МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТОВ НА ЭЛЕКТРОМОДЕЛЯХ

gost.e-ecolog.ru

МИНИСТЕРСТВО ЧЁРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ СССР
ГЛАВРУДА

Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт по осушению месторождений полезных ископаемых, специальным горным работам, рудничной геологии и маркшейдерскому делу
ВИОГЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТОВ НА ЭЛЕКТРОМОДЕЛЯХ

Белгород
1974

Настоящие указания составлены в лаборатории математического моделирования и электронно-вычислительных средств института ВИОГЕМ инженером Н.Т.Прокофьевым.

В работе приводится методика электромоделирования задач промерзания грунтов на моделях-аналогах R и RC-сетках, излагаются вопросы применения теории подобия к расчёту температурных полей в грунтах, показаны различные способы учёта скрытой теплоты льдообразования для случаев, когда $\Delta T_{кр}=0$ и $\Delta T_{кр}\neq 0$. Описан комбинированный способ решения задач, описываемых уравнениями типа теплопроводности, на RC-сетках.

Указания утверждены научно-техническим советом института ВИОГЕМ от 11 ноября 1971 г.

Научный редактор канд.техн.наук В.М.Чуйко.

© Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт по осушению месторождений полезных ископаемых, специальным горным работам, рудничной геологии и маркшейдерскому делу (ВИОГЕМ), 1974 г.

ВВЕДЕНИЕ

В гидротехническом и шахтном строительстве при проведении земляных работ в зимнее время, назначении глубин залегания фундаментов сооружений, разработке мероприятий по борьбе с пучинами на дорогах и в других случаях возникает потребность в научно обоснованном расчёте температурных полей во влажных грунтах.

При изучении вопроса расчёта промерзания грунтов наиболее перспективным является метод математического моделирования.

Математическая модель процесса промерзания грунта – это основные уравнения, описывающие явления, и уравнения для краевых условий. Эта модель в настоящей работе изучается с помощью электрической аналогии, когда соответствующее электрическое явление имеет такое же математическое описание.

Опыт показывает, что для решения задачи промерзания грунта эффективнее применять аналоговые вычислительные машины по сравнению с электронными цифровыми вычислительными машинами, хотя последние имеют принципиально неограниченные возможности. Это объясняется, с одной стороны, практически мгновенным быстродействием аналоговых машин и относительно небольшой потребной точностью решения данной инженерной задачи, с другой стороны, – большим объёмом работ по составлению программ для ЭЦВМ при решении нелинейных задач.

Из аналоговых вычислительных машин для решения нелинейных теплофизических задач (а задача промерзания грунтов относится к этому классу) нашли применение главным образом модели-аналоги, структурные же модели почти не применяются. Среди моделей-аналогов для расчёта нестационарных полей в промерзающих грунтах наиболее широкое распространение получили гидравлические интеграторы системы В.С.Лукьянова. Однако нельзя соглашаться с утверждением Б.А.Волынского [6], что они являются пока единственными, которые позволяют учитывать скрытую теплоту при исследовании тепловых процессов, ибо такие процессы могут быть изучены и на электрических моделях.

Однако электрические модели не нашли пока широкого применения для этих целей, несмотря на ряд их преимуществ перед гидравлическими (стабильность результатов, высокая точность, быстрота и удобство электрических измерений, сравнительно невысокая стоимость электромоделей, простота устройства и эксплуатации). Сказанное выше относится к электромоделям-сеткам омических сопротивлений, где задача решается по методу, предложенному Либманом [38], [39]. Метод Либмана позволяет решать задачи замораживания не только одномерные, но и двух- и трёхмерные.

Этот метод, однако, лишён наглядности и довольно трудоёмок (особенно для уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами). Кроме того, измерение потенциальной картины во времени ведется ручным измерительным устройством, что еще увеличивает время решения. Большой объём работ, производимых вручную, не позволяет применять этот метод для решения задач с большим количеством узловых точек.

Не нашел пока широкого применения для решения задач замораживания метод решения при помощи статического электроинтегратора, разработанного в проблемной лаборатории процессов горения и теплообмена Казахского университета группой Л.А.Вулиса и А.Т.Лукьянова. Удобство этого метода заключается в использовании подвижного счётного элемента, который может быть аналогом любого разностного оператора. Вместе с тем нужно отметить, что при этом методе требуется дополнительное цифровое устройство для использования итеративного метода решения.

