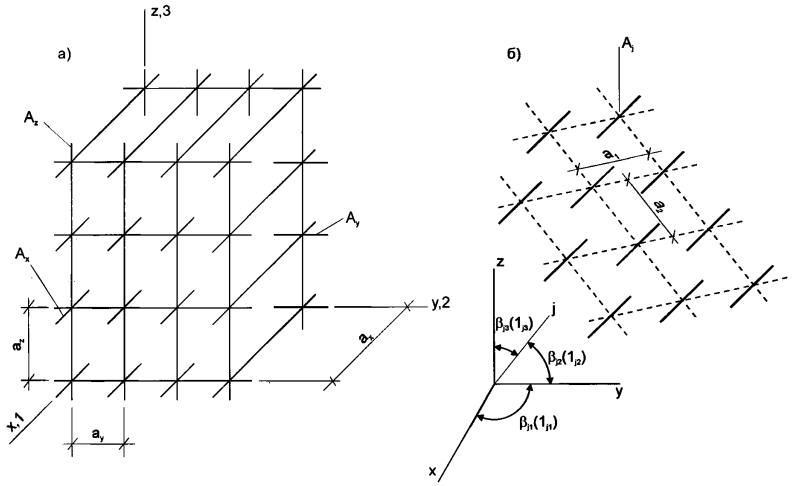


Рисунок 9.1 – Схемы армирования

где $A_{si(l)}$ – площадь одиночного стержня i-го направления; $S_{i(l)}$ – максимальное сечение конечного элемента, нормальное к направлению стержня i.

В ряде случаев (например, при расчете конструкций методом конечных элементов) коэффициент армирования удобно вычислять по формуле

$$\mu_{si} = \frac{V_{si}}{V_b}, \tag{9.4}$$

где V_{si} – суммарный объем арматурных стержней i -го направления в элементе;

V_b – объем конечного элемента.

Для произвольно расположенных стержней каждое направление армирования, кроме коэффициента μ_{sj} , характеризуется углами β_j наклона стержней j к осям $i = x\,(1)$, $y\,(2)$, $z\,(3)$ или их косинусами l_{ji} (согласно таблице 5.1).

9.2 Условия прочности железобетонных элементов без трещин

9.2.1 Условия прочности трехмерных железобетонных элементов без трещин устанавливаются исходя из следующих предпосылок:

– осевые деформации арматуры и деформации бетона по направлениям армирования принимаются равными (за исключением концевых участков арматуры, не снабженных специальными анкерами);

– напряжения в элементе σ_{ij} – суммарные величины, состоящие из напряжений в бетоне (σ_{bij}) и приведенных нормальных напряжений в арматуре ($\sigma_{si}\mu_{si}$, где σ_{si} – нормальные напряжения в арматуре);

– касательными напряжениями в арматурных стержнях можно пренебречь, хотя их учет допускается выполнять по п.9.3;

– арматурные стержни в процессе деформирования не изменяют своей первоначальной ориентации;

– прочность железобетонного элемента считается исчерпанной, если для составляющих напряжений в бетоне σ_{bij} не обеспечивается выполнение принятых в разделе 7 условий прочности бетона при ограничениях, накладываемых СП 63.13330.2018 на расчетные сопротивления арматуры сжатию.

Из второй и четвертой предпосылок следует:

для ортогонального армирования

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_{bx} + \mu_{sx}\sigma_{sx};\\ &\sigma_y = \sigma_{by} + \mu_{sy}\sigma_{sy};\\ &\sigma_z = \sigma_{bz} + \mu_{sz}\sigma_{sz};\\ &\tau_{xy} \approx \tau_{bxy};\ \tau_{yz} \approx \tau_{byz};\ \tau_{zx} \approx \tau_{bzx}, \end{aligned}\right\}, \qquad (9.5)$$

для произвольного армирования

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_{bx} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j1}^2;\\
\sigma_y &= \sigma_{by} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j2}^2;\\
\sigma_z &= \sigma_{bz} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j3};\\
\tau_{xy} &\approx \tau_{bxy} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j1}l_{j2};\\
\tau_{yz} &\approx \tau_{byz} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j2}l_{j3};\\
\tau_{zx} &\approx \tau_{bzx} + \sum_j \mu_{sj}\sigma_{sj}l_{j3}l_{j1},
\end{aligned}\right\}, \qquad (9.6)$$

где l_{ji} – направляющие косинусы углов произвольного армирования (согласно таблице 5.1); σ_{sj} – нормальные напряжения в арматуре.

В момент исчерпывания прочности бетона (т.е. выхода на поверхность прочности) полагают, что напряжения в арматуре $\sigma_{sj} = \sigma_{sRj}$; главные напряжения в бетоне $\sigma_{be} = \hat{\sigma}_{be}$ $(e = 1, 2, 3)$. Значения величин $\hat{\sigma}_{be}$ вычисляют по 7.1 – 7.3, а величины σ_{sRj} – по п.9.2.3.

9.2.2 Прочность ортогонально армированного железобетонного конечного элемента считается обеспеченной, если выполняются условия прочности:

$$\begin{vmatrix}
\pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRx}\mu_{sx} - \sigma_x\right) & \pm\left(\tau_{sRyx}\mu_{sy} - \tau_{yx}\right) & \pm\left(\tau_{sRzx}\mu_{sz} - \tau_{zx}\right)\\
\pm\left(\tau_{sRxy}\mu_{sx} - \tau_{xy}\right) & \pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRy}\mu_{sy} - \sigma_y\right) & \pm\left(\tau_{sRzy}\mu_{sz} - \tau_{zy}\right)\\
\pm\left(\tau_{sRxz}\mu_{sx} - \tau_{xz}\right) & \pm\left(\tau_{sRyz}\mu_{sy} - \tau_{yz}\right) & \pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRz}\mu_{sz} - \sigma_z\right)
\end{vmatrix} \geq 0 \qquad (9.7)$$

(в виде равенства или не равенства нулю определителя), где σ_{sRx}, σ_{sRy}, σ_{sRz} – напряжения в арматуре трех ортогональных направлений в момент исчерпания прочности бетона; τ_{sRij} $(i, j = x, y, z)$ – касательные напряжения в арматуре в момент исчерпания прочности элемента, которые допускается принимать равными нулю, или учитывать по п.9.3.2.

Наряду с условием (9.7) должны выполняться дополнительные условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRx} - \sigma_x\right) \geq 0;\\
&\pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRн} - \sigma_н\right) \geq 0;\\
&\pm\left(\hat{\sigma}_{be} + \sigma_{sRя} - \sigma_я\right) \geq 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.8)$$

Знаки (±) перед элементами определителя (9.7), стоящими на главной диагонали (главными элементами), не синхронизированы с аналогичными знаками, стоящими перед побочными элементами. Для касательных (побочных) элементов (9.7)

$$\left.\begin{array}{ll} \pm(\tau_{sRij}-\tau_{ij})<0 & \tau_{ij}>0; \\ \pm(\tau_{sRij}-\tau_{ij})>0 & \tau_{ij}<0. \end{array}\right\} \qquad (9.9)$$

Знаки перед элементами определителя и величины назначают исходя из схемы напряженного состояния. Различают три схемы:

1 – всестороннего сжатия бетона $(\hat{\sigma}_{b1}<0)$;

2 – смешанных напряжений (положительных и отрицательных, $\hat{\sigma}_{b1}>0$, $\hat{\sigma}_{b3}<0$);

3 – всестороннего растяжения $(\hat{\sigma}_{b3}>0)$.

Схема 1. Условие прочности (9.7) при $\tau_{sRij}\approx 0$ преобразуется к виду:

$$\begin{array}{c} (|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRx}\mu_{sx}+\sigma_x)(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRy}\mu_{sy}+\sigma_y)\cdot \\ \cdot(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRz}\mu_{sz}+\sigma_z)-(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRx}\mu_{sx}-\sigma_x)\tau_{yz}^2- \\ -(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRy}\mu_{sy}+\sigma_y)\tau_{xz}^2-(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRz}\mu_{sz}-\sigma_z)\tau_{xy}^2- \\ -2|\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}|\geq 0. \end{array} \qquad (9.10)$$

Дополнительные условия (9.8) также преобразуются

$$\left.\begin{array}{l} \left(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRx}+\sigma_x\right)\geq 0; \\ \left(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRy}+\sigma_y\right)\geq 0; \\ \left(|\hat{\sigma}_{b3}|-\sigma_{sRz}+\sigma_z\right)\geq 0. \end{array}\right\} \qquad (9.11)$$

Значения величин $\hat{\sigma}_{b3}$ вычисляют по разделу 7.

Схема 2. Проверку прочности проводят дважды. Один раз проверяют выполнимость условий (9.7) – (9.8), ограничивая величину $\hat{\sigma}_{b3}$, найденную по разделу 7.5 (пункты 7.5.1 – 7.5.2), неравенством $\hat{\sigma}_{b3}\leq -0{,}85R_b$ (или $|\hat{\sigma}_{b3}|\geq 0{,}85R_b$). Второй раз проводят проверку выполнимости условия (9.7), записанного виде:

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRx}\mu_{sx}-\sigma_x)(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRy}\mu_{sy}-\sigma_y)\cdot\\
&\cdot(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRz}\mu_{sz}-\sigma_z)-(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRx}\mu_{sx}-\sigma_x)\tau_{yz}^2-\\
&-(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRy}\mu_{sy}-\sigma_y)\tau_{xz}^2-(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRz}\mu_{sz}-\sigma_z)\tau_{xy}^2-\\
&-2\left|\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\right|\geq 0.
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

Кроме этого должны выполняться условия

$$
\begin{aligned}
&\left(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRx}\mu_{sx}-\sigma_x\right)\geq 0;\\
&\left(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRy}\mu_{sy}-\sigma_y\right)\geq 0;\\
&\left(\hat{\sigma}_{b1}+\sigma_{sRz}\mu_{sz}-\sigma_z\right)\geq 0.
\end{aligned}
\tag{9.13}
$$

Нарушение хотя бы одного из условий (9.12), (9.13) указывает на образование трещин в массивном элементе. Если образование трещин не допускается, то нарушение (9.12), (9.13) фактически указывает на исчерпание прочности. Если трещины допускаются, тогда после проверки (9.12), (9.13) переходят к проверке прочности элемента с трещинами по п. 9.3.2.

Для ответственных элементов, случайное образование трещин в которых может привести к прогрессирующему разрушению, проверку по п.9.3.2 выполняют и в случае, когда условия (9.12), (9.13) выполняются.

Схема 3. Проверяют выполнимость условий (9.12), (9.13). Нарушение хотя бы одного из условий (9.12), (9.13) указывает на образование трещин и на разрушение в случае, если образование трещин не допускается. Если трещины допускаются, то чтобы выяснить вопрос прочности элемента, переходят к проверке условий прочности, по п.9.8.

Для ответственных элементов, случайное образование трещин в которых может привести к прогрессирующему разрушению, проверку по п.9.8 выполняют и в случае, когда условия (9.12), (9.13) выполняются.

9.2.3 Напряжения σ_{sRx}, σ_{sRy}, σ_{sRz} для элементов без трещин вычисляют по деформациям арматуры ε_{sRx}, ε_{sRy}, ε_{sRz}, которые приравниваются к соответствующим деформациям бетона $\hat{\varepsilon}_{bx}$, $\hat{\varepsilon}_{by}$, $\hat{\varepsilon}_{bz}$ по соответствующим направлениям укладки арматуры в момент исчерпания прочности бетона.

Деформации в осях x, y, z $\{\hat{\varepsilon}_b\}_x = \{\hat{\varepsilon}_{bx}, \hat{\varepsilon}_{by}, \hat{\varepsilon}_{bz}, \hat{\gamma}_{bxy}, \hat{\gamma}_{byz}, \hat{\gamma}_{bzx}\}^T$ в момент исчерпания прочности бетона вычисляют через главные деформации $\{\hat{\varepsilon}_b\} = \{\hat{\varepsilon}_{b1}, \hat{\varepsilon}_{b2}, \hat{\varepsilon}_{b3}, 0, 0, 0\}^T$ используя преобразование п.8.6

$$\{\hat{\varepsilon}_b\}_x = [\alpha]^T \{\hat{\varepsilon}_b\}, \tag{9.14}$$

где $[\alpha]$ – матрица направляющих косинусов l_{ei} главных площадок (формируется в виде (8.36), направляющие косинусы l_{ei} определяют по 5.3); главные деформации $\{\hat{\varepsilon}\}_b$ вычисляют по формулам (7.24).

Переход от деформаций к напряжениям в арматуре осуществляется на основании диаграмм деформирования арматуры, приведенных в п. 6.2.2 – 6.2.4. Вычисленные напряжения в сжатой арматуре, если есть опасность выпучивания стержней, ограничиваются по абсолютной величине сопротивления R_{sc} согласно СП 63.13330.2018 (в нашем случае R_{sc} обозначают R_{sci}, где $i = x, y, z$). Для стержней в массивах, где нет опасности выпучивания ограничение по R_{sc} допускается не вводить.

9.2.4 Прочность железобетонного элемента, с неортогональной арматурой (косо устанавливаемой к направлениям декартовых координат x, y, z, согласно рисунку 9.1, *б*), также как и в случае ортогонального армирования, зависит от схемы напряженного состояния бетона. Для проверки прочности используют соответственно условия (9.10) – (9.13), в которых предварительно заменяют:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{sRx}\mu_{sx} \quad на \quad \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j1}^2; \\ \sigma_{sRy}\mu_{sy} \quad на \quad \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j2}^2; \\ \sigma_{sRz}\mu_{sz} \quad на \quad \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j3}^2. \end{array}\right\} \tag{9.15}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{xy}\sigma \text{ на } \tau_{xy} - \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j1}l_{j2}; \\ \tau_{yz} \text{ на } \tau_{yz} - \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j2}l_{j3}; \\ \tau_{zx} \text{ на } \tau_{zx} - \sum\limits_j \mu_{sj}\sigma_{sRj}l_{j3}l_{j1}. \end{array}\right\} \tag{9.16}$$

где l_{ji} – направляющие косинусы арматуры j-го направления к декартовым осям x (i=1), y (i=2), z (i=3);

σ_{sRj} – напряжения в арматуре j-го направления, соответствующие исчерпанию прочности бетона («выходу» напряжений в бетоне на поверхность прочности, т.е. достижению величин $\hat{\sigma}_{be}$). Эти напряжения вычисляют по продольным деформациям арматуры ε_{sRj}, которые приравнивают к деформациям бетона ε_{bj} по направлениям укладки стержней в момент достижения в бетоне предельных напряжений $\hat{\sigma}_{be}$. Практически значения ε_{sRj} вычисляют через значения $\{\hat{\varepsilon}_b\}_x$ (согласно п.9.4) по формуле

$$\varepsilon_{bj} = \hat{\varepsilon}_{bx} l_{j1}^2 + \hat{\varepsilon}_{by} l_{j2}^2 + \hat{\varepsilon}_{bz} l_{j3}^2 + \hat{\gamma}_{bxy} l_{ji} l_{j2} + \hat{\gamma}_{byz} l_{j2} l_{j3} + \hat{\gamma}_{bzx} l_{j3} l_{j1}. \qquad (9.17)$$

Переход от деформаций $\varepsilon_{bj} = \varepsilon_{sRj}$ к напряжениям σ_{sRj} в арматуре осуществляется на основе приведенных в п.6.2.2 – 6.2.4 диаграмм деформирования арматурных сталей.

Дополнительную проверку элементов, в которых возможно образование трещин, следует проводить по п.9.5. Дополнительную проверку по п.9.5 для ответственных элементов (согласно п.9.4) необходимо выполнять и в случае, когда условия прочности (9.15), (9.16) выполняются.

9.3 Условия прочности железобетонных элементов с трещинами по арматуре и бетону

9.3.1 Элемент считается работающим с трещинами, если нарушаются условия п. 9.2.3 – 9.2.4 при схемах напряжений 2 и 3.

Прочность железобетонных элементов с трещинами зависит от схемы трещин (согласно 7.4) и считается обеспеченной, если одновременно удовлетворяются условия прочности сжатого бетона между трещинами (в виде блоков или пластин в случае схемы 1, или полос в случае схемы 2, согласно 9.3.4). При схеме трещинообразования 3 достаточно лишь проверки прочности растянутой арматуры.

Условия прочности растянутой арматуры в трещинах устанавливаются на основе предпосылок, изложенных в разделе 4 «Общие положения». Применительно к трехмерным элементам эти предпосылки конкретизируются следующим образом:

– прочность элемента исчерпывается вследствие чрезмерных пластических деформаций или разрыва арматуры по некоторым трещинам (трещины разрушения), которые расположены в общем случае наклонно к стержням арматуры;

– в трещинах разрушения (текучести, если используется арматура с площадкой текучести) напряжения во всех пересекающих ее стержнях достигают расчетных сопротивлений на растяжение R_{si}, вводимых с коэффициентами неравномерности напряжений арматуры $\widetilde{\gamma}_{si}$ по направлениям i (для арматуры с площадкой текучести $\widetilde{\gamma}_{si} \approx 1$);

– в стадии исчерпания прочности элемента по арматуре учитываются, как правило, нормальные напряжения в арматурных стержнях (направленные вдоль их осей). Допускается учитывать касательные напряжения в арматуре в местах пересечения ее трещинами (нагельный эффект), предполагая при этом, что стержни не изменяют своей ориентации (направляющих косинусов).

В тех случаях, когда необходимо избегать преждевременного разрушения от сжатия блоков (пластин) и полос бетона между трещинами, напряжения в арматуре в трещинах должны быть ограничены значениями $\sigma_{sRi} \le R_{si}$. В зонах, где действуют большие касательные напряжения в бетоне и трещины косо располагаются к стержням арматуры, напряжения в арматуре ограничиваются условиями $\sigma_{sRi} \le R_{swi}$, где R_{swi} указаны в 6.2.9 СП 63.13330.2018.