На статическом электроинтеграторе Л.А.Вулиса и А.Т. Лукьянова можно реализовать самые различные конечно-разностные аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности.

Что касается электронных аналоговых математических машин на RC-сетках, то в Советском Союзе отсутствуют такие, на которых решаются в настоящее время подобные задачи и, как пишет один из авторов математической машины УСМ-1 Н.С.Николаев [28], было бы большим

достижением обеспечение возможности решения тепловых задач в средах с изменяющимся фазовым состоянием на этих машинах.

Во НИИУВМ (г.Пенза) в первой половине 60-х годов велись работы по созданию аналоговой математической машины на RC-сетках, способной решать задачи с фазовыми переходами [43]. К сожалению, эта машина не была создана. Такая машина была создана в США [40].

В настоящей работе предпринята попытка систематически изложить методику применения электромоделей R и RC-сеток для расчёта теплопередачи в промерзающих влажных грунтах.

Автор благодарит к.т.н. В.М.Чуйко - научного редактора, чьи советы и критические замечания содействовали улучшению формы и содержания пособия, а также инженера В.И.Ростовцева, оказавшего большую помощь при постановке задач на моделях и создании необходимых приборов.

Условные обозначения

T – температура, град С;
ΔT – перепад температур, град С;
τ – время, час;
q – плотность теплового потока, ккал/м^2 час;
λ – коэффициент теплопроводности, ккал/м час град;
c – удельная теплоёмкость, ккал/кг град;
C – объёмная теплоёмкость, ккал/м^3 град;
γ – удельный или объёмный вес, кг/м^3;
a – коэффициент температуропроводности, м^2/час;
α – коэффициент теплоотдачи, ккал/м^2 час·град;
W – влажность, доли единицы;
i – льдистость, доли единицы;
δ – теплота льдообразования, ккал/кг;
ω – источник тепла, ккал/м^3 час;
v – объём, м^3;
Q – количество тепла, ккал;
ξ – граница промерзания, м;
n – нормаль, м;
x, y – координаты, м;
h – интервал пространства, м;
e – масштаб;
$\alpha_{R,\tau}$ – масштабные коэффициенты перехода;
$T_э$ – полный период решения на УСМ–1, сек;
R – электрическое сопротивление, ом;
V – электрический потенциал, в;
J – сила тока, а;
$q_э$ – количество электричества, кул.

Индексы

n – момент времени;
0, 1, ..., 4 – номера узлов сетки;
о – внутренний узел;
п – поверхность;
с – среда;
м – максимальное значение;
н – начальное значение;
эф – эффективное;

т – тепловая система;
э – электрическая система;
τ – временное;
кр – кристаллизация.

Сокращения терминов

R – сетка – сетка сопротивлений;
RC– сетка – сетка сопротивлений и емкостей.

Глава 1

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ-СЕТКАХ ОМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

1.1. Математическая теория вопроса

В соответствии с задачей дать доступный для практики и в основном правильно учитывающий главные факторы метод расчёта промерзания влажного грунта следует [22]:

1) считать главным фактором, определяющим тепловой режим грунта, процесс теплопередачи, происходящий в нем как в "истинно твердом теле", т.е. в таком, в котором отсутствует перенос тепла за счёт взаимного перемещения отдельных частиц тела;

2) полагать возможным при исследовании теплового режима промерзшего влажного грунта в большинстве случаев не учитывать процесс миграции влаги. Наличие же влаги в грунте следует учитывать путем учёта выделяемого влагой тепла, при изменениях фазового состояния, и путём учёта изменения при этом теплофизических характеристик грунта;

3) различать случаи замерзания влаги в грунте при постоянной температуре, $\Delta T_{кр} = 0$, т.е. случаи промерзания грунта с образованием границы промерзания и случаи промерзания влаги в грунте в некотором диапазоне температур $\Delta T_{кр} \neq 0$, т.е. случаи промерзания грунта с образованием зоны промерзания.

При $\Delta T_{кр} = 0$ промерзают крупнозернистые грунты, например пески, размеры пор которых сравнительно велики и влага очень мало связана со скелетом грунта.

При $\Delta T_{кр} \neq 0$ замерзают пылеватые и глинистые грунты, размеры пор которых малы, и вода, заполняющая эти поры, находится в связанном состоянии.