9.3.2. Прочность ортогонально армированного железобетонного элемента по растянутой арматуре считается обеспеченной, если выполняется условие (в виде равенства и неравенства нулю определителя)

$$\begin{vmatrix} (\mu_{sx}\tilde{\gamma}_{sx}R_{sx}-\sigma_x) & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & (\mu_{sy}\tilde{\gamma}_{sy}R_{sy}-\sigma_y) & -\tau_{zy} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (\mu_{sz}\tilde{\gamma}_{sz}R_{sz}-\sigma_z) \end{vmatrix} \geq 0, \qquad (9.18)$$

(при этом выражения в круглых скобках не должны быть отрицательны). Условие (9.18) можно представить (при $\tau_{zy}=\tau_{yz}$; $\tau_{yx}=\tau_{xy}$; $\tau_{xz}=\tau_{zx}$) в виде

$$\begin{aligned}&(\mu_{sx}\tilde{\gamma}_{sx}R_{sx}-\sigma_x)(\mu_{sy}\tilde{\gamma}_{sy}R_{sy}-\sigma_y)(\mu_{sz}\tilde{\gamma}_{sz}R_{sz}-\sigma_z)-2|\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}|- \\ &-(\mu_{sx}\tilde{\gamma}_{sx}R_{sx}-\sigma_x)\tau_{yz}^2-(\mu_{sy}\tilde{\gamma}_{sy}R_{sy}-\sigma_y)\tau_{zx}^2-(\mu_{sz}\tilde{\gamma}_{sz}R_{sz}-\sigma_z)\tau_{xy}^2\geq 0,\end{aligned} \qquad (9.19)$$

где $\tilde{\gamma}_{si}$ – коэффициент условия работы растянутой арматуры в трещинах. Для ответственных сооружений $\tilde{\gamma}_{si}=1$, допускается величину этого коэффициента принимать равной

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\gamma}_{si}=\eta, \text{ если } |\alpha_{ei}|\leq 40^{\circ}\left(\alpha_{ei}=\min\{\arccos\beta_{ei}\}\right), \\ &\tilde{\gamma}_{si}=1+0{,}5(\eta-1)-\text{ в других случаях}\end{aligned}\right\}, \qquad (9.20)$$

где α_{ei} – угол наклона трещины (нормали к плоскости трещины) к рассматриваемому направлению стержней арматуры;

$$(i=1(x),\,2(y),\,3(z));\ \cos\alpha_{ei}=l_{ei};$$

l_{ei} – направляющие косинусы главных растягивающих напряжений σ_{be} к осям *x, y, z,* которые вычисляются по 5.3, $\eta=1{,}1$.

Допускается учитывать влияние касательных напряжений в арматуре (нагельного эффекта) на прочность трехмерного элемента по арматуре. При учете этого эффекта в условиях прочности (9.19) заменяются:

$R_{si}\cdot\tilde{\gamma}_{si}$ на $R_{si}\lambda_i^{-1}\tilde{\gamma}_{si}$ $(i=x, y, z)$,

где значения величины λ_i определяются по формулам 9.3.4.

9.3.3 Прочность растянутой арматуры произвольно армированных трехмерных железобетонных элементов с трещинами считается обеспеченной, если выполняется условие

$$\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j1}^2-\sigma_x\right)\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j2}^2-\sigma_y\right)\cdot\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j3}^2-\sigma_z\right)-$$
$$-2\left|\left(\tau_{xy}-\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j1}l_{j2}\right)\cdot\left(\tau_{yz}-\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j2}l_{j3}\right)\left(\tau_{zx}-\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j3}l_{j1}\right)\right|-$$
$$-\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j1}^2-\sigma_x\right)\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j3}-i_{j2}\tau_{yz}\right)^2- \qquad (9.21)$$
$$-\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j2}^2-\sigma_y\right)\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j3}l_{j1}-\tau_{zx}\right)^2-$$
$$-\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j3}^2-\sigma_z\right)\left(\sum_j \mu_{sj}\tilde{\gamma}_{sj}R_{sj}l_{j1}l_{j2}-\tau_{xy}\right)^2\geq 0.$$

Условие (9.21) получают вычисляя определитель типа (9.18). Коэффициенты $\tilde{\gamma}_{sj}$ определяют по 9.3.2, заменяя $\cos\beta_{ei}$ на $\cos\varphi_{je}$, где

$$cos\varphi_{je}=\min\left\{\arccos\left(l_{e1}l_{j1}+l_{e2}l_{j2}+l_{e3}l_{j3}\right)\right\}, \qquad (9.22)$$

e – индексы главных растягивающих напряжений $(e=1,2,3)$.

9.3.4 Согласно 9.3.1 наряду с проверкой прочности по растянутой арматуре в трещинах должна проводится проверка прочности сжатых блоков (пластин) или полос бетона между трещинами по предлагаемым в настоящем пункте условиям. Выделяют случай ортогонального расположения арматуры в трех направлениях и случай произвольного (косоугольного) расположения стержней.

Последовательность вычислений в случае ортотропного армирования предлагается в виде

– определяются коэффициенты λ_i по формуле

$$\frac{1}{\lambda_i}=\left(1+\frac{E_{sk}\Psi_{si}l_{ek}^2\mu_{sk}}{E_{si}\Psi_{sk}l_{ei}^2\mu_{si}\delta_s}+\frac{E_{sn}\Psi_{si}l_{en}^2\mu_{sn}}{E_{si}\Psi_{sn}l_{ei}^2\mu_{si}\delta_s}\right), \qquad (9.23)$$

– вычисляются напряжения в арматуре

$$\sigma_{si}=\sigma_i\frac{\lambda_i}{\mu_{si}}+\tau_{ki}\frac{l_{ek}\lambda_i}{l_{ei}\mu_{si}}+\tau_{ni}\frac{l_{en}\lambda_i}{l_{ei}\mu_{si}}, \qquad (9.24)$$

где $i=x,y,z$ $(1,2,3)$, причем $k=y(2)$, $n=z(3)$;

при $i=x$ величина $k=y(2)$, $n=z(3)$;

при $i=y$; $k=x(1)$; $n=z(3)$;

при $i = z$; $k = x(1)$; $n = y(2)$

(1, 2, 3 вместо x, y, z принимаются при записи направляющих косинусов l_{ek}, l_{en}, l_{ei});

- определяются коэффициенты В.И. Мурашева Ψ_{si} по 6.3.1,

- определяется стадия работы арматурных стержней каждого i-го направления $(i = x, y, z)$;

если $\sigma_{si} \le \sigma_{s,eli}$ – упругая,

если $\sigma_{si} > \sigma_{s,eli}$ – упругопластическая (величины $\sigma_{s,eli}$ назначаются по 6.2.2 согласно формуле (6.18));

- вычисляются средние относительные деформации арматуры всех трех направлений в зависимости от установленной стадии деформирования:

для упругой $\varepsilon_{smi} = \sigma_{si} / (E_{si}\psi_{si})$,

где E_{si} – модуль упругости арматуры по пункту 6.2.12 СП 63.13330.2018;

для упругопластической стадии деформирования арматуры средние деформации ε_{smi} определяются по диаграммам 6.3.1 в зависимости от напряжений σ_{si} $(i = x, y, z)$;

- вычисляется деформация $\varepsilon'_n = \varepsilon_{smx} + \varepsilon_{smy} + \varepsilon_{smz}$;

- определяется коэффициент условия работы бетона в пластинах или полосах бетона между трещинами по формуле

$$\widetilde{\gamma}_{bp} = \frac{1}{220\varepsilon'_n\omega_n + 0{,}9}, \qquad (9.25)$$

где ω_n – коэффициент влияния размеров конструкции на степень повреждаемости полос бетона между трещинами

$0{,}7 \le \omega_n = 1{,}3 - 0{,}3h_{\min} / h_э$,

$h_{\min}$ – минимальный размер поперечного сечения конструкции в плоскости трещины, $h_э$ – эталонная толщина ($h_э = 0{,}1$ м).

Коэффициент $\widetilde{\gamma}_{bp}$ вводится к прочностной характеристике бетона в виде

$$\widetilde{R}_b = R'_b\widetilde{\gamma}_{bp}, \qquad (9.26)$$

где R'_b – прочность бетона, определяемая в зависимости от схемы трещин и схемы напряжений: если реализуется схема трещин 1 и $\sigma_{b2} < 0$; $\sigma_{b3} < 0$, то величина $R'_b = \hat{\sigma}_{b3}$, где предельные напряжения $\hat{\sigma}_{b3}$ вычисляют по 7.2.2; в других случаях $R'_b = R_b$.

Если проверка прочности выполняется в одном блоке с деформационным расчетом конструкции согласно разделу 10, то значения величин ε_n, σ_{si}, ψ_{si} допускается назначать по этому расчету.

Прочность бетона между трещинами на сжатие в ортотропно армированных элементах считается обеспеченной, если выполняются условия:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{cx}\sigma_{cy}\sigma_{cz} - \sigma_{cx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{cy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{cz}\tau_{xy}^2 - 2\left|\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}\right| \geq 0; \\ \sigma_{cx} > 0; \quad \sigma_{cy} > 0; \quad \sigma_{cz} > 0 \end{array}\right\} \qquad (9.27)$$

где обозначены

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{cxy} = \tau_{cyx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{cxz} = \tau_{czx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{cyz} = \tau_{czy}; \\ \sigma_{cx} = (\widetilde{R}_b - \sigma_{sx}\mu_{sx}\psi_{sx} + \sigma_x); \\ \sigma_{cy} = (\widetilde{R}_b - \sigma_{sy}\mu_{sy}\psi_{sy} + \sigma_y); \\ \sigma_{cz} = (\widetilde{R}_b - \sigma_{sz}\mu_{sz}\psi_{sz} + \sigma_z). \end{array}\right\} \qquad (9.28)$$

В случае косоугольного армирования прочность бетона между трещинами считается обеспеченной, если выполняются условия (9.27), где однако следует принимать:

$$\sigma_{ci} = \widetilde{R}_b - \sum_j \sigma_{sj}\mu_{sj}l_{ji}^2 + \sigma_i$$

$$(i = x, y, z \quad \text{или} \quad 1, 2, 3),$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{cxy} = \tau_{cyx} = \tau_{xy} - \sum_j \sigma_{sj}\mu_{sj}\psi_{sj}l_{j1}l_{j2}; \\ \tau_{cyz} = \tau_{czy} = \tau_{yz} - \sum_j \sigma_{sj}\mu_{sj}\psi_{sj}l_{j2}l_{j3}; \\ \tau_{cxz} = \tau_{czx} = \tau_{zx} - \sum_j \sigma_{sj}\mu_{sj}\psi_{sj}l_{j1}l_{j3}. \end{array}\right\} \qquad (9.29)$$

Напряжения σ_{sj} в арматуре вычисляют в процессе деформационного расчета по разделу 10. Допускается принимать $\psi_{sj} = 0{,}9;\quad \sigma_{sj} = R_{sj}\widetilde{\gamma}_{sj}$, где значения $\widetilde{\gamma}_{sj}$ назначают по 9.3.2.

9.4 Подбор арматуры

9.4.1 Подбор арматуры, устанавливаемой вдоль осей *x, y, z* в элементах без трещин, производят по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{sx} &= \frac{(\sigma_x - \hat{\sigma}_{be})l_{e1} + \tau_{yx}l_{e2} + \tau_{zx}l_{e3}}{\sigma_{sRx}l_{e1}};\\
\mu_{sy} &= \frac{(\sigma_y - \hat{\sigma}_{be})l_{e2} + \tau_{xy}l_{e1} + \tau_{zy}l_{e3}}{\sigma_{sRy}l_{e2}};\\
\mu_{sz} &= \frac{(\sigma_z - \hat{\sigma}_{be})l_{e3} + \tau_{xz}l_{e1} + \tau_{yz}l_{e2}}{\sigma_{sRz}l_{e3}},
\end{aligned}\right\} \qquad (9.30)$$

где l_{ei} – направляющие косинусы напряжений $\hat{\sigma}_{be}$ к осям координат *x, y, z* *(i*= 1, 2, 3*)*, которые вычисляются по 5.3 и таблице 5.1.

Если трещины в элементе не допускаются, то по формулам (9.30) арматура подбирается дважды (при *e*=1 и *e*=3) и из двух одинаковых значений коэффициентов армирования выбирается большее.

В ответственных элементах, в которых реализуется схема напряжений 2 и 3 (согласно п. 9.22) и в которых при этом случайное образование трещин может привести к разрушению конструкции или ее основных частей, дополнительно к указанным выше формулам (9.30), подбирается арматура по модифицированным формулам (9.30), полагая в них $\hat{\sigma}_{be} = 0$ и заменяя σ_{sRi} на R_{si} – расчетные сопротивления арматуры согласно СП 63.13330.2018. Из получаемых таким образом трех значений каждого коэффициента выбирается большее.

В схеме 1 напряжений (согласно п. 9.2.2) арматура подбирается при $\hat{\sigma}_{be} = \hat{\sigma}_{b3} \quad (e = 3)$.

Если коэффициенты армирования, определяемые по формулам (9.30), получаются отрицательными, то возможны две ситуации: 1 – арматура по расчету не требуется, 2 – при этой схеме армирования добавление арматуры не может

обеспечивать прочность элемента по бетону и необходимо изменять схему армирования, добавив косо устанавливаемые вдоль e стержни или изменять класс бетона (или то и другое). Вторая ситуация встречается: при e=1, если числитель хотя бы одного из выражений (9.30) больше нуля, а значение $\sigma_{sRi}(i=x,y,z)$ в этом выражении меньше нуля; при e=3, если числитель хотя бы одного выражения (9.30) меньше нуля, а значение σ_{sRi} в этом выражении положительно.

После подбора арматуры должны быть проверены условия (9.10), (9.11). Если хотя бы одно из них нарушается, то следует коэффициенты армирования μ_{si} увеличить до выполнения этого условия.

Если трещины не допускаются, то аналогичная процедура проделывается и с условиями (9.12), (9.13).

9.4.2 Подбор растянутой арматуры в элементах с трещинами, устанавливаемой вдоль осей x, y, z рекомендуется производить по формулам:

$$0 \le \mu_{sx} = \frac{\sigma_x l_{e1} + \tau_{yx} l_{e2} + \tau_{zx} l_{e3}}{R_{sx} \widetilde{\gamma}_{sx} l_{e1}};$$
$$0 \le \mu_{sy} = \frac{\tau_{xy} l_{e1} + \sigma_y l_{e2} + \tau_{zy} l_{e3}}{R_{sy} \widetilde{\gamma}_{sy} l_{e2}}; \qquad (9.31)$$
$$0 \le \mu_{sz} = \frac{\tau_{xz} l_{e1} + \tau_{yz} l_{e2} + \sigma_z l_{e3}}{R_{sz} \widetilde{\gamma}_{sz} l_{e3}},$$

где l_{ei} – направляющие косинусы главных растягивающих напряжений, вычисляемые по 5.3. Формулы (9.31) используют в зависимости от схемы напряжений. В случае, если $\sigma_{b1} > 0$, $\sigma_{b2} \le 0$, $\sigma_{b3} \le 0$, коэффициенты μ_{si} вычисляют при индексе e=1. В случае, если $\sigma_{b1} > 0$, $\sigma_{b2} \le 0$, $\sigma_{b3} = 0$, коэффициенты μ_{si} по формулам (9.31) вычисляют дважды – при e=1 и e=2 и из двух одноименных значений выбирают большее. В случае, если $\sigma_{b1} > 0$, коэффициенты μ_{si} по формуле (9.31) вычисляют трижды при e=1, 2, 3 и из трех значений каждого коэффициента выбирают большее. Значения $\widetilde{\gamma}_{si}(i=x,y,z)$ принимают по 9.3.2. Значения величины l_{ei} вычисляют по 5.3. При этом допускается углы,

соответствующие значениям l_{ei}, изменять до 15° (с последующим изменением l_{ei}), если это приводит к более низкой сумме $\mu_{sx} + \mu_{sy} + \mu_{sz}$.

После подбора арматуры должно быть проверено условие (9.18). Если это условие не выполняется, то коэффициенты армирования должны быть увеличены до значений, необходимых для выполнения этого условия.

10 Связи между напряжениями и деформациями (физические соотношения) для железобетонных элементов при объемном напряженном состоянии. Учет влияния образования и развития трещин по различным схемам

10.1 Физические соотношения для железобетонных элементов без трещин при ортотропном армировании

Основные предпосылки, заложенные при выводе физических соотношений приведены в п. 9.2. Согласно этим предпосылкам общие напряжения элемента $\{\sigma\}_x = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ суммируются из приведенных напряжений бетона и приведенных напряжений арматуры

$$\{\sigma\}_x = \{\sigma_b\}_x + \{\sigma_s\}_x.$$

Общие связи между напряжениями и деформациями железобетона имеют вид

$$\{\sigma\}_x = \left([C_b]_x^{-1} + [d_s]_x\right)\{\varepsilon\}_x = [d]_x\{\varepsilon\}_x, \qquad (10.1)$$

где $[d]_x$ – матрица жесткости железобетона.

Матрица жесткости железобетона представляется в виде:

$$[d]_x = [C_b]_x^{-1} + [d_s]_x, \qquad (10.2)$$

где $[C_b]_x$ – матрица податливости бетона (8.3) преобразованная по указаниям п. 8.6 к осям x, y, z; $[d_s]_x$ – матрица жесткости арматуры, которая при ортотропном армировании имеет вид:

$$[d_s]_x = \begin{bmatrix} E_{sx}\mu_{sx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{sy}\mu_{sy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{sz}\mu_{sz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4E_{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4E_{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4E_{\mu}, \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

здесь $E_{\mu} = \left(E_{sx}\mu_{sx} + E_{sy}\mu_{sy} + E_{sz}\mu_{sz}\right)$;

$\mu_{si}\left(i = x,y,z\right)$ – коэффициенты армирования, определяемые по 9.1;

E_{si} – начальные модули деформации арматуры, определяемые по СП 63.13330.2018.

Если арматура деформируется за пределом упругости, то вместо E_{si} вводят величины E_{si}, ν_{si} , где ν_{si} – коэффициенты изменения начального модуля, определяемые по 6.2.3 – 6.2.5.

10.2 Железобетонные трехмерные элементы с трещинами при ортотропном армировании

10.2.1 В соответствии с 7.4 в элементе предполагается три схемы образования трещин (согласно рисунку 7.3):

1 – элемент с одной трещиной;

2 – элемент с двумя взаимно перпендикулярными трещинами;

3 – элемент с тремя взаимно перпендикулярными трещинами.

Элементы без трещин относятся условно к схеме 0 (эта схема вводится здесь для того, чтобы представить универсальную запись физических соотношений, пригодных как для стадии с трещинами, так и стадии без трещин).

Условия образования трещин определяются напряженным состоянием в бетоне и охарактеризованы в 7.4.

При появлении трещин (схема 1) считается, что элемент разделен на отдельные пластины, соединенные стержнями арматуры. В элементе нарушается совместность осевых деформаций арматуры и бетона, вследствие взаимных смещений, что приводит к раскрытию трещин. Косое (в общем случае)

пересечение трещин стержнями арматуры приводит кроме разъединения пластин, вследствие раскрытия трещин, к взаимному сдвигу пластин вдоль трещин (сдвигу берегов трещин). Пластины бетона между трещинами способны сопротивляться двухосному действию усилий вдоль плоскости трещин. В трещинах все усилия (за исключением некоторых сил зацепления берегов трещин) воспринимаются арматурой, которой возникают осевые и касательные (за счет нагельного эффекта) напряжения. В пластинах между трещинами напряжения в арматуре уменьшаются за счет ее сцепления с бетоном, что сказывается на средних относительных деформациях всего элемента.

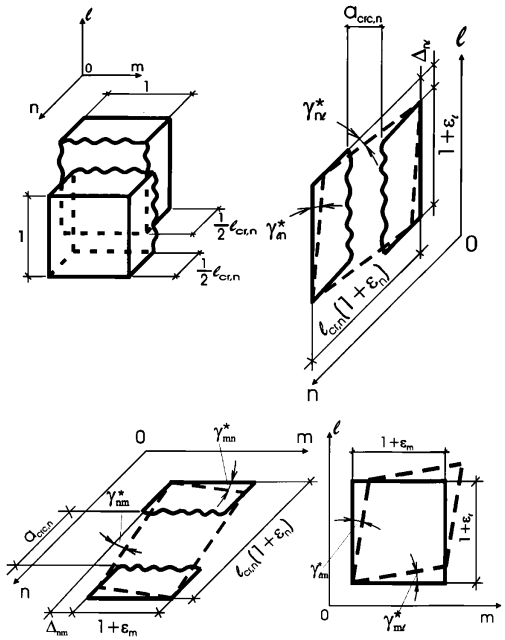


Рисунок 10.1 – К определению относительных деформаций элементов с трещинами

При реализации схемы 2 бетон разделяется трещинами на отдельные полосы бетона, которые сопротивляются осевому сжатию (растяжению) или сжатию со сдвигом. Особенности работы арматуры, пересекающей трещины, сохраняются как в схеме 1. При пересекающейся системе трещин (схема 3) бетон выключается

из самостоятельной работы, но продолжает оказывать влияние на уменьшение средних деформаций арматуры.

10.2.2 Относительные деформации

Под относительными деформациями элемента с трещинами подразумеваются деформации, которые складываются из двух частей:

- относительные деформации, связанные с трещинообразованием;

- относительные деформации бетона между трещинами.

В системе координат n,m,l совпадающих с возможным образованием ортогональных трещин (рисунок 7.3) относительные деформации элемента составляют:

- при схеме 1 (рисунок 10.1)

$$\varepsilon_n = \frac{a_{crc,n}}{l_{cr,n}} = \varepsilon_{sn};\ \varepsilon_m = \varepsilon_{bn};\ \varepsilon_l = \varepsilon_{bl};$$

$$\gamma^*_{nm} = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snm};\ \gamma^*_{ml} = \gamma^*_{bml};\ \gamma^*_{ln} = \gamma^*_{bln}; \qquad (10.5)$$

$$\gamma^*_{mn} = \gamma^*_{bmn};\ \gamma^*_{lm} = \gamma^*_{blm};\ \gamma^*_{nl} = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snl};$$

- при схеме 2

$$\varepsilon_n = \frac{a_{crc,n}}{l_{cr,n}} = \varepsilon_{sn};\ \varepsilon_m = \frac{a_{crc,m}}{l_{cr,m}} = \varepsilon_{sm};\ \varepsilon_l = \varepsilon_{bl};$$

$$\gamma^*_{nm} = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snm};\ \gamma^*_{ml} = \frac{\Delta_{ml}}{l_{cr,m}} = \gamma^*_{sml};\ \gamma^*_{ln} = \gamma^*_{bln}; \qquad (10.6)$$

$$\gamma^*_{mn} = \frac{\Delta_{mn}}{l_{cr,m}} = \gamma^*_{smn};\ \gamma^*_{lm} = \gamma^*_{blm};\ \gamma^*_{nl} = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snl};$$

- при схеме 3

$$\varepsilon_n = \frac{a_{crc,n}}{l_{cr,n}} = \varepsilon_{sn};\ \varepsilon_m = \frac{a_{crc,m}}{l_{cr,m}} = \varepsilon_{sm};\ \varepsilon_l = \frac{a_{crc,l}}{l_{cr,l}} = \varepsilon_{sl};$$

$$\gamma^*_{nm} = \frac{\Delta_{nm}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snm};\ \gamma^*_{ml} = \frac{\Delta_{ml}}{l_{cr,m}} = \gamma^*_{sml};\ \gamma^*_{ln} = \frac{\Delta_{ln}}{l_{cr,l}} = \gamma^*_{sln}; \qquad (10.7)$$

$$\gamma^*_{mn} = \frac{\Delta_{mn}}{l_{cr,m}} = \gamma^*_{smn};\ \gamma^*_{lm} = \frac{\Delta_{lm}}{l_{cr,l}} = \gamma^*_{slm};\ \gamma^*_{nl} = \frac{\Delta_{nl}}{l_{cr,n}} = \gamma^*_{snl},$$

где $a_{crc,l}$ – ширина раскрытия трещин, ортогональных к осям n,m,l $(e=n,m,l)$;

Δ_{ek} – сдвиги берегов трещин $(e,k=n,m,l;\ e\neq k)$;

$l_{cr,l}$ – расстояния между трещинами в направлениях n,m,l.

Деформации элемента с трещинами представляются в виде девятикомпонентного столбца

$$\{\varepsilon^*\}_n=\{\varepsilon_n,\varepsilon_m,\varepsilon_l,\gamma^*_{nm},\gamma^*_{ml},\gamma^*_{ln},\gamma^*_{nm},\gamma^*_{lm},\gamma^*_{nl}\}. \tag{10.8}$$

В окончательные расчеты вводятся суммарные углы сдвига

$$\gamma_{nm}=\gamma^*_{nm}+\gamma^*_{nm};\gamma_{ml}=\gamma^*_{ml}+\gamma^*_{lm};\gamma_{ln}=\gamma^*_{ln}+\gamma^*_{nl} \tag{10.9}$$

в результате вектор-столбец (10.8) преобразуется к виду

$$\{\varepsilon\}_n=\{\varepsilon_n,\varepsilon_m,\varepsilon_l,\gamma_{nm},\gamma_{ml},\gamma_{ln}\}. \tag{10.10}$$

Деформации элемента без трещин получают из соотношений (10.5), полагая $a_{crcn}=0$; $\Delta_{nm}=\Delta_{nl}=0$, кроме этого

$$\gamma^*_{ek}=\gamma^*_{ke}=\frac{1}{2}\gamma_{ek};\ (e,k=n,m,l;\ e\neq k).$$

10.2.3 Напряжения

Напряжения в элементе складываются в осях n,m,l из напряжений в бетоне $\left\{\sigma^*_b\right\}_n$ и приведенных (с учетом коэффициентов армирования μ_{si} и углов наклона арматуры к осям n,m,l) напряжений в арматуре $\{\sigma^*_s\}_n$. Причем на площадках трещин основными являются приведенные напряжения в арматуре, а напряжения в бетоне практически (за исключением некоторых напряжений в связях защемления) равны нулю. На площадках, нормальных к трещинам, напряжения в бетоне и приведенные напряжения в арматуре выступают как равнозначные. Чтобы учесть указанный фактор выключения бетона по тем или иным направлениям (в зависимости от расположения трещин) вводятся девятикомпонентные вектор-столбцы напряжений: бетона между трещинами $\{\sigma^*_b\}_n$; связей зацепления $\{\sigma^*_{cr}\}_n$ и арматуры $\{\sigma^n_s\}_n$;

$$\left.\begin{aligned}\left\{\sigma_b^*\right\}_n &= \left\{\sigma_{bn},\sigma_{bm},\sigma_{bl},\tau_{bnm}^*,\tau_{bml}^*,\tau_{bln}^*,\tau_{bmn}^*,\tau_{blm}^*,\tau_{bnl}^*\right\}^T;\\ \left\{\sigma_{cr}^*\right\}_n &= \left\{\begin{matrix}(\delta_n\sigma_{bn}),(\delta_m\sigma_{bm}),(\delta_l\sigma_{bl}),(\delta_n\tau_{bnm}^*),\\ (\delta_m\tau_{bml}^*),(\delta_l\tau_{bln}^*),(\delta_m\tau_{bmn}^*),(\delta_l\tau_{bln}^*),(\delta_n\tau_{bnl}^*)\end{matrix}\right\}^T.\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

$$\left\{\sigma_s^*\right\}_n = \left\{\sigma_{sn},\sigma_{sm},\sigma_{sl},\tau_{snm}^*,\tau_{sml}^*,\tau_{sln}^*,\tau_{smn}^*,\tau_{slm}^*,\tau_{snl}^*\right\}^T, \qquad (10.12)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\text{если схема 1 трещин, то} && \delta_n = 1;\ \delta_m = 0;\ \delta_l = 0;\\ &\text{если схема 2 трещин, то} && \delta_n = 1;\ \delta_m = 1;\ \delta_l = 0;\\ &\text{если схема 3 трещин, то} && \delta_n = \delta_m = \delta_l = 1;\\ &\text{если схема 0 трещин, то} && \delta_n = \delta_m = \delta_l = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Формальные множители $\delta_i (i = 1,2,3)$ фиксируют условие, что на площадках-трещинах напряжения зацепления совпадают с напряжениями в бетоне, а на остальных площадках напряжения зацепления равны нулю.

Общие напряжения обозначаются:

$$\left\{\sigma^*\right\}_n = \left\{\sigma_n,\sigma_m,\sigma_l,\tau_{nm}^*,\tau_{ml}^*,\tau_{ln}^*,\tau_{mn}^*,\tau_{lm}^*,\tau_{nl}^*\right\}^T \qquad (10.14)$$

причем

$$\left\{\sigma^*\right\}_n = \left\{\sigma_b^*\right\}_n + \left\{\sigma_s^*\right\}_n. \qquad (10.15)$$

Учитывается парность общих касательных напряжений,

$$\tau_{nm}^* = \tau_{mn}^* = \tau_{nm};\ \tau_{lm}^* = \tau_{ml}^* = \tau_{ml};\ \tau_{ln}^* = \tau_{nl}^* = \tau_{ln}, \qquad (10.16)$$

хотя парность составляющих касательных компонентов отдельно арматуры и отдельно бетона может нарушаться. В силу парности девятикомпонентный вектор-столбец (10.14) преобразовывается к шестикомпонентному

$$\left\{\sigma\right\}_n = \left\{\sigma_n,\sigma_m,\sigma_l,\tau_{nm},\tau_{ml},\tau_{ln}\right\}^T \qquad (10.17)$$

10.2.4 Компоненты общих напряжений

Компоненты вектор-столбца (10.12) напряжений арматуры вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{se} &= \sum_i \left(\sigma^e_{si}\mu_{si}e_i^2 + \delta_e \sum_j \tau_{sij}\mu_{si}e_i e_j \right); \\ \tau^*_{sek} &= \sum_i \left(\sigma^e_{si}\mu_{si}e_i k_i + \delta_e \sum_j \tau_{sij}\mu_{si}e_i k_j \right);\end{aligned}\right\} \qquad (10.18)$$

$$(e,k = n,m,l\,;\; e \neq k\,;\; i,j = x,y,z\,;\; j \neq i),$$

где $l_i, l_j, k_i, k_j (n_i, m_i, l_i)$ – направляющие косинусы осей n,m,l к осям x,y,z, определяемые согласно таблице 5.1;

$\delta_e (e = n,m,l)$ – коэффициенты, вычисляемые по формулам (10.13), кроме этого:

$$\left.\begin{aligned}&\text{если схема 1 трещин, то} && \sigma^n_{si} = \sigma_{si};\ \sigma^m_{si} = \sigma^l_{si} = \sigma^c_{si};\\ &\text{если схема 2 трещин, то} && \sigma^n_{si} = \sigma^m_{si} = \sigma_{si};\ \sigma^l_{si} = \sigma^c_{si};\\ &\text{если схема 3 трещин, то} && \sigma^n_{si} = \sigma^m_{si} = \sigma^l_{si} = \sigma_{si};\\ &\text{если схема 0 трещин, то} && \sigma^n_{si} = \sigma^m_{si} = \sigma^l_{si} = \sigma^c_{si},\end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

σ_{si} – осевые напряжения арматурных стержней $i = x,y,z$ – направлений в трещинах; σ^c_{si} – средние осевые напряжения арматурных стержней на площадках, нормальных к трещинам; τ_{sij} – касательные напряжения арматуры в местах пересечения их трещинами (от нагельного эффекта в трещинах); μ_{si} – коэффициенты ортотропного армирования, определяемые по 9.1.

Например, полагая $e = n$ и $k = m$ при схеме 1 трещин из (10.18) получают:

$$\begin{aligned}\sigma_{sn} &= \sigma_{sx}\mu_{sx}n_x^2 + \tau_{sxy}\mu_{sx}n_x n_y + \tau_{sxz}\mu_{sx}n_x n_z + \\ &+ \sigma_{sy}\mu_{sy}n_y^2 + \tau_{syx}\mu_{sy}n_y n_x + \tau_{syz}\mu_{sy}n_y n_z + \\ &+ \sigma_{sz}\mu_{sz}n_z^2 + \tau_{szx}\mu_{sz}n_z n_x + \tau_{szy}\mu_{sz}n_z n_y;\end{aligned} \qquad (10.20)$$

$$\begin{aligned}\tau^*_{snz} &= \sigma_{sx}\mu_{sx}n_x m_x + \tau_{sxy}\mu_{sx}n_x m_y + \tau_{sxz}\mu_{sx}n_x m_z + \sigma_{sy}\mu_{sy}n_y m_y + \\ &+ \tau_{syx}\mu_{sy}n_y m_x + \tau_{syz}\mu_{sy}n_y m_z + \sigma_{sz}\mu_{sz}n_z m_z + \tau_{szx}\mu_{sz}n_z m_x + \tau_{szy}\mu_{sz}n_z m_y.\end{aligned} \qquad (10.21)$$

Полагая $e = m$, $k = m$ при схеме 1 трещин из (10.18) получают:

$$\sigma_{sm} = \sigma^c_{sx}\mu_{sx}m_x^2 + \sigma^c_{sy}\mu_{sy}m_y^2 + \sigma^c_{sz}\mu_{sz}m_z^2;$$

$$\tau^*_{smn} = \sigma^c_{sx}\mu_{sx}m_xn_x + \sigma^c_{sy}\mu_{sy}m_yn_y + \sigma^c_{sz}\mu_{sz}m_zn_z$$

Реальные напряжения арматуры i – направлений (σ_{si} – нормальные в трещинах, σ^c_{si} – средние между трещинами, τ_{sij} – касательные в трещинах) вычисляют по формулам:

$$\sigma_{si} = E_{si}\left[\frac{1}{\psi_{si}}\left(\varepsilon_n n_i^2 + \gamma^*_{nm}m_in_i + \gamma^*_{nl}n_il_i\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\psi_{sim}}\left(\varepsilon_m m_i^2 + \gamma^*_{mn}m_in_i + \gamma^*_{ml}m_il_i\right) + \frac{1}{\psi_{sil}}\left(\varepsilon_l l_i^2 + \gamma^*_{ln}n_il_i + \gamma^*_{lm}m_il_i\right)\right]$$

$$\sigma^c_{si} = E_{si}\left(\varepsilon_n n_i^2 + \varepsilon_m m_i^2 + \varepsilon_l l_i^2 + \gamma^*_{nm}n_im_i + \gamma^*_{ml}m_il_i + \gamma^*_{ln}n_il_i + \gamma^*_{mn}n_im_i + \right.$$
$$\left. + \gamma^*_{nl}n_il_i + \gamma^*_{lm}m_il_i\right) = E_{si}\left(\varepsilon_i\right); \qquad (10.22)$$

$$\tau_{sij} = \frac{E_{si}}{\psi_{si}\delta_{si}}\left[\delta_n\left(\varepsilon_n n_in_j + \gamma^*_{nm}n_im_j + \gamma^*_{nl}n_il_j\right) + \delta_m\left(\varepsilon_m m_im_j + \gamma^*_{mn}m_in_j + \gamma^*_{ml}m_il_j\right) + \right.$$
$$\left. + \delta_l\left(\varepsilon_l l_il_j + \gamma^*_{ln}l_in_j + \gamma^*_{lm}l_im_j\right)\right],$$
$$\left(j,i = x,y,z\right),\left(i \neq j\right),\left(p = n,m,l\right).$$

Искусственно введенные параметры ψ_{sek} , $\delta_e\left(e,k = n,m,l\right)$ принимают следующие значения (в зависимости от схемы трещин).