Напишем для простоты одномерную математическую модель промерзания грунта с поверхности для случая $\Delta T_{кр} = 0$ [23]. Принимаем, что коэффициент теплопроводности и объёмная теплоёмкость C грунта меняются скачкообразно при переходе температуры через 0°C от значений при положительных температурах λ_2 и C_2 до величин,

соответствующих отрицательным температурам λ_1 и C_1. Замерзание всей термоактивной грунтовой влаги, сопровождающееся выделением скрытых теплот, происходит при 0°С.

Температурное поле в грунте в этом случае описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

на поверхности грунта

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_в - T_п), \qquad (1.1)$$

где $T_в$ – температура воздуха;

в мерзлой зоне

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \; ; \qquad (1.2)$$

в талой зоне

$$T_1 = T_2 = 0°C; \qquad (1.3)$$

на границе промерзания

$$T_1 = T_2 = 0°C. \qquad (1.4)$$

Перемещение этой границы во времени определяется уравнением

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_o \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \qquad (1.5)$$

где T – температура;

τ – время;

X – координата;

$\xi(t)$ – уравнение сдвижения границы раздела двух фаз;

Q_o – содержание скрытых теплот замерзания воды в единице объёма грунта.

Таким образом, задача о промерзании грунта в этом случае может быть сформулирована как задача о сопряжении двух температурных полей при наличии особого условия на движущейся границе раздела.

При промерзании грунта с поверхности с образованием

зоны промерзания, когда $\Delta T_{кр} \neq 0$, математическая модель для одномерного случая будет списываться так:

На поверхности грунта и в талой зоне уравнениями(1.1), (1.3) соответственно:

в мерзлой зоне

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) - C_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial q_л}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 0, \qquad (1.6)$$

где $q_л$ – количество льда в единице объёма грунта, кг/м^3;

δ – скрытая теплота льдообразования, ккал/кг.

Уравнение (1.6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) - \left(C_1 - \delta \frac{\partial q_л}{\partial T_1}\right) \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 0, \qquad (1.7)$$

Величину $-\delta \frac{\partial q_л}{\partial \tau_1} = C_{сп}$ называют спектральной объёмной теплоёмкостью, величину $\left(C_1 - \delta \frac{\partial q_л}{\partial T_1}\right) = C_{эф}$ – эффективной объёмной теплоёмкостью. С учётом этого уравнения (1.7) примет вид обычного уравнения типа Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) - C_{эф} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 0 \qquad (1.8)$$

В уравнении (1.8) параметры λ_1 и $C_{эф}$ являются функциями температуры.

Удобно считать, что функция $C_{эф}(T)$ распространяется и на область немерзлого грунта, принимая при этом значения для $T > T_{о,н}$, где $T_{о,н}$ – температура начала промерзания, $C_{эф} = C_2$, т.е. становится равной объёмной теплоёмкости талого грунта. После такого обобщения отпадает необходимость в особом рассмотрении зоны талого грунта, как это было выше (и зоны полностью промерзшего грунта, если бы это потребовалось), и дифференциальное уравнение процесса промерзания в этом случае дается в обычном виде, но $C_{эф}$ и λ не будут постоянными, а будут довольно сложными функциями от T:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial X}\right) = C_{эф}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right) \qquad (1.9)$$

Зависимости $\lambda(T)$ и $C_{эф}(T)$ можно получить опытным путём, а можно воспользоваться аналитическими зависимостями, приведенными в работе Н.С.Иванова [11].

1.2. Схемы конечно-разностных аппроксимаций уравнений теплопроводности. Вопросы устойчивости и сходимости. Электрическая реализация неявных разностных схем

Остановимся на конечно-разностных аппроксимациях пространственных производных и производной по времени на примере уравнения теплопроводности [13]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \; ; \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \approx \frac{T_0 - T_1}{\Delta X} \quad \text{– разность назад;} \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \approx \frac{T_2 - T_0}{\Delta X} \quad \text{– разность вперед;} \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \approx \frac{T_2 - T_1}{2\Delta X} \quad \text{– среднее из разностей вперед и назад (симметричная разность).} \qquad (1.13)$$

Индексы здесь относятся к узлам. Из уравнений (1.11)–(1.13) уравнение (1.13) обычно предпочтительнее, так как оно дает аппроксимацию для первой производной в узле 0, а не при $\pm x/2$.