если схема 1 трещин, то $\psi_{sim} = \psi_{sil} = 1; \delta_n = 1; \delta_m = \delta_l = 0;$

если схема 2 трещин, то $\psi_{sim} = \psi_{sil} = 1; \psi_{sil} = 1; \delta_n = \delta_m = 1; \delta_l = 0;$ (10.23)

если схема 3 трещин, то $\psi_{sim} = \psi_{sil} = \psi_{si}; \delta_n = \delta_m = \delta_l = 1;$

если схема 0 трещин, то $\psi_{si} = \psi_{sim} = \psi_{sil} = 1;\ \delta_n = \delta_m = \delta_l = 0;$

ψ_{si} – коэффициенты, учитывающие влияние сцепления арматуры с бетоном на деформации арматуры и определяемые по п.6.3.1; δ_{si} – коэффициенты податливости стержней тангенциальным перемещениям в трещине

$$\delta_{si} = 0{,}75\frac{E_b}{E_{si}}\eta_{dn}\left(1 + \varphi\left(t,t_0\right)\right),$$

где $\eta_{dn} = \varepsilon_n / \varepsilon_{n,cr}$ – уровень деформаций; $\varepsilon_{n,cr}$ – деформации, определяемые в момент образования трещин по площадке, нормальной к оси n; $\varphi(t,t_0)$ – по 6.4.3.

Нормальные напряжения арматуры в трещинах допускается вычислять по упрощенным формулам. В случае схемы 1 трещин упрощенные формулы записываются:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{si} \approx \sigma_i \frac{\lambda_i}{\mu_{si}} + \tau_{ji} \frac{n_j \lambda_i}{n_i \mu_{si}} + \tau_{ei} \frac{n_e \lambda_i}{n_i \mu_{si}}; \ (i = x,y,z), \\ &\frac{1}{\lambda_i} = \left(1 + \frac{E_{sj} \psi_{si} n_j^2 \mu_{sj}}{E_{si} \psi_{sj} n_i^2 \mu_{si} \delta_{sj}} + \frac{E_{se} \psi_{si} n_e^2 \mu_{se}}{E_{si} \psi_{se} n_i^2 \mu_{si} \delta_{se}} + \right. \\ &\left. + \frac{\psi_{si}}{E_{si} \mu_{si} n_i^2} \left(E_{crn} n_i^2 + E_{crnm} m_i^2 + E_{crnl} l_i^2\right)\right) \end{aligned}\right\} \qquad (10.24)$$

при $i = x : j = y$, $e = z$; при $i = y : j = x$, $e = z$; при $i = z : j = x$, $e = y$;

$E_{crn}, E_{crnm}, E_{crnl}$ – модули деформации связей зацепления берегов трещины определяются по формулам:

$$E_{crn} = \frac{0{,}5 E_b}{\eta_{dn}^2 + 1}; \ E_{crnm} = E_{crnl} = \frac{0{,}5 E_b}{\eta_{dn}^{1,5} + 1} \qquad (10.25)$$

В случаях схемы 2 трещин дополнительно записываются модифицированные формулы (10.24), (10.25) для второго направления трещин, в которых направляющие косинусы n_i, n_j, n_e заменяются соответственно на косинусы m_i, m_j, m_e и кроме этого $\left(E_{crn} n_i^2\right)$ заменяются на $\left(E_{crn} m_i^2\right)$, $\left(E_{crnm} n_i^2\right)$ на $\left(E_{crnm} n_i^2\right)$, $\left(E_{crnl} l_i^2\right)$ на $\left(E_{crnl} l_i^2\right)$. Из вычисленных по формуле (10.24) и модифицированной формуле (10.25) двух напряжений σ_{si} принимается большее.

В случае схемы 3 трещин дополнительно записываются модифицированные формулы (10.24), (10.25) для третьего направления трещин, в которых направляющие косинусы n_i, m_j, n_e заменяются соответственно на косинусы l_i, l_j, l_e кроме этого заменяются: $\left(E_{crn} n_i^2\right)$ на $\left(E_{crn} l_i^2\right)$, $\left(E_{crnm} m_i^2\right)$ на $\left(E_{crlm} m_i^2\right)$, $\left(E_{crnl} l_i^2\right)$ на $\left(E_{crln} l_i^2\right)$. Напряжения σ_{si} вычисляются по таким образом модифицированной

формуле и формулам, рекомендованным для схемы 2 и из трех значений σ_{si} выбирается большее.

После вычисления напряжений арматуры по формулам (10.16) – (10.25) и заполнения вектор-столбца (10.12) с использованием формул (10.16) переходят к определению первого вектор-столбца напряжений из (10.11):

$$\{\sigma_b^*\}_n = \{\sigma^*\}_n - \{\sigma_s^*\}_n . \tag{10.26}$$

Отдельно формируется вектор-столбец (10.12) с использованием формул (10.18), в которых полагают $\sigma_{si}^n = \sigma_{si}^m = \sigma_{si}^l = \sigma_{si}^c$; $\delta_e = 0$. Таким образом заполненный вектор-столбец (10.18) обозначается $\{\tilde{\sigma}_s\}_n^c$. Затем определяют средние напряжения бетона в пластинах или полосах между трещинами

$$\{\tilde{\sigma}_b^c\}_n = \{\sigma^*\}_n - \{\tilde{\sigma}_s^c\}_n , \tag{10.27}$$

$$\{\tilde{\sigma}_b\}_n^c = \{\sigma_{bn}, \sigma_{bm}, \sigma_{bl}, \tau_{bnm}, \tau_{bml}, \tau_{bln}, \tau_{bmn}, \tau_{blm}, \tau_{bnl}\}^T . \tag{10.28}$$

10.2.5 Запись соотношений между напряжениями и деформациями бетона до появления трещин применительно к рассмотрению элементов с трещинами

При этом соотношения (8.2), (8.3) представляются в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_l \\ \gamma_{nm}^* \\ \gamma_{ml}^* \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{mn}^* \\ \gamma_{lm}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{b11} & C_{b12} & C_{b13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{b12} & C_{b22} & C_{b23} & & & & & & \\ C_{b13} & C_{b23} & C_{b33} & & & & & & \\ & & & C_{b44} & & & & & \\ & & & & C_{b55} & & & & \\ & & & & & C_{b66} & & & \\ & & & & & & C_{b77} & & \\ & & & & & & & C_{b88} & \\ & & & & & & & & C_{b99} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{bn} \\ \sigma_{bm} \\ \sigma_{bl} \\ \tau_{bnm}^* \\ \tau_{bml}^* \\ \tau_{bln}^* \\ \tau_{bmn}^* \\ \tau_{blm}^* \\ \tau_{bnl}^* \end{Bmatrix} \tag{10.29}$$

здесь согласно пунктам 8.2.1 – 8.2.3

$$\left.\begin{aligned}
&C_{b11}=\frac{1}{E_b\nu_{b11}};\ C_{b22}=\frac{1}{E_b\nu_{b22}};\ C_{b33}=\frac{1}{E_b\nu_{b33}};\\
&C_{b12}=-\frac{\mu_{b12}}{E_b\overline{\nu}_b};\ C_{b13}=-\frac{\mu_{b13}}{E_b\overline{\nu}_b};\ C_{b23}=-\frac{\mu_{b23}}{E_b\overline{\nu}_b};\\
&C_{b44}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b1}}+\frac{\mu_{b12}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1};\ C_{b55}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b2}}+\frac{\mu_{b23}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1};\\
&C_{b66}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b3}}+\frac{\mu_{b31}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1};\ C_{b77}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b2}}+\frac{\mu_{b21}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1};\\
&C_{b88}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b3}}+\frac{\mu_{b32}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1};\ C_{b99}=\frac{1}{E_b}\left(\frac{1}{\nu_{b1}}+\frac{\mu_{b13}}{\overline{\nu}_b}\right)^{-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.30)$$

Коэффициенты (10.30) вычисляются по 8.2, полагая $n=1$; $m=2$; $l=3$; $ek=12,23,31,21,32,13$, используя компоненты напряжений бетона (10.28); при этом входящая в эти формулы призменная прочность R_b умножается на коэффициент, вычисляемый согласно $\widetilde{\gamma}_{bp}$ п.9.3.4, а значения величины $\hat{\varepsilon}_b$, вычисляемые по п.6.1.3, умножаются на коэффициент, принимаемый равным меньшему из значений двух величин: 1,2 и $\left(0{,}5+1{,}5\sqrt{\gamma_{bp}^3}\right)$.

Условия (10.29) можно представить в виде

$$\{\varepsilon^*\}_n=[C_b^*]_n\{\sigma_b^*\}_n, \qquad (10.31)$$

где $\{\varepsilon^*\}_n$ формируется в виде (10.8), $\{\sigma_b^*\}_n$ – в виде (10.11), матрица $[C_b^*]$, представленная в (10.29) согласно (10.31), является матрицей податливости бетона.

В обращенном виде условие (10.31) записывается

$$\{\sigma_b^*\}_n=[C_b^*]_n^{-1}\{\varepsilon^*\}_n=[\widetilde{d}_b^*]_n\{\varepsilon^*\}_n; \qquad (10.32)$$

$$[d_b^*]_n=[C_b^*]_n^{-1},$$

где коэффициенты матрицы жесткости $[d_b^*]_n$ в развернутом виде записывается

$$\left[\widetilde{d}_b^*\right]_n = \begin{vmatrix} d_{b11}^* & d_{b12}^* & d_{b13}^* & & & & & & \\ d_{b12}^* & d_{b22}^* & d_{b23}^* & & & & & & \\ d_{b13}^* & d_{b23}^* & d_{b33}^* & & & & & & \\ & & & d_{b44}^* & & & & & \\ & & & & d_{b55}^* & & & & \\ & & & & & d_{b66}^* & & & \\ & & & & & & d_{b77}^* & & \\ & & & & & & & d_{b88}^* & \\ & & & & & & & & d_{b99}^* \end{vmatrix}, \qquad (10.33)$$

коэффициенты d_{bij}^* определяют через коэффициенты C_{bij}^* по условию (10.32).

10.2.6 Деформации бетона в элементах с трещинами

При этом сохраняются зависимости (10.34), однако коэффициенты матрицы $\left[\widetilde{d}_b^*\right]_n$ корректируются следующим образом:

- для первой схемы трещин

$$d_{b11}^* = 0;\ d_{b12}^* = 0;\ d_{b13}^* = 0;\ d_{b44}^* = 0;\ d_{b99}^* = 0; \qquad (10.34)$$

- для второй схемы трещин дополнительно к указанным равенствам добавляются равенства

$$d_{b22}^* = 0;\ d_{b23}^* = 0;\ d_{b55}^* = 0;\ d_{b77}^* = 0; \qquad (10.34)$$

- для третьей схемы трещин к указанным равенствам добавляются новые равенства

$$d_{b33}^* = 0;\ d_{b66}^* = 0;\ d_{b88}^* = 0. \qquad (10.34)$$

Формально для бетона с трещинами с учетом указанным выше факторов матрица $\left[d_b^*\right]_n$ может быть представлена в виде:

$$\left[d_b^*\right]_{np} = \begin{vmatrix} \beta_n d_{b11}^* & \beta_n d_{b12}^* & \beta_n d_{b13}^* & & & & & & \\ \beta_n d_{b12}^* & \beta_m d_{b22}^* & \beta_m d_{b23}^* & & & & & & \\ \beta_n d_{b13}^* & \beta_m d_{b23}^* & \beta_l d_{b33}^* & & & & & & \\ & & & \beta_n d_{b44}^* & & & & & \\ & & & & \beta_m d_{b55}^* & & & & \\ & & & & & \beta_l d_{b66}^* & & & \\ & & & & & & \beta_m d_{b77}^* & & \\ & & & & & & & \beta_l d_{b88}^* & \\ & & & & & & & & \beta_n d_{b88}^* \end{vmatrix}, \quad (10.35)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \text{- для первой схемы трещин} \\ \beta_n = (1-\delta_n) = 0; \\ \text{- для второй схемы трещин} \\ \beta_n = (1-\delta_n) = 0;\ \beta_m = (1-\delta_m) = 0 \\ \text{- для ттретье схемы трещин} \\ \beta_n = (1-\delta_n) = 0;\ \beta_m = (1-\delta_m) = 0;\ \beta_l = (1-\delta_l) = 0, \end{array}\right\} \quad (10.36)$$

где параметры δ_n, δ_m, δ_l определяются по зависимостям (10.13).

Кроме этого для элементов с трещинами вводится матрица жесткости зацеплений берегов трещин

$$\left[d_{cr}^*\right] = \begin{vmatrix} d_{cr11}^* & & & & & & & & \\ & d_{cr22}^* & & & & & & & \\ & & d_{cr33}^* & & & & & & \\ & & & d_{cr44}^* & & & & & \\ & & & & d_{cr55}^* & & & & \\ & & & & & d_{cr66}^* & & & \\ & & & & & & d_{cr77}^* & & \\ & & & & & & & d_{cr88}^* & \\ & & & & & & & & d_{cr99}^* \end{vmatrix}, \quad (10.37)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &d^*_{cr11}=\delta_n E_{crn};\ d^*_{cr22}=\delta_m E_{crm};\ d^*_{cr33}=\delta_l E_{crl};\\ &d^*_{cr44}=\delta_n E_{crnm};\ d^*_{cr55}=\delta_m E_{crml};\ d^*_{cr66}=\delta_l E_{crln};\\ &d^*_{cr77}=\delta_m E_{crmn};\ d^*_{cr88}=\delta_l E_{crlm};\ d^*_{cr99}=\delta_n E_{crnl}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.38)$$

Также параметры δ_n, δ_m, δ_l назначаются по зависимостям (10.13).

Модулями зацепления E_{crn}, E_{crm}, E_{cnl} и другие формируются по 10.2.4.

Таким образом для элементов с трещинами зависимости (10.32) корректируются с учетом (10.35), (10.47). Откорректированные зависимости представляются в виде

$$\{\sigma^*_b\}_n=\left(\left[d^*_b\right]_{np}+\left[d^*_{cr}\right]\right)\{\varepsilon^*\}_n=\left[d^*_b\right]_n\{\varepsilon^*\}_n, \qquad (10.39)$$

где

$$\left[d^*_b\right]_n=\left[d^*_b\right]_{n\beta}+\left[d^*_{cr}\right]; \qquad (10.40)$$

10.2.7 Зависимости между напряжениями и деформациями арматуры

Вектор-столбец напряжений арматуры записывают в виде (10.12) и вычисляют по формулам

$$\{\sigma_s\}_n=\left[d^*_s\right]_n\{\varepsilon^*\}_n. \qquad (10.41)$$

где

$$\left[d^*_{sn}\right]=\begin{bmatrix} d^*_{s11} & d^*_{s12} & d^*_{s13} & d^*_{s14} & d^*_{s15} & d^*_{s16} & d^*_{s17} & d^*_{s18} & d^*_{s19}\\ & d^*_{s22} & d^*_{s23} & d^*_{s24} & d^*_{s25} & d^*_{s26} & d^*_{s27} & d^*_{s28} & d^*_{s29}\\ & & d^*_{s33} & d^*_{s34} & d^*_{s35} & d^*_{s36} & d^*_{s37} & d^*_{s38} & d^*_{s39}\\ & & & d^*_{s44} & d^*_{s45} & d^*_{s46} & d^*_{s47} & d^*_{s48} & d^*_{s49}\\ & & & & d^*_{s55} & d^*_{s56} & d^*_{s57} & d^*_{s58} & d^*_{s59}\\ & & & & & d^*_{s66} & d^*_{s67} & d^*_{s68} & d^*_{s69}\\ & & & & & & d^*_{s77} & d^*_{s78} & d^*_{s79}\\ & & & & & & & d^*_{s88} & d^*_{s89}\\ & & & & & & & & d^*_{s99} \end{bmatrix} \qquad (10.42)$$

Элементы матрицы $\left[d^*_{sm}\right]$ вычисляют по формулам:

$$
\left.
\begin{aligned}
d^*_{s11} &= \sum_i \left[E_{sin} n_i^2 \left(n_i^2 + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s12} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i n_i \left(m_i n_i + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j n_j \right) \right]; \\
d^*_{s13} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(n_i l_i + \delta_l \delta_{si} \sum_j n_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s14} &= \sum_i \left[E_{sin} n_i^2 \left(n_i m_i + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j m_j \right) \right]; \\
d^*_{s15} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i n_i \left(n_i l_i + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s16} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(n_i^2 + \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s17} &= \sum_i \left[E_{sim} n_i m_i \left(n_i^2 + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s18} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(n_i m_i + \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j n_j \right) \right]; \\
d^*_{s19} &= \sum_i \left[E_{sin} n_i^2 \left(n_i l_i + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j l_j \right) \right];
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
d^*_{s22} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i^2 \left(m_i^2 + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s23} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(m_i l_i + \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s24} &= \sum_i \left[E_{sim} n_i m_i \left(m_i^2 + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s25} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i^2 \left(m_i l_i + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s26} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(m_i n_i + \delta_m \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j m_j \right) \right]; \\
d^*_{s27} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i^2 \left(m_i n_i + \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j m_j \right) \right];
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.43)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
d^*_{s28} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(m_i^2 + \delta_n \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s29} &= \sum_i \left[E_{sim} n_i m_i \left(m_i l_i + \delta_n \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j m_j \right) \right]; \\
d^*_{s33} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(l_i^2 + \delta_l^2 \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s34} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(l_i m_i + \delta_n \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s35} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(l_i^2 + \delta_m \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s36} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(n_i l_i + \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j n_j \right) \right]; \\
d^*_{s37} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(n_i l_i + \delta_m \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s38} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(m_i l_i + \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j m_j \right) \right];
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
d^*_{s39} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(l_i^2 m_i + \delta_n \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s44} &= \sum_i \left[E_{sin} n_i^2 \left(m_i^2 + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s45} &= \sum_i \left[E_{sim} n_i m_i \left(m_i l_i + \delta_n \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s46} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(n_i m_i + \delta_n \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j n_j m_j \right) \right]; \\
d^*_{s47} &= \sum_i \left[E_{sim} n_i m_i \left(n_i m_i + \delta_n \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s48} &= \sum_i \left[E_{sil} n_i l_i \left(m_i^2 + \delta_n \delta_l \delta_{si}^{-1} \sum_j m_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s49} &= \sum_i \left[E_{sin} n_i^2 \left(m_i l_i + \delta_n \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j m_j \right) \right] \\
d^*_{s55} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i^2 \left(l_i^2 + \delta_n \delta_m \delta_{si}^{-1} \sum_j l_j^2 \right) \right];
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.43)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
d^*_{s56} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i m_i \left(n_i l_i + \delta_m \delta_l \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j l_j \right) \right] \\
d^*_{s57} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i^2 \left(n_i l_i + \delta_m \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s58} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i m_i \left(m_i l_i + \delta_m \delta_l \delta^{-1}_{si} \sum_j m_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{s59} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i n_i \left(l_i^2 + \delta_n \delta_m \delta^{-1}_{si} \sum_j l_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s66} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(n_i^2 + \delta_l \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s67} &= \sum_i \left[E_{sil} m_i l_i \left(n_i^2 + \delta_n \delta_l \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{s68} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(n_i m_i + \delta_l \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j m_j \right) \right]; \\
d^*_{s69} &= d^*_{s13}; \\
d^*_{S77} &= \sum_i \left[E_{sim} + m_i^2 \left(n_i^2 + \delta_m \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j^2 \right) \right]; \\
d^*_{S78} &= d^*_{S26}; \\
d^*_{S79} &= \sum_i \left[E_{sim} m_i n_i \left(n_i l_i + \delta_n \delta_m \delta^{-1}_{si} \sum_j n_j l_j \right) \right]; \\
d^*_{S88} &= \sum_i \left[E_{sil} l_i^2 \left(m_i^2 + \delta_e \sum_j m_j^2 \right) \right];
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.43)
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
& d^*_{S89} = d^*_{S34}; \\
& E_{sin} = E_{si} \psi^{-1}_{si} \mu_{si}; \qquad E_{sim} = E_{si} \psi^{-1}_{sim} \mu_{si}; \\
& E_{sil} = E_{si} \psi^{-1}_{sil} \mu_{si}; \qquad (i, j = x, y, z \qquad j \neq i)
\end{aligned}
\right\}. \qquad (10.44)
$$

Из формул (10.42) получают коэффициенты d^*_{sij} любой схемы трещин, а также элементов без трещин (схема 0), присваивая параметрам $\delta_n, \delta_m, \delta_l, \psi_{sim}, \psi_{sil}, \psi_{sn}$ значения, указанные в формулах (10.13), (10.19), (10.23).

10.2.8 Общие зависимости между напряжениями бетона и арматуры и деформациями

Эти соотношения следуют из суммирования соотношений (10.32) и (10.41)

$$\{\sigma^*\}_n = \{\sigma_b^*\}_n + \{\sigma_s^*\}_n = \left([d_b^*]_n + [d_s^*]_n\right)\{\varepsilon^*\}_n = [d^*]_n\{\varepsilon_n^*\}, \qquad (10.45)$$

где $[d^*] = [d_b^*]_n + [d_s^*]_n$

Соотношения (10.45) связаны со сдвиговыми компонентами типа γ_{mn}^* и γ_{nm}^* несимметричного тензора деформаций. Для выполнения практических расчетов девятикомпонентные соотношения (10.45) сводятся к шестикомпонентным, используя условие парности касательных компонент

$$\tau_{nm} = \tau_{nm}^* = \tau_{mn}^*;\ \tau_{nl} = \tau_{ml}^* = \tau_{lm}^*;\ \tau_{ln} = \tau_{ln}^* = \tau_{nl}^* \qquad (10.46)$$

и общие углы сдвига

$$\gamma_{nm} = \gamma_{nm}^* + \gamma_{mn}^*;\quad \gamma_{ml} = \gamma_{ml}^* + \gamma_{lm}^*;\quad \gamma_{nl} = \gamma_{nl}^* + \gamma_{ln}^*\ . \qquad (10.47)$$

Для перехода от девятикомпонентных соотношений к шестикомпонентным. Соотношения (10.45) преобразовываются к виду

$$\{\varepsilon^*\}_n = [d^*]_n^{-1}\{\sigma^*\}_n = [C^*]_n\{\sigma^*\}_n, \qquad (10.48)$$

где $[C^*]_n = [d^*]_n^{-1}$.

В развернутом виде соотношения (10.48) записываются

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_l \\ \gamma_{nm}^* \\ \gamma_{ml}^* \\ \gamma_{ln}^* \\ \gamma_{mn}^* \\ \gamma_{lm}^* \\ \gamma_{nl}^* \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11(n)}^* & C_{12(n)}^* & C_{13(n)}^* & C_{14(n)}^* & C_{15(n)}^* & C_{16(n)}^* & C_{17(n)}^* & C_{18(n)}^* & C_{19(n)}^* \\ C_{12(n)}^* & C_{22(n)}^* & C_{23(n)}^* & C_{24(n)}^* & C_{25(n)}^* & C_{26(n)}^* & C_{27(n)}^* & C_{28(n)}^* & C_{29(n)}^* \\ C_{13(n)}^* & C_{23(n)}^* & C_{33(n)}^* & C_{34(n)}^* & C_{35(n)}^* & C_{36(n)}^* & C_{37(n)}^* & C_{38(n)}^* & C_{39(n)}^* \\ C_{14(n)}^* & C_{24(n)}^* & C_{34(n)}^* & C_{44(n)}^* & C_{45(n)}^* & C_{46(n)}^* & C_{47(n)}^* & C_{48(n)}^* & C_{49(n)}^* \\ C_{15(n)}^* & C_{25(n)}^* & C_{35(n)}^* & C_{45(n)}^* & C_{55(n)}^* & C_{56(n)}^* & C_{57(n)}^* & C_{58(n)}^* & C_{59(n)}^* \\ C_{16(n)}^* & C_{26(n)}^* & C_{36(n)}^* & C_{46(n)}^* & C_{56(n)}^* & C_{66(n)}^* & C_{67(n)}^* & C_{68(n)}^* & C_{69(n)}^* \\ C_{17(n)}^* & C_{27(n)}^* & C_{37(n)}^* & C_{47(n)}^* & C_{57(n)}^* & C_{67(n)}^* & C_{77(n)}^* & C_{78(n)}^* & C_{79(n)}^* \\ C_{18(n)}^* & C_{28(n)}^* & C_{38(n)}^* & C_{48(n)}^* & C_{58(n)}^* & C_{68(n)}^* & C_{78(n)}^* & C_{88(n)}^* & C_{89(n)}^* \\ C_{19(n)}^* & C_{29(n)}^* & C_{39(n)}^* & C_{49(n)}^* & C_{59(n)}^* & C_{69(n)}^* & C_{79(n)}^* & C_{89}^* & C_{99(n)}^* \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_m \\ \sigma_l \\ \tau_{nm} \\ \tau_{ml} \\ \tau_{ln} \\ \tau_{nm} \\ \tau_{ml} \\ \tau_{ln} \end{Bmatrix}_\Delta^0 \qquad (10.49)$$

Используя соотношения (10.46), (10.47) сводим девятикомпонентную систему (10.49) к шестикомпонентной

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_n\\ \varepsilon_l\\ \varepsilon_n\\ \gamma_{nm}\\ \gamma_{ml}\\ \gamma^*_{ln}\end{array}\right\}=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}C_{11(n)} & C_{12(n)} & C_{13(n)} & C_{14(n)} & C_{15(n)} & C_{16(n)}\\ \hline C_{12(n)} & C_{22(n)} & C_{23(n)} & C_{24(n)} & C_{25(n)} & C_{26(n)}\\ \hline C_{13(n)} & C_{23(n)} & C_{33(n)} & C_{34(n)} & C_{35(n)} & C_{36(n)}\\ \hline C_{14(n)} & C_{24(n)} & C_{34(n)} & C_{44(n)} & C_{45(n)} & C_{46(n)}\\ \hline C_{15(n)} & C_{25(n)} & C_{35(n)} & C_{45(n)} & C_{55(n)} & C_{56(n)}\\ \hline C_{16(n)} & C_{26(n)} & C_{36(n)} & C_{46(n)} & C_{56(n)} & C_{66(n)}\end{array}\right|\cdot\left\{\begin{array}{c}\sigma_n\\ \sigma_m\\ \sigma_l\\ \tau_{nm}\\ \tau_{ml}\\ \tau_{ln}\end{array}\right\} \tag{10.50}$$

или в сокращенном виде

$$\{\varepsilon\}_n=[C]_n\{\sigma\}_n, \tag{10.51}$$

где
$$\left.\begin{array}{l}C_{11(n)}=C^*_{11(n)};\ \ C_{12(n)}=C^*_{12(n)};\ \ C_{13(n)}=C^*_{13(n)};\ \ C_{14(n)}=\left(C^*_{14(n)}+C^*_{17(n)}\right);\\ C_{15(n)}=\left(C^*_{15(n)}+C^*_{18(n)}\right);\ \ C_{22(n)}=C^*_{22(n)};\ \ C_{23(n)}=C^*_{23(n)};\\ C_{24(n)}=\left(C^*_{24(n)}+C^*_{27(n)}\right);\ \ C_{25(n)}=\left(C^*_{25(n)}+C^*_{28(n)}\right);\\ C_{26(n)}=\left(C^*_{26(n)}+C^*_{29(n)}\right);\ \ C_{33(n)}=C^*_{33(n)};\ \ C_{34(n)}=\left(C^*_{34(n)}+C^*_{37(n)}\right);\\ C_{35(n)}=\left(C^*_{35(n)}+C^*_{38(n)}\right);\ \ C_{36(n)}=\left(C^*_{36(n)}+C^*_{35(n)}\right);\\ C_{44(n)}=\left(C^*_{44(n)}+2C^*_{47(n)}+C^*_{77(n)}\right);\ \ C_{45(n)}=\left(C^*_{45(n)}+C^*_{48(n)}+C^*_{57(n)}+C^*_{78(n)}\right);\\ C_{46(n)}=\left(C^*_{46(n)}+C^*_{67(n)}+C^*_{49(n)}+C^*_{79(n)}\right);\ \ C_{55(n)}=\left(C^*_{55(n)}+2C^*_{58(n)}+C^*_{88(n)}\right);\\ C_{56(n)}=\left(C^*_{56(n)}+C^*_{68(n)}+C^*_{59(n)}+C^*_{89(n)}\right);\ \ C_{66(n)}=\left(C^*_{66(n)}+2C^*_{69(n)}+C^*_{99(n)}\right);\end{array}\right\} \tag{10.52}$$

В практических расчетах соотношения (10.49) преобразовываются к соотношениям в общих осях x, y, z. Компоненты напряжений и относительных деформаций преобразовываются по формулам:

$$\left.\begin{array}{l}\{\sigma^*\}_n=[\alpha^*]\{\sigma^*\}_x;\ \ \{\sigma^*\}_x=[\alpha^*]^T\{\sigma^*\}_n;\\ \{\varepsilon^*\}_n=[\alpha^*]\{\varepsilon^*\}_x;\ \ \{\varepsilon^*\}_x=[\alpha^*]^T\{\varepsilon^*\}_n,\end{array}\right\} \tag{10.53}$$

где
$$\left.\begin{array}{l}\{\sigma^*\}_x=\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}\}^T;\\ \{\varepsilon^*\}_x=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma^*_{xy},\gamma^*_{yz},\gamma^*_{zx},\gamma^*_{yx},\gamma^*_{zy},\gamma^*_{xz}\}^T;\end{array}\right\} \tag{10.54}$$

$$\left[\alpha^*\right]=\begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{11}l_{12} & l_{12}l_{13} & l_{13}l_{11} & l_{12}l_{11} & l_{13}l_{12} & l_{11}l_{13} \\ l_{21}^2 & l_{22}^2 & l_{23}^2 & l_{21}l_{22} & l_{22}l_{23} & l_{23}l_{21} & l_{22}l_{21} & l_{23}l_{22} & l_{21}l_{23} \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & l_{33}^2 & l_{31}l_{32} & l_{32}l_{33} & l_{33}l_{31} & l_{32}l_{31} & l_{33}l_{32} & l_{31}l_{33} \\ l_{11}l_{21} & l_{12}l_{22} & l_{13}l_{23} & l_{11}l_{22} & l_{12}l_{23} & l_{13}l_{21} & l_{12}l_{21} & l_{13}l_{22} & l_{11}l_{23} \\ l_{21}l_{31} & l_{22}l_{32} & l_{23}l_{33} & l_{21}l_{32} & l_{22}l_{33} & l_{23}l_{31} & l_{22}l_{31} & l_{23}l_{32} & l_{21}l_{33} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} & l_{33}l_{13} & l_{31}l_{12} & l_{32}l_{13} & l_{33}l_{11} & l_{32}l_{11} & l_{33}l_{12} & l_{31}l_{13} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}l_{12} & l_{23}l_{13} & l_{21}l_{12} & l_{22}l_{13} & l_{23}l_{11} & l_{22}l_{11} & l_{23}l_{12} & l_{21}l_{13} \\ l_{31}l_{21} & l_{32}l_{22} & l_{33}l_{23} & l_{31}l_{22} & l_{32}l_{23} & l_{33}l_{21} & l_{32}l_{21} & l_{33}l_{22} & l_{31}l_{23} \\ l_{11}l_{31} & l_{12}l_{32} & l_{13}l_{33} & l_{11}l_{32} & l_{12}l_{33} & l_{13}l_{31} & l_{12}l_{31} & l_{13}l_{32} & l_{11}l_{33} \end{bmatrix} \tag{10.55}$$

Учитывая (10.53) зависимости (10.48) преобразовываются к виду:

$$\left\{\varepsilon^*\right\}_x=\left[\alpha^*\right]^T\left\{\varepsilon^*\right\}_n=\left[C^*\right]_x\left\{\sigma^*\right\}, \tag{10.56}$$

где

$$\left[C^*\right]_x=\left[\alpha^*\right]^T\left[C^*\right]_n\left\{\alpha^*\right\}. \tag{10.57}$$

В развернутом виде соотношения (10.56) представляются в виде (10.49), где индексы n, m, l заменяются соответственно на индексы x, y, z, естественно изменяются значения параметров податливости $C^*_{ij(n)}$, которые обозначаются $C^*_{ij(x)}$.

Используя условие парности касательных напряжений и общие углы сдвига в осях x, y, z:

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}=\tau_{yx},\tau_{yz}=\tau_{zy},\tau_{zx}=\tau_{xz}, \\ &\gamma_{xy}=\gamma^*_{xy}+\gamma^*_{yx},\gamma_{yz}=\gamma^*_{yz}+\gamma^*_{zy},\gamma_{zx}=\gamma^*_{xz}+\gamma^*_{zx}; \end{aligned} \tag{10.58}$$

девятикомпонентная система (10.56) сводится по аналогии с (10.49) к шестикомпонентной

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}=\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} C_{11(x)} & C_{12(x)} & C_{13(x)} & C_{14(x)} & C_{15(x)} & C_{16(x)} \\ \hline C_{12(x)} & C_{22(x)} & C_{23(x)} & C_{24(x)} & C_{25(x)} & C_{26(x)} \\ \hline C_{13(x)} & C_{23(x)} & C_{33(x)} & C_{34(x)} & C_{35(x)} & C_{36(x)} \\ \hline C_{14(x)} & C_{24(x)} & C_{34(x)} & C_{44(x)} & C_{45(x)} & C_{46(x)} \\ \hline C_{15(x)} & C_{25(x)} & C_{35(x)} & C_{45(x)} & C_{55(x)} & C_{56(x)} \\ \hline C_{16(x)} & C_{26(x)} & C_{36(x)} & C_{46(x)} & C_{56(x)} & C_{66(x)} \end{array}\right|\cdot\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \tag{10.59}$$

или в сокращенном виде

$$\left\{\varepsilon\right\}_x=\left[C\right]_x\left\{\sigma\right\}_x. \tag{10.60}$$

Коэффициенты матрицы $[C]_x$ выражаются через коэффициенты матрицы $[C^x]$ по формулам (10.51) – (10.52), в которых нижний индекс (n) заменяется на индекс (x).

В практических расчетах соотношения (10.59) можно непосредственно получать из соотношений (10.50), полагая

$$[C]_x = [\alpha]^T [C]_n [\alpha], \tag{10.61}$$

где $[\alpha]$ – шестикомпонентная матрица преобразования (8.33).

В практических расчетах также используются соотношения (10.60) в обращенном виде

$$\{\sigma\}_x = [C]_x^{-1} \{\varepsilon\}_x = [d]_x \{\varepsilon_x\}, \tag{10.62}$$

где $[d]_x = [C]_x^{-1}$

При рассмотрении железобетонных элементов, армированных вдоль ортогональных осей x, y, z, повернутые оси x', y', z' могут обозначаться n, m, l (рисунок 5.1). При этом вводятся новые обозначения направляющих косинусов $n_i, m_i, l_i (i = x, y, z)$ согласно таблице 5.1.

10.3 Железобетонные элементы при косоугольном армировании

Пусть i – произвольные направления стержней, которые не совпадают с направлениями осей x, y, z и не ортогональны между собой. Каждое направление i характеризуется коэффициентом армирования μ_{si}, а также декартовой системой координат i, $i(a)$, $i(r)$, где ось i совпадает с направлением осей, а остальные могут располагаться произвольно; n_i, m_i, l_i – направляющие косинусы направления i к осям n, m, l, аналогично n_j, m_j, l_j $(j = i(a), i(r))$ – направляющие косинусы двух других осей к осям n, m, l. Такая трактовка направляющих косинусов позволяет распространять приведенные в п.10.2.1 – 10.2.6 формулы на случай произвольного армирования. Однако при этом теряют силу формулы (10.24) – (10.25) по определению напряжений арматуры в трещинах при ортотропном армировании.