Аппроксимация второй пространственной производной имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \approx \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{\Delta X^2} \qquad (1.14)$$

Первая производная от T по времени в ($n-1$) момент может быть аппроксимирована тремя способами:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta \tau}$$ – разность вперед; (1.15)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{\Delta \tau}$$ – разность назад; (1.16)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_n - T_{n-2}}{2\Delta \tau}$$ – среднее из разностей вперед и назад. (1.17)

Здесь индексы относятся к соответствующим моментам времени. Комбинации пространственных аппроксимаций с временными дают полностью дискретную аппроксимацию уравнения (1.10). Если уравнение (1.10) заменено конечно-разностным уравнением

$$a \frac{T_{1,n-1} + T_{2,n-1} - 2T_{0,n-1}}{\Delta X^2} \approx \frac{T_{0,n} - T_{0,n-1}}{\Delta \tau}$$ (1.18)

то говорят, что имеем конечно-разностную аппроксимацию по явной схеме.

Если уравнение (1.10) аппроксимировано уравнением

$$a \frac{T_{1,n} + T_{2,n} - 2T_{0,n}}{\Delta X^2} = \frac{T_{0,n} - T_{0,n-1}}{\Delta \tau}$$ (1.19)

то говорят, что имеем конечно-разностную аппроксимацию по неявной схеме.

Схему

$$a \frac{T_{1,n-1} + T_{2,n-1} - 2T_{0,n-1}}{\Delta X^2} = \frac{T_{0,n} - T_{0,n-2}}{2\Delta \tau}$$ (1.20)

называют схемой Ричардсона.

Вычислительная схема является устойчивой, если ошибка, сделанная в момент времени n (а при вычисле-

ниях ошибки округления неизбежны), в дальнейшем будет затухать, и неустойчивой, если такая ошибка возрастает и после сравнительно небольшого числа шагов увеличивается до неприемлемой величины. Явление вычислительной неустойчивости не связано с погрешностями округления, оно является свойством самой системы разностных уравнений.

Математическая теория устойчивости различных разностных схем подробно изложена в работах [20], [32] и др. Из указанных работ вытекает, что дискретизация производных по времени приводит к возможности появления неустойчивости. Схема (1.20) неустойчива при любых соотношениях интервалов пространства и времени.

Условие устойчивости для явной схемы [7] имеет вид:

$$a\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (1.21)$$

Схема (1.19) является безусловно устойчивой. Условие устойчивости (1.21), как правило, вынуждает брать слишком малые интервалы времени и много раз повторять одни и те же операции. По этой причине явная форма не получила распространения даже на быстродействующих цифровых вычислительных машинах.

Неявный метод обладает фундаментальным преимуществом: требование устойчивости решения здесь не накладывает никаких ограничений на величину временного шага. Его величину можно назначать в разумных пределах так, чтобы уменьшить время расчётов без потери точности решения.

Условие устойчивости (1.21) записано для одномерной задачи. Для двухмерной и трехмерной задачи условие устойчивости соответственно имеет вид:

$$a\frac{\Delta\tau}{h^2} \leq \frac{1}{4} \qquad (1.22)$$

$$a\frac{\Delta\tau}{h^2} = \frac{1}{6} \qquad (1.23)$$

где h – интервал пространства.

Помимо математического подхода к анализу вычислительной неустойчивости, существует физический подход, предложенный В.Карплюсом [13]. Так как непрерывное проводящее поле может быть заменено сеткой сопротивлений, у которой уравнение узла или контура совпадает с конечно-разностной аппроксимацией дифференциального уравнения, описывающего поле, то можно считать, что всякому конечно-разностному уравнению соответствует своя сетка сопротивлений. Следует при этом ожидать, что вычислительная неустойчивость в соответствующей сетке сопротивлений будет проявляться в виде электрической неустойчивости, т.е. любое флуктуационное отклонение напряжения в узловой точке от номинала, изображающего истинную величину решения, приводит к лавинообразному нарастанию токов и напряжений.

Для выяснения вопроса вычислительной неустойчивости конечно-разностного уравнения строится соответствующий ему электрический конструктивный блок. Если он содержит только положительные сопротивления, то цепь должна быть устойчивой, так как она имеет в этом случае только элементы, рассеивающие энергию.

Если помимо положительных сопротивлений имеются отрицательные, то цепь будет устойчивой только в том случае, если суммы всех отрицательных сопротивлений больше суммы всех положительных.