10.4 Ширина раскрытия трещин

10.4.1 При определении ширины раскрытия трещин рассматривают три схемы трещин (схема 1, схема 2, схема 3), которые указаны в пункте 7.4. В случае схемы 1 трещин ширину раскрытия следует определять по формуле

$$a_{crc,n} = l_{cr,n}\varepsilon_n, \tag{10.64}$$

где ε_n – относительные удлинения элемента по нормали к трещинам, определяемые на основании физических соотношений (10.50); l_{cr} – расстояние между трещинами, которое вычисляется в зависимости от схемы трещин и схемы армирования.

Случай армирования стержнями арматуры трех ортогональных направлений, расположенных вдоль осей *x, y, z,* которые пересекает наклонная трещина *n* (или *x'* согласно рисунку 5.2), где *n* – нормаль к наклонной трещине, $n_x(l_{11})$, $n_y(l_{12})$, $n_z(l_{13})$ – направляющие косинусы углов наклона *n* к осям *x, y, z* сокращенно $n_i(i = x,y,z)$. В этом случае расстояние между трещинами определяется по зависимости формуле

$$l_{cr} = 3\varphi_{in}\eta_n\alpha^*\left(3{,}5 - 100\mu_{sn}\sqrt[3]{d_0^2 d_n}\right), \tag{10.65}$$

где $0{,}02 \geq \mu_{sn} = \sum_i \mu_{si} n_i^2$;

$d_n = \sum_i d_i \mu_{si} n_i^2 / \sum \mu_{si} n_i^2$;

$\eta_n = \sum_i \eta_i \mu_{si} n_i^2 / \sum_i \mu_{si} n_i^2$;

$\alpha^* = 1 - 0{,}15\left|(1-n_x)(1-n_y)(1-n_z)\right|$,

здесь μ_{si} – коэффициенты армировании, определяемые по п.9.1; d_i – диаметры в мм арматурных стержней, i – направлений $(i = x,y,z)$, $d_0^2 = 1\,000$ мм^2;

η_i – коэффициент η для арматуры i – направлений, принимаемый равным:

- при стержневой арматуре периодического профиля …….. 1,0;
- стержневой гладкой арматуре …….. 1,3;
- проволочной арматуре периодического профиля и канатов … 1,2;
- гладкой проволочной арматуре …… 1,4;

φ_{ln} – коэффициент, принимаемый равным при учете:

кратковременных нагрузок и непродолжительного действия постоянных и длительных нагрузок …….. 1,0

многократно повторяющейся нагрузки, а также продолжительного действия постоянных и длительных нагрузок для конструкций из бетона:

тяжелого:

естественной влажности …….. $\varphi_{ln} = 1.8 - 15\mu_{sn}$

в водонасыщенном состоянии …… 1,2;

при попеременном водонасыщении и высушивании 1,75;

- Мелкозернистого групп

А …….. 1,75;

Б …… 1,5;

- Легкого и поризованного не менее …… 1,5;

Ячеистого …… 2,5.

Значения φ_{l_n} для легкого, мелкозернистого, поризованного и ячеистого бетонов в водонасыщенном состоянии умножаются на коэффициент 0,8, а при попеременном водонасыщении и высушивании – на коэффициент 1,2.

Указанные выше рекомендации действуют, если деформации ε_n в формуле (10.64) вычислены при продолжительном действии нагрузок без учета влияния деформаций ползучести, в других случаях $\varphi_{ln} = 1$.

Если элемент армируется косоугольной сеткой, то для определения l_{cr} в случае непересекающихся трещин следует использовать более общую формулу

$$l_{cr} = 0{,}65\varphi_{ln}\delta / 4\sum_i \frac{\mu_{si}\alpha_i^* n_i}{\eta_i\sqrt{d_i d_0}}, \qquad (10.66)$$

где $d_0 = 10$ мм;

$$\alpha_i^* = 1 - 0{,}5\left[1 - n_i^2\right]^2; \qquad (10.67)$$

$\delta = 1$, если

$$\sum_i \mu_{si}\alpha_i^* \le 0{,}02$$

иначе

$$\delta = \sum_i \mu_i \alpha_i^* / 0{,}02.$$

10.4.2. В случае образования новых трещин, направленных нормально к осям n,m,l по схемам 2 и 3, дополнительно вычисляется ширина раскрытия трещин по направлениям m и l, при этом в формулам (10.64) ε_n заменяется соответственно на ε_m и ε_l, которые вычисляются по системе (10.50). При этом в формулах (10.64), (10.66), (10.67) n_i заменяется на m_i и l_i. Вычисленные по формулам (10.64) и (10.66) значения α_{crc} и $\alpha_{crc,l}$ умножаются на коэффициент 0,8 и в расчет вводится бóльшая из двух уменьшенных величин.

11 Математические методы расчета массивных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности

11.1 Предварительные замечания

Настоящий раздел посвящен методам решения задач по определению напряженно-деформированного состояния массивных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. Физическая нелинейность или нелинейность деформирования заключается в отсутствии пропорциональной связи между напряжениями и деформациями. Это относится как к упругомгновенным деформациям, так и к деформациям ползучести.

В теории железобетона специфические нелинейные связи между напряжениями и деформациями определяют физическую модель объекта. С этой точки зрения в настоящем разделе основное внимание уделено применению в качестве деформационной модели железобетона, модели с учетом трещин, подробно рассмотренных в предыдущих разделах, однако предлагаемые методы решения обладают достаточной общностью и могут рассматриваться как общие методы решения задач нелинейной теории железобетона.

11.2 Постановка задачи. Система разрешающих уравнений и граничные условия

Для решения любой инженерной задачи о прочности, жесткости и устойчивости необходимо знать поле перемещений, которое для железобетонного континиуума характеризуется тремя функциями:

$$u = u(x,y,z), \qquad v = v(x,y,z), \qquad \omega = \omega(x,y,z),$$

поле деформаций, характеризуемое шестью функциями:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(x,y,z), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(x,y,z), \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(x,y,z),$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}(x,y,z), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}(x,y,z), \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}(x,y,z),$$

поле напряжений, характеризуемое шестью функциями:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x,y,z), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x,y,z), \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}(x,y,z),$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{12}(x,y,z), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}(x,y,z), \quad \sigma_{31} = \sigma_{31}(x,y,z),$$

Определяющая система уравнений для нахождения указанных пятнадцати функций может быть получена одним из двух эквивалентных способов: из рассмотрения равновесия бесконечно малого элемента континиуума или с помощью вариационных принципов. Представим уравнения первого способа, в матричной форме

- три уравнения равновесия статики (динамики)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho\ddot{u} \\ \rho\ddot{v} \\ \rho\ddot{w} \end{Bmatrix}, \qquad (11.1)$$

где точки обозначают взятие производной по времени;

- шесть геометрических уравнений (формулы Коши)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}; \qquad (11.2)$$

шесть физических уравнений, которые в соответствии с соотношениями (10.1), (10.62) представляем:

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon\} = [d]^{-1}\{\sigma\}. \qquad (11.3)$$

Обозначим матрицы дифференцирования через $[D]$ в уравнение (11.1) и $[\overline{D}]$ в уравнении (11.2). Тогда, подставив (11.3) в уравнения равновесия (11.1) и учитывая (11.2), получим разрешающие уравнения для малых деформаций континиуума

$$[D]([d][\overline{D}]\{U_i\}) + \{x_j\} = \{0\}(\{\rho\ddot{U}_j\}). \qquad (11.4)$$

Уравнение (11.4) можно получить в более компактной форме, если рассматриваемые величины представить в тензорных обозначениях. Действительно, уравнения (11.1), (11.2) можем записать соответственно как:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij} + x_j = 0\left(\rho\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}\right), \ (j = 1,2,3); \qquad (11.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \qquad (i, j = 1,2,3) \ . \qquad (11.6)$$

Причем $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Шесть физических уравнений записываются как

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \ (i, j = 1,2,3) \qquad (11.7)$$

Здесь и ниже применяется соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. Подставив (11.7) в уравнение равновесия (11.5) и учитывая (11.6), получим систему разрешающих уравнений, эквивалентную (11.4)

$$\sum_{i=1}^{3} d_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_l}+\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_i \partial x_k}\right)+x_j=0\left(\rho\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}\right), \tag{11.8}$$

к которой необходимо присоединять граничные условия, задаваемые в напряжениях на части S_1 боковой поверхности континиуума

$$P_{(n)i}=\sigma_{ij}l_j \tag{11.9}$$

в перемещениях на части S_2, поверхности S континиуума

$$U_i(S_2)=U_{s2i}, \tag{11.10}$$

где U_{s2i} – проекции вектора перемещения, принимающего постоянные значения в точках S_2 поверхности. Например, $U_{s2i}=0$ в точках закрепления.

Прежде чем сформулировать разрешающие уравнения вторым способом, введем некоторые понятия. Для этого рассмотрим тело с объемом V, ограниченного поверхностью S и находящегося под действием внешних объемных F и поверхностных $p(n)$ сил в равновесии. Условия на поверхности тела определяются соотношениями (11.9) и (11.10) для части S_1 и S_2 соответственно.

Перемещения U_i, при которых тело находится в равновесии, назовем истинными перемещениями. Наряду с истинными перемещениями имеют место геометрически возможные перемещения, подчиняющиеся граничным условиям (11.10). Очевидно существует бесконечное множество систем геометрически возможных перемещений, причем каждой такой системе перемещений соответствует некоторое напряженное состояние с тензором напряжений (σ), который можно определить по уравнению (11.6). Любой тензор (σ), компоненты которого удовлетворяют внутри объема V, занятого телом, уравнениям равновесия (11.5) и граничным условиям (11.9) на части S_1 поверхности, назовем тензором статически возможных напряжений. Очевидно, что множество тензоров

статически возможных напряжений содержит в себе и тензор (σ), которому соответствует система истинных перемещений. Если компоненты тензора напряжений (σ) удовлетворяют уравнениям равновесия (11.5), граничным уравнениям (11.9), а также уравнениям совместности деформаций (при использовании деформационной модели железобетона), тогда тензор (σ) назовем тензором истинных напряжений.

Составляем интеграл $\int_s p_i(n)\overline{U}_i ds$, распространенный по поверхности S тела, в котором $\overline{U}_i$ геометрически возможные перемещения. В силу (11.9) можем записать:

$$\int_{Vs} p_i(n)\overline{U}_i ds = \int_s \overline{\sigma}_{ij} n_j \overline{U}_i ds,$$

где n_j – нормаль к поверхности тела.

Учитывая преобразование

$$\int_s \overline{\sigma}_{ij} n_j \overline{U}_i ds = \int_v \left(\overline{U}_i \nabla_j \overline{\sigma}_{ij} + \overline{\sigma}_{ij} \nabla_j \overline{U}_i\right) dV$$

и уравнения равновесия (11.5), получим равенство

$$\int_s \overline{\sigma}_{ij} n_j \overline{U}_i ds = \int_v \overline{\sigma}_{ij} \nabla_j n_j \overline{U}_i dV - \int_v \left(x_i - \rho \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial t^2}\right) \overline{U}_i dV.$$

В результате приходим к интегральному соотношению

$$\int_v \sigma_{ij} \nabla_j \overline{U}_i dV = \int_v \left(x_i - \rho \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial t^2}\right) \overline{U}_i dV + \int_{s1} p_i(n) U_i ds + \int_{s2} \sigma_{ij} n_j U_i ds. \qquad (11.11)$$

Соотношение (11.11) лежит в основе формулировки вариационных принципов. Теперь представим геометрически возможное перемещение в виде

$$\overline{U}_i = U_i + SU_i, \qquad (11.12)$$

где U_i – истинные перемещения, SU_i – произвольные геометрически возможные бесконечно малые их изменения (вариации перемещений). Так как U_i удовлетворяют граничным условиям (11.10), то на части S_2 поверхности $SU_i = 0$. Подставив (11.12) в (11.11), получим разрешающие уравнения второго способа в виде

$$\int_v \bar{\sigma}_{ij} \nabla s U_i dV = \int_v \left(x_i - \rho \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial t^2} \right) S U_i dV + \int_{s1} p_i(n) S U_i ds. \qquad (11.13)$$

При рассмотрении статических задач соотношение (11.13) принимает вид

$$\int_v \sigma_{ij} \nabla_j S U_i dV = \int_v x_i S U_i dV + \int_{s1} p_i(n) S U_i ds, \qquad (11.14)$$

в котором левая часть представляет собой изменение энергии деформации континиуума

$$\delta U = \int_v \sigma_{ij} \nabla_j S U_i dV = \int_v \sigma_{ij} S \varepsilon_{ij} dV,$$

а правая часть – работа внешних сил. Полученное уравнение (11.14) указывает на то, что сумма работ внешних сил на произвольных возможных вариациях перемещений равна вариации полной энергии деформаций континиуума, соответствующей вариациям перемещений.

Полученные разрешающие уравнения (11.4), (11.8) и (11.13) можно записать в другом виде, выбрав в качестве основных неизвестных функций – напряжения. Однако изложение настоящего раздела построено на рассмотрении решения в перемещениях, как наиболее распространенного в настоящее время, хотя это не исключает применение рекомендуемых приемов для методов типа метода сил.

Для большинства практических задач решения (11.4), (11.8) или (11.13) в замкнутом виде получить трудно, а иногда и просто невозможно, так как помимо чисто математических проблем, связанных с решением систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникает проблема нелинейности таких уравнений, обусловленная зависимостью (11.3).

Как следует из разделов 8 и 10 эти зависимостями являются неаналитическими зависимостями нелинейного вычислительного оператора, который позволяет записать элементы матрицы жесткости для железобетона в виде матрицы упругости анизотропного материала. Однако элементы этой матрицы не являются константами, а зависят, в общем случае, от достигнутого уровня напряженно-деформированного состояния и схемы трещин. Кроме того, следует помнить, что в отличии от упругопластического тела, деформирование железобетонного континиуума не подчиняется гипотезам простого нагружения,

единой кривой, активного и равновесного нагружения. Все это определяет специфику методов решения нелинейных задач железобетонного континиуума.

11.3 Общие методы решения

Для получения замкнутых решений (11.4), (11.8) или (11.13) с использованием нелинейной зависимости (11.3) применяют различные варианты метода последовательных приближений. Решение нелинейных задач теории железобетона сводится к решению последовательности линейных задач, каждая из которых может быть интерпретирована как некоторая задача теории упругости (метод упругих решений).

Последовательность линейных задач, к которым сводится исходная нелинейная задача, решается, как правило, численными методами: методом конечных элементов (МКЭ), методом конечных разностей (МКР) или вариационно-разностным методом (ВРМ). Применение численных методов вызвано неаналитическим характером зависимости (11.3), а также анизотропными свойствами железобетонного массива. В настоящем разделе наибольшее внимание уделено (МКЭ), хотя принципиального значения выбор метода решения линейной задачи не имеет, важно, чтобы он учитывал особенности принятой для расчета физической модели материала.

11.4 Метод упругих решений для нелинейных задач теории железобетона

Один из основных методов решения нелинейных задач теории железобетона – метод упругих решений. Под этим термином здесь понимается совокупность методов, в которых решение нелинейной задачи ищется в виде сходящейся последовательности линейных решений. Поставленную выше задачу для систем уравнений (11.4), (11.8) или (11.13) запишем, введя в рассмотрение номер итерации «k».

$$F_{ij}\left(d^{k}_{ijmn}, \sigma^{k}_{mn}, \varepsilon^{k}_{mn}\right) = 0, \tag{11.15}$$

где

$$d_{ijmn} = \begin{cases} d^{k}_{ijmn} = d^{k}_{ijmn}\left(\sigma^{k-1}_{mn}\right) & (а) \\ d_{ijmn} = d^{k}_{ijmn}\left(\varepsilon^{k-1}_{mn}\right) & (б) \end{cases} \tag{11.16}$$

,

т.е. на каждой итерации матрица жесткости материала вычисляется по результатам предыдущего решения, что позволяет рассматривать компоненты матрицы жесткости постоянными в пределах одной итерации. В рамках метода упругих решений уравнение (11.15) – запись физических соотношений (11.3) или (11.7). С учетом этого, системы (11.4), (11.8) или (11.13) можно формально представить в виде

$$\Phi_{ij}\left(d^{k}_{ijmn}, U^{k+1}, P\right) = 0, \qquad (11.17)$$

где $\Phi_{ij}\{..\}$ – некоторые операторы от указанных функций.

В рамках метода упругих решений разрешающее уравнение (11.17) – система линейных дифференциальных уравнений упругой задачи. На каждой итерации необходимо решать задачу о деформировании анизотропного континиуума. В сочетании с неаналитической зависимостью для жесткостей это определяет применение в основном дискретных методов решения задач: метода конечных элементов, метода конечных разностей и др.

Общий алгоритм решения задач методом упругих решений основан на аналогии между деформированием железобетона и упруго-пластических тел. Для последних доказано, что при соблюдении некоторых гипотез решение неупругой (нелинейной) задачи может быть заменено решением нелинейной упругой задачи. В свою очередь решение нелинейно упругой задачи можно получить как решением линейной: с переменными модулями упругости, начальными напряжениями и др. Соответственно и модификации метода упругих решений носят такие же наименования.

Для упруго-пластических тел при одноосном деформировании получено доказательство сходимости метода упругих решений при определенных ограничениях на кривизну кривой деформирования и при условии ее непрерывности и дифференцируемости. Сходимость метода упругих решений для железобетона с трещинами основывается на практике применения этого метода для решения задач и на применении ряда приемов ускорения сходимости, изложенных далее.

11.5 Метод переменных параметров упругости. Слабоитерационный метод переменных параметров упругости на приращениях нагрузки

Решение задачи сводится к процессу последовательных приближений с переменными параметрами упругости, определяемыми по формулам (11.16). В первом приближении полагают, что переменные параметры упругости равны начальным значениям и решение задачи сводится к решению обычной линейной задачи теории упругости. По решению линейной задачи определяются компоненты тензора напряжений σ_{ij}^1 и деформаций ε_{ij}^1 в первом приближении. Затем по формулам (11.16) в каждой точке континиуума определяются параметры $d_{ij\,mn}^1$. Зная эти параметры, решают задачу во втором приближении с использованием полученных значений $d_{ij\,mn}^1$ и определяют напряжения σ_{ij}^2 и деформации ε_{ij}^2.

Расчеты продолжают до тех пор, пока полученные результаты расчетов n-го приближения не будут отличаться от результатов расчетов $(n-1)$-го приближения на заданную величину с требуемой точностью.

Для упруго-пластического деформирования доказана сходимость такой процедуры, причем при выражении переменных параметров через деформации процесс последовательных приближений дает приближение сверху, и при пересчете параметров через напряжения процесс сходится к двухсторонним приближениям.

К недостаткам метода переменных параметров упругости относится то, что на каждой итерации приходится каждый раз решать системы линейных уравнений, а это самая трудоемкая операция в алгоритме. Улучшить сходимость этого метода можно также, применив его модификацию, известную в литературе под названием метода дополнительных нагрузок.

Для улучшения сходимости и снижения числа итераций можно использовать метод упругих решений на конечных приращениях. В этом случае нагрузка разбивается на несколько частей с точками 0, 1, 2, …, 5. Сначала находится решение для начального отрезка 0 – 1. При слабой нелинейности на

этом отрезке итерации практически исключаются. Состояние в точке 1 принимается за исходное. Затем рассматривается дополнительное напряженное состояние на отрезке 1 – 2. Расчет на приращении нагрузки 1 – 2 сводится к слабоитерационной или безитерационной процедуре. Затем за начальное состояние принимается нагружение приращением нагрузки в точке 2 на приращении 2 – 3. Решение на 2 – 3 тоже сводится к слабоитерационной процедуре (1 – 2 итерации). Таким образом доходим до полной нагрузки (условно в точке 5). Для этого метода физические соотношения сводятся к физическим соотношениям на соответствующих приращениях нагрузки (к физическим соотношениям на приращениях).

11.6 Метод начальных напряжений

Этот метод применяется, когда разрешающая система уравнений составлена в напряжениях и компоненты матрицы жесткости материала выражены через деформации, т. е. в виде (11.16,а). В этом случае искомые напряжения представляются в виде разности

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{\text{упр}}\} - \{\sigma^{\text{доп}}\}, \tag{11.18}$$

где $\sigma^{\text{упр}}$ – напряжения в соответствующей упругой задаче;

$\sigma^{\text{доп}}$ – дополнительные напряжения, корректирующие решение исходной неупругой задачи.

Дискретизированную разрешающую систему уравнений, полученную аппроксимацией систем (11.4), (11.8) или (11.13) конечными элементами или конечными разностями, можем записать:

$$[k(x)]\{x\} = \{R\}, \tag{11.19}$$

где $\{x\}$ – вектор-столбец неизвестных усилий или перемещений, определяется спецификой выбранного метода;

$[k(x)]$ – матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений;

$\{R\}$ – вектор-столбец усилий.

С учетом (11.18) преобразуем (11.19) к виду:

$$[k]\{\sigma^{\text{упр}}\} = \{\mathrm{R}\} + [\mathrm{k}]\{\sigma^{\text{доп}}\}. \tag{11.20}$$

Если принять, что слагаемые, возникшие из-за наличия дополнительных членов в (11.18) и перенесенных в правую часть (11.20), известны, то получим как бы систему уравнений теории упругости с дополнительными усилиями. В первом приближении полагаем, что все дополнительные усилия равны нулю. Тогда приходим к обычной задаче теории упругости, при решении которой определяются упругие напряжения (точка 1 на рисунке 11.1).

По начальным значениям матрицы жесткости и упругим напряжениям вычисляются деформации, одинаковые как для упругого, так и неупругого тела (ε_1 на рисунке 11.1). По значениям полученных деформаций подсчитываются компоненты матрицы жесткости железобетона, а по ним вычисляются напряжения в неупругом состоянии.

Полученные значения напряжений, вообще говоря, и есть искомое решение задачи, однако эти напряжения не решение разрешающей системы, поэтому процесс последовательных приближений продолжается до удовлетворительной сходимости (точки 2–5 на рисунке 11.1). Таким образом, процедуру метода можно представить

$$\left.\begin{aligned}
&\{\sigma^{\text{доп}}\}_n = \{\sigma^{\text{упр}}\}_n - \{\sigma\}_n, \quad \{\sigma^{\text{доп}}\}_{n=1} = 0;\\
&[\mathrm{k}]\{\sigma^{\text{упр}}\}_{n+1} = \{\mathrm{R}\} + [\mathrm{k}]\{\sigma^{\text{доп}}\}_n;\\
&\{\varepsilon\} = [\mathrm{d}]^{-1}\{\sigma^{\text{упр}}\}_{n+1}, \quad [d] = [d(\varepsilon)];\\
&\{\sigma\}_{n+1} = [d]\{\varepsilon\}_{n+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.21)$$

С вычислительной точки зрения метод начальных напряжений значительно экономней метода переменных параметров упругости. При решении разрешающего уравнения один раз образуется матрица $[k]$ и запоминается. Все дальнейшие решения получаются умножением обращенной матрицы на столбец свободных членов, при формировании которого производятся операции только с матрицами жесткости материала. Для упруго-пластических тел процесс сходится к искомому решению снизу. Для железобетонного континиуума (при использовании модели с трещинами) процесс может расходиться.

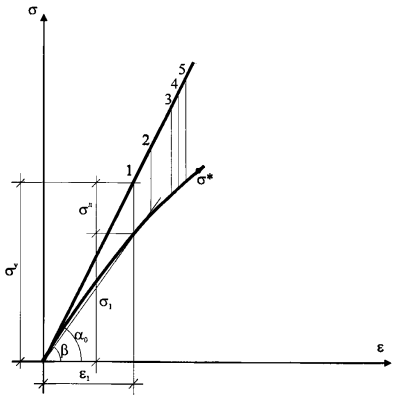


Рисунок 11.1 – Метод начальных напряжений

Для улучшения сходимости можно предложить следующее. При нагрузках, больших нагрузок образования трещин, в процессе решения необходимо проводить пересчет начальной матрицы $[K]$. Таким образом процедура будет содержать некоторую комбинацию методов начальных напряжений и переменных параметров упругости.

11.7 Критерии сходимости

Процесс последовательных приближений считается законченным, если его результаты соответствуют некоторому критерию сходимости. В методе упругих решений основной критерий – критерий по перемещению. Так как критерий сходимости – величина безразмерная, он приводится к безразмерному виду делением на эталонную величину:

$$r_{\text{эт}} = \begin{cases} \max|r_i| \\ \dfrac{1}{N}\sum_i |r_i| \end{cases}, \qquad (11.22)$$

где $\max|r_i|$ – максимальная величина перемещения;

$\dfrac{1}{N}\sum_i |r_i|$ – средняя абсолютная величина.

Такой прием позволяет применять единые значения погрешностей.

Проверка сходимости может быть записана так:

$$\|x\| \le \varepsilon,$$

где $\|x\|$ – норма невязки;

ε – константа $\left(10^{-2} \le \varepsilon \le 10^{-6}\right)$.

В качестве норма невязки могут выступать:

- октаэдрическая норма

$$\|x\|_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\Delta r_i}{r_{эт}}\right|, \tag{11.23}$$

- евклидова норма

$$\|x\|_2 = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Delta r_i}{r_{эт}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11.24}$$

- Чебышевская норма

$$\|x\|_3 = \max\left|\frac{\Delta r_i}{r_{эт}}\right|, \tag{11.25}$$

здесь $1 \le i \le N$ – номер компоненты решения;

Δr_i – разность компонент решения между текущей и предыдущей итерациями.

Если процесс сходится по одной норме, то он сходится и по любой другой норме. Выбор нормы определяет скорость сходимости. При равных условиях наибольшую скорость сходимости дает Евклидова норма, наименьшую – Чебышевская норма.

11.8 Численные методы решения задач

Могут быть выделены четыре основных метода: метод конечных разностей (МКР). Вариационно-разностный метод (ВРМ), метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). В расчетах железобетонных конструкций наибольшее распространение получили два метода: МКР и МКЭ.

11.9 Метод конечных разностей (МКР)

Метода конечных разностей связан с непосредственной реализацией разностного оператора, соответствующего исходному дифференциальному уравнению задач. Эта процедура осуществляется на множестве точек (узлов) внутри области конструкции, в результате формируется система уравнений с матрицей коэффициентов, на полученную систему накладываются и граничные условия. Эти уравнения решаются прямым методом, если задача линейная, после чего итерациями для нелинейных случаев.

Применяемые разностные схемы должны соответствовать следующим требованиям: иметь определенный порядок аппроксимации, сходиться к решению исходных дифференциальных уравнений, быть устойчивыми и однородными.

Особенности применения МКР к расчету железобетонных элементов – нелинейный и разрывной характер их жесткости, что приводит к нелинейным и разрывным коэффициентам в дифференциальных уравнениях и их аппроксимациях. При этих условиях определяющее значение приобретает построение устойчивых, сходящихся и однородных разностных операторов. Под однородностью разностной схемы, когда для всех узлов разрешающее уравнение формируется по единообразному оператору, даже если эти узлы находятся вблизи функции жесткости.

Решение методом конечных разностей предлагает следующие этапы:

- формирование разностной сетки;
- формирование разностных операторов разрешающих уравнений;
- учет граничных условий;
- решение системы уравнений;
- вычисление усилий по перемещениям.

11.10 Разностные сетки, применяемые в МКР

Для расчета с помощью МКР на рассматриваемый континиуум наносится разностная сетка.

Рассмотрим функцию $f(x,y,z)$ и запишем выражения для производных этой функции через ее значения в узлах сетки с помощью конечных разностей. При

этом могут потребоваться, в зависимости от конкретных условий, кроме основных узлов, еще и вспомогательные узлы. Хотя при применение таких узлов порядок погрешности $0(h^2)$ не изменяется, но ошибка при этом будет меньше. Разности могут быть односторонние и центральные. Для примера приведем отдельные формулы для конченых разностей в виде (11.26), соответствующие рисунку. 11.2.

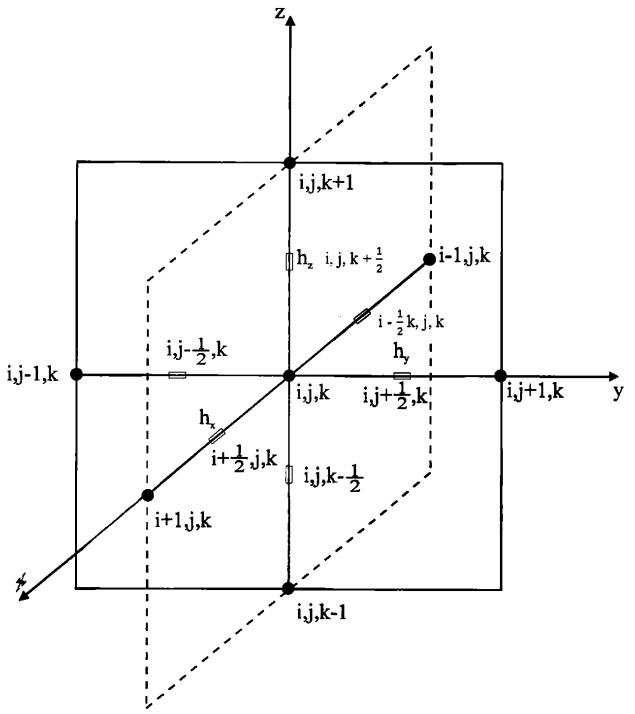


Рисунок 11.2 – ● - основные узлы, □ - вспомогательные узлы

$$\left.\begin{aligned} f^x_{i,j,k} &\approx \frac{1}{2h_x}\left(f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}\right) \\ f^y_{i,j,k} &\approx \frac{1}{2h_y}\left(f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}\right) \\ f^z_{i,j,k} &\approx \frac{1}{2h_z}\left(f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k-1}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (11.26)$$

где $f^x_{i,j,k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f^y_{i,j,k} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f^z_{i,j,k} = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

В случае использования вспомогательных узлов преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned} f^x_{i,j,k} &\approx \frac{1}{h_x}\left(f_{i+\frac{1}{2},j,k} - f_{i-\frac{1}{2},j,k}\right) \\ f^y_{i,j,k} &\approx \frac{1}{h_y}\left(f_{i,j+\frac{1}{2},k} - f_{i,j-\frac{1}{2},k}\right) \\ f^z_{i,j,k} &\approx \frac{1}{h_z}\left(f_{i,j,k+\frac{1}{2}} - f_{i,j,k-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (11.27)$$

Таким же образом выводятся частные производные высших порядков.

11.11 Общие принципы построения разрешающей системы уравнений

Существуют два способа построения системы разрешающих уравнений с использованием законтурных узлов и без них. При первом методе разрешающее уравнение составляется для всех узлов, включая контурные, для контурных же узлов записываются дополнительные граничные условия. Достоинство использования законтурных точек – однородность всей системы и, как следствие, меньшая трудоемкость при программировании. Недостаток такого подхода – увеличение размерности решаемых задач. Если отказаться от использования законтурных узлов, то разрешающие уравнения записываются только для внутриконтурных узлов, причем для предконтурных узлов приходится применять односторонние разности. Для контурных узлов записываются граничные условия. Такой подход, при уменьшении размерности, требует большей трудоемкости, нарушается однородность схемы, а также ухудшается обусловленность разрешающей системы уравнений. Поэтому метод с применением законтурных неизвестных представляется более предпочтительным.

Для построения устойчивой разностной схемы используется метод последовательного дифференцирования. Определяющее дифференциальное уравнение (уравнения равновесия для метода перемещений, уравнение совместности деформаций для метода сил) расписывается в конечных разностях для характерного узла сетки. Затем значение функций разрешающих уравнений в узлах заменяется их разностным представлением из физических уравнений.

Получается разностный оператор, аппроксимирующий исходное дифференциальное уравнение. Совокупность узлов конечно-элементной сетки, разностного оператора называется шаблоном. При построении разностных схем для заданного порядка аппроксимации следует использовать минимальный шаблон, т.е. включать в разрешающее уравнение минимальное число узлов.

11.12 Метод конечных элементов (МКЭ). Общая характеристика метода

Принципиальная сущность конечно-элементарного анализа континуального тела заключается в следующем:

- исследуемая область делится воображаемой сеткой дискретизации на некоторое число конечных элементов, которые предполагаются взаимосвязанными в конечном числе узловых точек, расположенных на границах элементов. Обобщенные перемещения этих точек (их число неразрывно связано с принятым числом степеней свободы каждой узловой точки) представляют собой основные неизвестные параметры решаемой задачи, по аналогии с классическим методом перемещений;

- вводятся функции обобщенных перемещений, определяющие их распределение внутри каждого элемента через узловые обобщенные перемещения. Указанные функции однозначно определяют поле деформаций и усилий внутри элемента, в том числе на границах;

- на основании принципа возможных перемещений строится так называемая матрица жесткости элемента, посредством которой сосредоточенные реакции в узлах элемента, уравновешивающие распределенные нагрузки и усилия на его границах, выражаются через обобщенные узловые перемещения;

- матрицы жесткости отдельных элементов позволяют сформировать матрицу жесткости конструкции в целом, в результате чего задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений, определяющих вместе с выбранными функциями перемещений отдельных элементов напряженно-деформированное состояние всей конструкции.

Таким образом решение задачи нахождения напряженно-деформированного состояния тела легко алгоритмизируется с помощью МКЭ. Этим и объясняется широкое распространение МКЭ, вычислительные операции которого легко программируются и сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

11.13 Выбор функций формы, построение матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) и разрешающей системы уравнений

Выбор функций формы зависит от ряда факторов, в том числе от формы КЭ и их размеров. Форма и размеры КЭ определяются размерами и формой рассчитываемого тела, условиями его закрепления, характером нагрузки и особенностями самого тела: наличием отверстий, щелей, вырезов и т.д.

Определяем вектор перемещений элемента $\{q\}^e$ в виде совокупности векторов перемещений каждого узла $\{q\}_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Перемещение $\{\overline{U}\}$ точек КЭ выражаем через узловые перемещения посредством функций формы

$$\{\overline{U}\}=[H]\{q\}^e \tag{11.28}$$

Функция формы должна соответствовать ряду требований, в том числе она должна быть такой, чтобы обеспечивать непрерывность деформаций по совокупности элементов и быть равной узловому перемещению при подстановке в нее координат узла.

Деформации точек внутри элемента с помощью функций формы выражаются через узловые перемещения

$$\{\varepsilon\}=[B]\cdot\{q\}^e. \tag{11.29}$$

Вектор обобщенных напряжений выражается через деформации стандартным образом при отсутствии начальных деформаций и напряжений

$$\{\sigma\}=[D^*]\{\varepsilon\}, \tag{11.30}$$

где $[D^*]$ – матрица жесткости материала, определенная для железобетона в самом общем случае как матрица анизотропного материала с коэффициентами, зависящими от усилий, однако в пределах упругого расчета по одному из методов упругих решений, эти коэффициенты принимаются постоянными в пределах

каждого КЭ (или меняются по заданному закону, зависящему от числа точек КЭ, в которых вычисляются $[D_i^*]$).

Для объединения конечных элементов в ансамбль, отражающий совместность перемещений во всех узлах системы необходимо для каждого элемента уметь вычислять реакцию в любом узле по любой степени свободы от любого единичного узлового перемещения. Эти единичные реакции – коэффициенты матрицы жесткости элемента. Эта матрица строится на основе вариационных принципов и имеет вид

$$[K]^e = \iint_v [B]^T [D^*][B] dV . \qquad (11.31)$$

Для каждого конечного элемента между перемещениями узлов и узловыми усилиями существует следующая связь

$$\{R\}^e = [K]^e \{q\}^e , \qquad (11.32)$$

где $\{R\}^e$ – вектор узловых сил по структуре аналогичный вектору узловых перемещений.