Вторая проблема, возникающая при конечно-разностном представлении временной переменной в дифференциальных уравнениях с частными производными, связана с возможностью отсутствия сходимости. Говорят, что конечно-разностная аппроксимация "сходится", если приближенное решение конечно-разностного уравнения стремится к точному по мере измельчения сетки конечных разностей при условии, что отношение пространственных шагов сетки вдоль различных координат сохраняется постоянным [13]. Общего критерия сходимости в литературе не имеется. Однако устойчивость всегда предполагает сходимость, хотя обратное не всегда верно. Но, так как одним из важнейших требований к вычислительным алгоритмам является требование устойчивости, рассмотрение вопроса сходимо-

сти не представляет дополнительной проблемы.

При моделировании процесса промерзания грунтов на R – сетках будем использовать, как наиболее распространенную, только неявную конечно-разностную аппроксимацию типа (1.19). Детальное описание различных видов неявных разностных схем изложено в работе [9].

В 1956 г. Дж.Либман предложил оригинальный метод решения задач нестационарной теплопроводности [38]. Метод представляет собой реализацию неявной конечно-разностной схемы на электрической модели. В качестве примера рассмотрим реализацию схемы (1.19) по Либману.

Соберем электрическую цепь, как показано на рис.1.1.

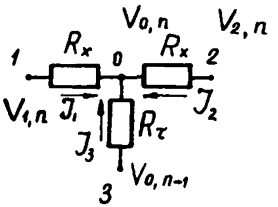


Рис. 1.1. Узел сетки сопротивлений в точке 0.
J_1 ; J_2; J_3 – токи в ветвях цепи.

По закону Кирхгофа

$$\sum_{i=1}^{3} J_i = 0 \qquad (1.24)$$

Так как

$$J_1 = \frac{V_{1,n} - V_{0,n}}{R_x} \; ; \; J_2 = \frac{V_{2,n} - V_{0,n}}{R_x} \; ; J_3 = \frac{V_{3,n-1} - V_{0,n}}{R_\tau} \, ,$$

$$\frac{V_{1,n} - 2V_{0,n} + V_{2,n}}{R_x} = \frac{V_{0,n} - V_{0,n-1}}{R_\tau} \qquad (1.25)$$

Здесь R_x – сопротивление цепи, а R_τ связано с соотношением

$$R_\tau = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta X)^2} R_x \qquad (1.26)$$

Уравнение (1.25) формально тождественно с уравнением в конечных разностях (1.19) при условии (1.26).

Следовательно, уравнение напряжений в рассматривае-

мой цепи (1.25) моделирует уравнение в конечных разностях (1.19), а уравнение в конечных разностях аппроксимирует дифференциальное уравнение в частных производных (1.10) с точностью, определяемой выбором интервалов пространства и времени.

Другую оригинальную реализацию неявной конечно-разностной схемы на электромодели предложил В.Карплюс [13]. Принципы, положенные им в основу построения дискретной сеточной модели, является развитием метода Либмана.

1.3. Правила моделирования, Электротепловая аналогия

При составлении электрических моделей для исследования нестационарных задач теплопроводности следует руководствоваться следующими правилами [37]:

1) электрическая модель должна быть геометрически подобна исследуемому объекту;

2) явления в модели и в исследуемом объекте должны принадлежать к одному и тому же классу, то есть описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями;

3) граничные условия должны быть подобными.

Кроме того, при электрическом моделировании на R-сетках необходимо выполнение условия [16]

$$\left(\frac{\ell_x^2\,\ell_{cj}}{\ell_\lambda\,\ell_\tau}\right)_T = \left(\frac{\ell_x^2\,\ell_{c\gamma}}{\ell_\lambda\,\ell_\tau}\right)_Э = idem \qquad (1.27)$$

При электрическом моделировании на RC-сетках выполняется условие

$$\left(\frac{\ell_x^2\,\ell_c\,\ell_\tau}{\ell_\tau}\right)_T = \left(\frac{\ell_x^2\,\ell_c\,\ell_{R_0}}{\ell_\tau}\right)_Э = idem \qquad (1.28)$$

где ℓ – масштаб;

c – удельная теплоемкость;

τ – удельное тепловое сопротивление;

R_0 – удельное электрическое сопротивление.

Индексы T и $Э$ относят выражения соответственно

к тепловой и электрической системам.

Выражения (1.27) и (1.28) аналогичны.

В табл. 1 приведена наиболее часто встречающаяся система электротепловых аналогий (ЭТА).

Таблица 1

Аналогия между тепловыми и электрическими величинами [34]

Тепловая система		Электрическая система	
Величина	Размерность	Величина	Размерность
T – температура	град	V – напряжение	в
λ – коэффициент теплопроводности	ккал/м·час·град	q – удельная проводимость	1/ом·м
Q – количество тепла	ккал	$q_э$ – количество электричества	кулон
$C_т = c\gamma v$ [1] – теплоемкость	ккал/град	C – ёмкость	ф
$R_т$ – тепловое сопротивление	град·час/ккал	R – электрическое сопротивление	ом
$\tau_т$ – время	час	$t_э$ [2] – время	час
$q_т = \frac{dQ}{d\tau_т}$ – расход тепла или	ккал/час	$J = \frac{dq_э}{d\tau_э}$ – сила тока	а
$q_т = c\gamma v \frac{dT}{d\tau_т}$	–"–	$J = C\frac{dV}{d\tau_э}$	–"–

1) v – объём, м³.

2) При моделировании на RC-сетках электрическое время обычно выражается в секундах.

В основу метода ЭТА положена аналогия между дифференциальными уравнениями процесса распространения тепла и распределения потенциалов в электропроводной среде.

Уравнения, описывающие нестационарные поля температур и электрических потенциалов, в простейшем случае имеют вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial \tau}\ ; \qquad (1.29)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = R_o C_o \frac{\partial V}{\partial \tau}\ ; \qquad (1.30)$$

где R_o – удельное электрическое сопротивление, ом.м;

C_o – удельная электрическая емкость (на единицу объёма), ф/м^3.

Электромодель R C-сетка решает уравнение (1.30), которое аналогично уравнению (1.29), если соответствующим образом рассчитать параметры R C-сетки.

При электрическом моделировании на R-сетках используется аналогия между конечно-разностным выражением уравнения нестационарной теплопроводности и законом Кирхгофа для токов электрической цепи, сходящейся в узел

$$\frac{T_{k-1,n} - T_{k,n}}{h^2} + \frac{T_{k+1,n} - T_{k,n}}{h^2} + \frac{T_{k,n-1} - T_{k,n}}{a\Delta\tau} = 0; \qquad (1.31)$$

$$\sum \frac{\Delta V_i}{R_i} = 0; \qquad (1.32)$$

где ΔV_i – разность потенциалов в узлах на концах сопротивления R_i.

Методика электрического моделирования применительно к процессу промерзания грунта на R и RC-сетках излагается ниже.

1.4. Расчёт параметров R - сетки

К расчёту параметров R-сетки (или RC-сетки) для решения уравнения процесса промерзания грунтов, как и

вообще краевых задач, возможны два подхода [7]:

1) физический метод, основанный на аналогии уравнений;

2) математический метод, исходящий из приближенного выражения решения для данного уравнения.

Первый метод (так называемый метод замещения) применяется как при физическом, так и при математическом моделировании. При этом сплошная среда заменяется сосредоточенными элементами. Такая замена обладает преимуществом физической наглядности и в простейших случаях может давать верный результат. Вопрос о погрешности при такой замене остается открытым. В сложных случаях, как показано в [7], погрешность может оказаться довольно большой, а нахождение эквивалентных элементов затруднительно.

Второй метод заключается в том, что дифференциальное уравнение заменяется конечно-разностным уравнением для узловых точек сетки, а электрические сетки понимаются как счётно-решающие механизмы. Элементы соединяются между собой так, чтобы выполнялись указанные уравнениями операции. При таком способе составления электрических схем теряется физическая наглядность, но появляется наглядность математическая, позволяющая оценить погрешность. Этот метод наиболее точный, и в дальнейшем электрические параметры будут рассчитываться главным образом исходя из него.

Уравнения, описывающие процесс промерзания грунтов, могут быть записаны в любой системе координат, лучше всего соответствующей геометрии поля. Наиболее часто встречаются прямоугольные и цилиндрические координатные системы.