Вектор $\{R\}^e$ зависит от характера нагрузки и выбранной функции формы и вычисляется по формуле

$$\{R\}^e = \iint_v [H] \{P\}^e dV , \qquad (11.33)$$

где $\{P\}^e$ – внешняя нагрузка.

Далее следует процедура объединения КЭ (ансамблирование), суть которой сводится к приравниванию работы внутренних и внешних сил в узлах. При этом получается глобальная матрица жесткости:

$$[K] = \sum_{i=1}^{n} [K]^e ; \qquad (11.34)$$

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{n} [R]_i^e , \qquad (11.35)$$

где n – число КЭ.

В итоге получается разрешающая система уравнении МКЭ

$$[K]\{q\} = \{R\}. \qquad (11.36)$$

Учет кинематических граничных условий проводится после составления разрешающей системы уравнений. Если какое-то перемещение в каком-либо узле задано (в частности равно нулю), то система уравнений (11.36) соответственно модифицируется.

После решения (11.36), по (11.29) вычисляются деформации, по (11.30) напряжения в КЭ. Эти величины – решение задачи на K – итерации метода упругих решений, если речь идет о расчете железобетонных конструкций.

11.14 Условия совместности

Чем больше степеней свободы имеет конструктивная система (в частности элементы принимаются более мелкие), тем точнее будет приближенное решение. Такое решение в пределе стремится к точному, соответствующему истинному равновесию. Число степеней свободы не ограничивается функцией формы $[H]$. Чтобы гарантировать сходимость процесса к точному, необходимо удовлетворять определенным критериям сходимости:

- функция формы должна быть выбрана, чтобы при смещении тела как жесткого целого в нем отсутствовали бы деформации;

- функция формы должна обеспечивать постоянство деформаций при соответствующих перемещениях;

- на границах элементов должна быть обеспечена непрерывность перемещений и их производных на порядок ниже, чем производные, входящие в формулу (11.31).

11.15 Объемные изопараметрические элементы

Пусть m – число узлов, которые аппроксимируют перемещения точек КЭ, а n – число узлов, определяющих геометрию КЭ. Конечные элементы классифицируют по этим двум параметрам следующим образом:

$m = n$ – изопараметрический КЭ (рисунок 11.3, а);

$m > n$ – субпараметрический КЭ (рисунок 11.3, б);

$m < n$ – субпараметрический КЭ (рисунок 11.3, в).

Наиболее распространенные из этих КЭ – изопараметрические, ввиду простоты их реализации.

Вводятся две системы координат: локальная (r,s,t) или (x,y,z) и глобальная (X,Y,Z). Координаты и перемещения изопараметрических элементов могут быть определены в форме:

$$r=\sum_{i=1}^{n}h_i r_i;\quad s=\sum_{i=1}^{n}h_i s_i;\quad t=\sum_{i=1}^{n}h_i t_i; \tag{11.37}$$

$$U=\sum_{i=1}^{m}h_i U_i;\quad V=\sum_{i=1}^{m}h_i V_i;\quad W=\sum_{i=1}^{m}h_i W_i; \tag{11.38}$$

где r_i,s_i,t_i – локальные координаты узлов;

h_i – интерполяционные функции;

U_i,V_i,W_i – перемещения узлов.

Заметим, что обычно функции h_i задаются в локальной системе координат. В формулу (11.31) величина dV была введена безотносительно системы координат. Теперь уточним, что

$$dV = detU \quad drdsdt, \tag{11.39}$$

$$U=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial Y}{\partial s} & \dfrac{\partial Z}{\partial s} \\ \dfrac{-\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial Y}{\partial t} & \dfrac{\partial Z}{\partial t} \end{bmatrix}, \tag{11.40}$$

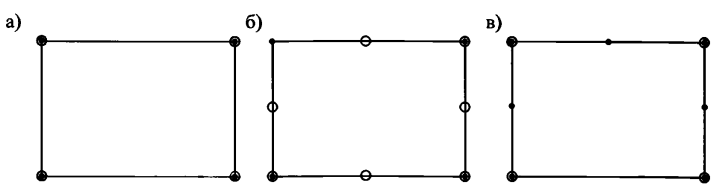


Рисунок. 11.3 – • – узлы, определяющие перемещения точек КЭ

○ – узлы, определяющие геометрию КЭ

где U – матрица Якоби.

С учетом (11.39) из (11.31) получается уравнение

$$[K]^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[0][B]\det U dr ds dt, \tag{11.41}$$

где $$[B]=[B_1, B_2 \ldots B_n] \tag{11.42}$$

здесь

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial t} \\ \frac{\partial h_i}{\partial r} & \frac{\partial h_i}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial s} & \frac{\partial h_i}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial t} \end{vmatrix} \tag{11.43}$$

Примеры объемных изопараметрических КЭ приведены на рисунке 11.4.

Из базового КЭ могут быть получены путем простого совмещения узлов другие виды КЭ, что особенно важно. Примеры КЭ приведены на рисунке 11.4. При этом пределы интегрирования остаются теми же. Функции формы совмещенных узлов складываются. Покажем на примере. Возьмем элемент из рисунка 11.4 и совместим попарно узлы 1–5, 2–6, 3–7, 4–8. В результате получается:

$$\begin{aligned} H_1 &= h_1 + h_5 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s); \\ H_2 &= h_2 + h_6 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s); \\ H_3 &= h_3 + h_7 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s); \\ H_4 &= h_4 + h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s). \end{aligned} \tag{11.44}$$

Легко заметить, значения H_i в (11.44) представляют функции формы для плоского изопараметрического КЭ. Более того, совместив H_1 и H_2, H_3 и H_4, получим функции формы одномерного двухузлового изопараметрического КЭ

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1+s); \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}(1-s). \tag{11.45}$$

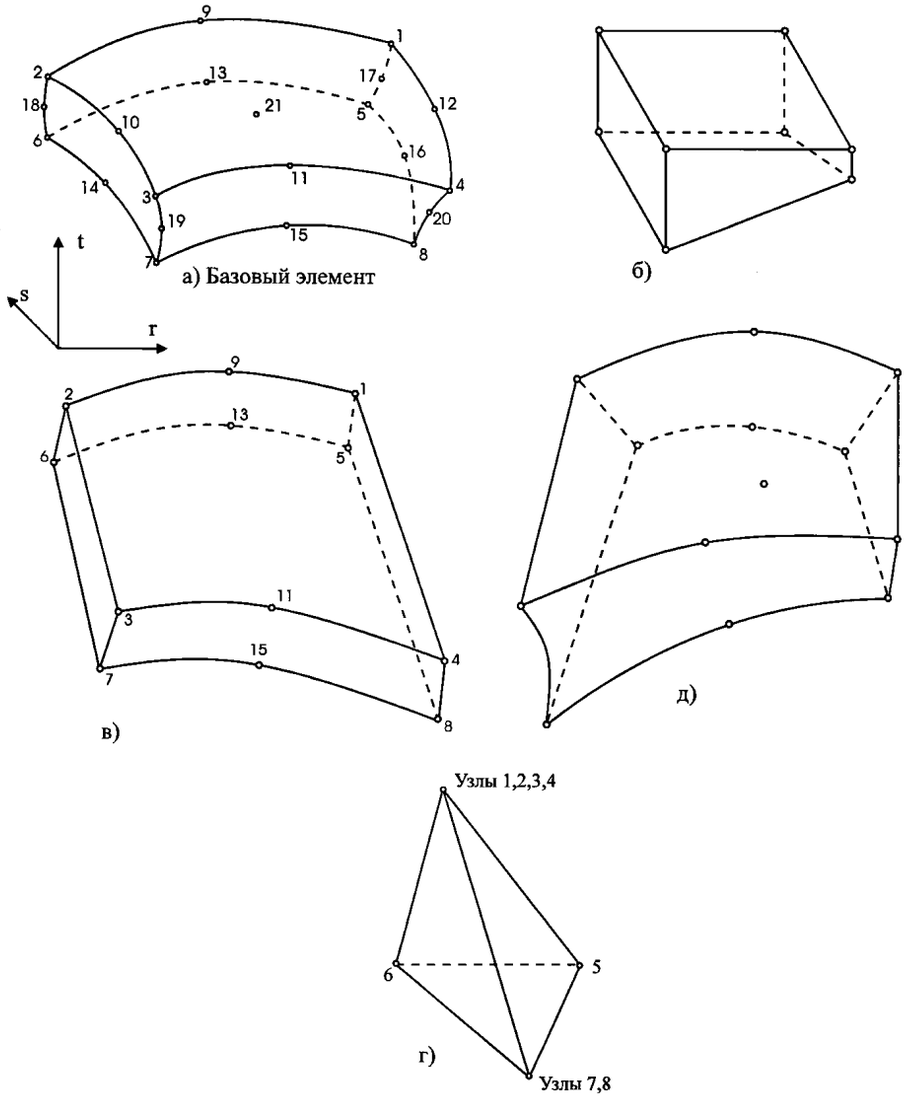
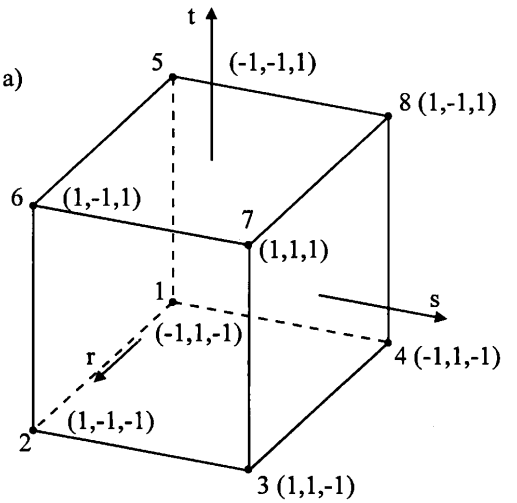
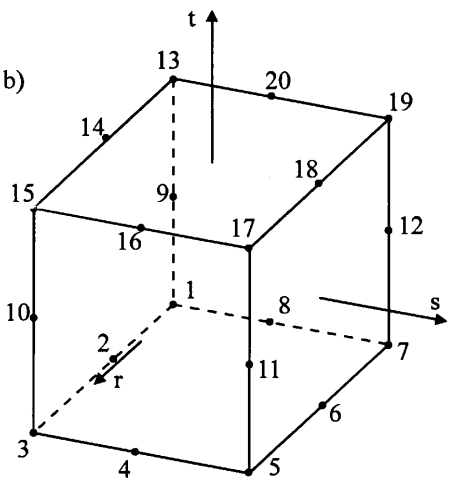


Рисунок 11.3 – Виды трёхмерных элементов



$$h_i = \frac{1}{8}(1+r_0)(1+s_0)(1+t_0),\ i=1,2,\ \ldots\ 8$$



$$h_i = \frac{1}{8}(1+r_0)(1+s_0)(1+t_0)(r_0+s_0+t_0-2),\quad i=1,3,5,7,13,15,17;$$

$$h_i = \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s_0)(1+t_0),\qquad i=2,6,14,18;$$

$$h_i = \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r_0)(1+t_0),\qquad i=4,8,16,20;$$

$$h_i = \frac{1}{4}(1-t^2)(1+r_0)(1+s_0),\qquad i=9,10,11,12;$$

a – 4-узловой, b – 20-узловой

$$r_0 = r_i r,\quad s_0 = s_i s,\quad t_0 = t_i t,$$

где *r, s, t* – текущие координаты, r_i, s_i, t_i – координаты узлов

Рисунок 11.4 – Объемные изопараметрические элементы

Заметим, что вычисление интеграла (11.41) в явном виде в большинстве случаев затруднительно или невозможно. Обычно это интегрирование производят численно.

11.16 Численное интегрирование

Одна из эффективных процедур численного интегрирования – использование квадратурных формул Гаусса. В этом случае применяется n неравноотстоящих узлов (точек) интегрирования, позволяющих строить точные интегралы полиномов $(2n\text{-}1)$-й степени. Коэффициенты полиномов численного интегрирования (коэффициенты Гаусса-Лежандра) для числа точек интегрирования вдоль каждой из осей r, s, t от одной до четырех приведены в таблице 11.1.

Алгоритм численного интегрирования выражения (11.41) – это алгоритм вычисления тройного интеграла: раскрытие формулы начинается с внутреннего интеграла, считая переменные, соответствующие внешним интегралам, константами. При этом из (11.41) получаем

$$[K] = \sum\sum\left[H_i H_j H_k [B]^T [D][B] det U\right]. \qquad (11.46)$$

Установив порядок интегрирования (общее количество точек интегрирования вдоль осей r, s, t) и координаты i-й точки интегрирования в локальных координатных осях как абсциссы квадратуры Гаусса-Лежандра, вычисляем матрицу B_i (11.43). Аналогично вычисляются матрицы B_j для j-й точки интегрирования. Определив веса квадратуры (согласно таблице 11.1) и определитель «$detU$» по формуле (11.46), будем иметь подматрицу K_{ij} матрицы жесткости элемента. Пробегая по всем точкам интегрирования, сформируем полную матрицу K . Глобальная матрица жесткости системы образуется суммированием

$$K = \sum_{i}^{n} K_i , \qquad (11.47)$$

где K_i – матрица жесткости i-го элемента.

Выбор коэффициентов в таблице 11.1 определяется принятым порядком интегрирования. Следует иметь в виду, что порядок интегрирования заметно влияет на результаты расчета. Применяя полиномы высокого порядка, можно получать точные значения матриц. Однако, с ростом точек интегрирования увеличиваются и затраты на вычисления. Приемлемые решения можно получить и при более низких порядках интегрирования, допуская некоторые погрешности.

11.17 Пример формирования матрицы жесткости прямоугольного восьмиузлового изопараметрического элемента

Функции формы восьми узлового конечного элемента (рисунок 11.4 а) запишем согласно выражениям:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t); \quad n_5 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t); \\ n_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t); \quad n_6 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t); \\ n_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t); \quad n_7 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t); \\ n_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t); \quad n_8 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t). \end{aligned} \tag{11.48}$$

Для принятого в форме прямоугольного параллелепипеда элемента положим соотношения сторон $a = b = c = 1$. В этом случае определитель матрицы Якоби $detU = 1$, а соотношения между локальными и глобальными координатами запишутся как:

$$r = x/a = x; \quad s = y/b = y; \quad t = z/c = z. \tag{11.49}$$

Матрицу дифференциальных операторов (11.43) для первой точки интегрирования представим в виде:

$$B_1 = \begin{vmatrix} -r(1+s)(1+t) & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)s(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & (1-r)(1+s)t \\ (1-r)s(1+t) & -r(1+s)(1+t) & 0 \\ (1-r)(1+s)t & 0 & -r(1+s)(1+t) \\ 0 & (1-r)(1+s)t & (1-r)s(1+t) \end{vmatrix} \frac{1}{8} \tag{11.50}$$

Принимая порядок интегрирования ($n_r n_s n_t = 2\times 2\times 2$), согласно таблице 11.1 записываем координаты точек интегрирования:

$r = x = -0{,}5773502691896$; $s = y = -0{,}5773502691896$; $t = z = -0{,}5773502691896$.

Подставляя эти координаты в (11.50), получим матрицу B_1. Матрица дифференциальных операторов (11.43) для второй точки интегрирования запишется:

$$B_2 = \begin{vmatrix} -r(1+s)(1+t) & 0 & 0 \\ 0 & (1-r)s(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & (1-r)(1+s)t \\ (1-r)s(1+t) & -r(1+s)(1+t) & 0 \\ (1-r)(1+s)t & 0 & -r(1+s)(1+t) \\ 0 & (1-r)(1+s)t & (1-r)s(1+t) \end{vmatrix} \frac{1}{8}. \qquad (11.51)$$

Координаты второй точки интегрирования равны:

$r = x = -0{,}5773502691869$; $s = y = -0{,}5773502691896$; $t = z = -0{,}5773502691896$.

Аналогично вычисляются матрицы B_i для всех точек интегрирования. Имея матрицы дифференциальных операторов, вычисляются подматрицы K_{ij} для точек интегрирования по формуле уравнения

$$K_{ij} = \sum_N Wt_N B_i D B_j, \qquad (11.52)$$

где Wt_N – произведение весовых коэффициентов для соответствующих порядков интегрирования.

Произведения Wt для рассматриваемого случая представим в виде:

$$\begin{aligned} Wt_1 &= H_1H_1H_1; \quad Wt_5 = H_2H_1H_1; \\ Wt_2 &= H_1H_1H_2; \quad Wt_6 = H_2H_1H_2; \\ Wt_3 &= H_1H_2H_1; \quad Wt_7 = H_2H_2H_1; \\ Wt_4 &= H_1H_2H_2; \quad Wt_8 = H_2H_2H_2. \end{aligned} \qquad (11.53)$$

Таким образом формируется глобальная матрица жесткости системы.

Абсциссы и весовые коэффициенты квадратурных формул Гаусса-Лежандра

Таблица 11.1

Число точек интегрирования на грани элемента	Абсциссы квадратур Гаусса-Лежандра				Весовые коэффициенты квадратур Гаусса-Лежандра			
1	0	0	0	0	2	0	0	0
2	-0,57735027	+0,57735027	0	0	1	1	0	0
3	-0,77459667		+0,77459667	0	0,55555556	0,88888889	0,55555556	0
4	-0,86113631	-0,33998104	+0,33998104	+0,86113631	0,34785485	0,65214515	0,65214515	0,34785485

Библиография

[1] СНиП 2.03.01-84 Бетонные и железобетонные конструкции. М. 1988.

[2] Пособие по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций. - М.: Стройиздат, 1994.

[3] Кодекс-образец ЕКБ-ФИБ для норм по железобетонным конструкциям, 2004, 2010.

[4] Методическое пособие «Статически неопределимые железобетонные конструкции. Диаграммные методы автоматизированного расчета и проектирования». Федеральный центр нормирования, стандартизации и оценки соответствие в строительстве, М. 2017.

gost.e-ecolog.ru