Расчёт параметров R-сетки для решения уравнения процесса промерзания грунта, записанного в прямоугольной системе координат

При исследовании температурных полей в промерзающем влажном грунте (двумерный случай) уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)-(c\gamma)\frac{\partial T}{\partial \tau}+\omega=0; \qquad (1.33)$$

где λ, $c\gamma$, ω – в общем случае функции пространственных координат x, y, температуры и времени;

ω – функция тепловых источников, определяющая приток тепла в единице объёма и в единицу времени.

Функция ω имеет различные выражения для случаев $T_{кр}=0$ и $T_{кр}\neq 0$, о чём будет сказано более подробно ниже. Граничные условия заданы обычно в виде условий I или Ш рода.

Начальные условия задаются в виде распределения температур в начальный момент времени $T=T(x, y, o)$. Пусть Д – область моделирования плоскости хоу. Покроем её сеткой прямых, параллельных осям координат. Точки пересечения этих прямых будем называть узлами сетки, или <u>узловыми точками.</u> Расстояние между соседними узлами называют <u>шагом сетки.</u>

Уравнение [1.33] при выборе неравных пространственных интервалов можно приближенно представить для узла 0 в виде [2]:

$$2\left[\frac{\lambda_1\frac{T_{1,n}-T_{0,n}}{h_1}-\lambda_2\frac{T_{0,n}-T_{2,n}}{h_2}}{h_1+h_2}\right]+\left[\frac{\lambda_3\frac{T_{0,n}-T_{0,n}}{h_3}-\lambda_4\frac{T_{0,n}-T_{4,n}}{h_4}}{h_3+h_4}\right]+$$

$$+(c\gamma)_{0,n-1}\frac{T_{0,n-1}-T_{0,n}}{\Delta\tau}+\omega=0; \qquad (1.34)$$

Умножив обе части уравнения (1,34) на $\frac{(h_1+h_2)(h_3+h_4)}{4}$ получим:

$$\frac{\lambda_1(h_3+h_4)}{2h_1}\left(T_{1,n}-T_{0,n}\right)+\lambda_2\frac{h_3+h_4}{2h_2}\left(T_{2,n}-T_{0,n}\right)+$$

$$\frac{\lambda_3 (h_1+h_2)}{2h_3}(T_{3,n}-T_{0,n})+\frac{\lambda_4 (h_1+h_2)}{2h_4}(T_{4,n}-T_{0,n})+$$

$$+(c\gamma)_{0,n-1}\frac{(h_1+h_2)(h_3+h_4)}{4\Delta\tau}(T_{0,n-1}-T_{0,n})+$$

$$+\omega\frac{(h_1+h_2)(h_3+h_4)}{4}=0; \qquad (1.35)$$

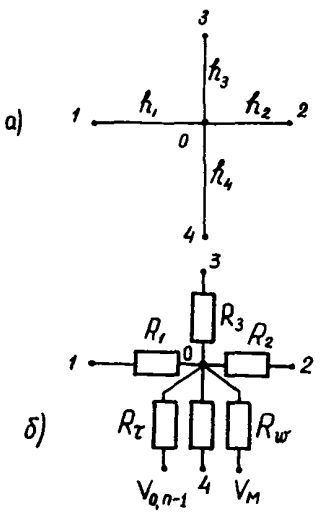


Рис.1.2. Элемент R -сетки, эквивалентный элементарной площадке вокруг узла 0.

Индексы 0, 1, ..., 4 при T и $(c\gamma)$ относят эти величины к узлам 0, 1, . . ., 4 соответственно (рис. 1.2,а). Индексы 1,2,3,4 при h относят величину соответственно к интервалам пространства между узлами 0–1, 0–2, 0–3, 0–4. Величины $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4$ определяются по средней температуре в соответствующих узлах в $(n-1)$ момент времени. Величина $(c\gamma)$ определяется в соответствующих узлах в $(n-1)$ момент времени. Величина ω задаётся для n -го момента времени.

Уравнение электрических токов по первому закону Кирхгофа для нулевого узла (рис.1.2,б) запишется следующим образом:

$$\frac{V_{1,n}-V_{0,n}}{R_1}+\frac{V_{2,n}-V_{0,n}}{R_2}+\frac{V_{3,n}-V_{0,n}}{R_3}+$$

$$+\frac{V_{1,n}-V_{0,n}}{R_4}+\frac{V_{0,n-1}-V_{0,n}}{R_\tau}+\frac{V_M-V_{0,n}}{R_\omega}=0 \qquad (1.36)$$

Для соблюдения аналогии между конечно-разностной аппроксимацией уравнения (1.35) и уравнением первого закона Кирхгофа (1.36) электрические сопротивления R_1-R_4, R_τ, R_ω, должны быть рассчитаны по формулам

$$R_1=\frac{\alpha_R\cdot 2h_1}{\lambda_1(h_3+h_4)};\quad R_2=\frac{\alpha_R\cdot 2h_2}{\lambda_2(h_3+h_4)};$$

$$R_3=\frac{\alpha_R\cdot 2h_3}{\lambda_3(h_1+h_2)};\quad R_4=\frac{\alpha_R\cdot 2h_4}{\lambda_4(h_1+h_2)}; \qquad (1.37)$$

$$R_\tau=\frac{\alpha_R\cdot 4\Delta\tau}{(c\gamma)_{0,n-1}(h_1+h_2)(h_3+h_4)}; \qquad (1.38)$$

$$R_\omega=\frac{\alpha_R\cdot 4(V_M-V_{0,n})}{\alpha_v\cdot\omega(h_1+h_2)(h_3+h_4)}; \qquad (1.39)$$

где α_v – масштабный коэффициент по напряжению, вольт/град;

α_R – масштабный коэффициент перехода по сопротивлению, ом ккал/час·град;

V_M – максимальное напряжение, которое можно подать, пользуясь данной измерительной схемой.

Так как потенциал $V_{0,n}$ является искомым и не может быть использован при определении параметров модели, то обычно величину R_ω выбирают такой, чтобы

$$V_M \gg V_{0,n} \qquad (1.40)$$

Тогда выражение (1.39) с учётом (1.40) принимает вид:

$$R_\omega = \frac{\alpha_R \cdot 4 V_M}{\alpha_v \cdot \omega (h_1 + h_2)(h_3 + h_4)} \qquad (1.41)$$

Вместо R_ω можно подключить в узел "0" источник тока, величина которого рассчитана по формуле

$$J_\omega = \frac{\alpha_v \cdot \omega (h_1 + h_2)(h_3 + h_4)}{4 \alpha_R} \qquad (1.42)$$

При заданных граничных условиях 1 рода в узлы задаются напряжения, соответствующие заданным температурам.

При задании граничных условий Ш рода выполняется равенство

$$\alpha (T_n - T_c) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_n \qquad (1.43)$$

где индекс n означает поверхность, С – среду; α – коэффициент теплоотдачи.

Условие (1.43) можно записать в виде

$$\alpha (T_n - T_c) + \lambda_i \frac{T_{o,n} - T_{i,n}}{h_i} = 0 ; \qquad (1.44)$$

Уравнение электрических токов по закону Кирхгофа для сопротивлений, сходящихся в i-й поверхностный узел (рис. 1.3), имеет вид:

$$\frac{V_{i,n} - V_{c,n}}{R_{\alpha i}} + \frac{V_{o,n} - V_{i,n}}{R_i} = 0 ; \qquad (1.45)$$

Для аналогии между (1.44) и (1.45) необходимо, чтобы

$$R_{di} = \frac{\lambda_i R_i}{d_i h_i} ; \qquad (1.46)$$

Сопротивление R_i определяется по одной из формул (1.37).

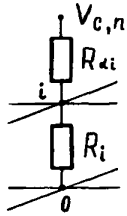


Рис. 1.3. Задание ГУ Ш рода в i -й узел.

Расчёт параметров R -сетки для решения уравнения процесса промерзания грунта, записанного в цилиндрической системе координат

Покажем расчёт на примере процесса промерзания одиночной скважиной с внешним радиусом $r_к$.

Задача описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\lambda_r}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - (c\gamma)\frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega = 0 ; \qquad (1.47)$$

где λ , $c\gamma$, ω – функции координаты r, температуры и времени.

Граничные условия 1 рода

$$T_{r_к} = f(\tau) \qquad (1.48)$$

Начальные условия

$$T_{(r,0)} = f(r) \qquad (1.49)$$

Уравнение (1.47) в конечно-разностной форме при неравных пространственных интервалах можно записать (для узла 0) так:

$$2\,\frac{\lambda_2 \dfrac{T_{2,n}-T_{0,n}}{h_2} - \lambda_2 \dfrac{T_{0,n}-T_{1,n}}{h_1}}{h_1+h_2} - \frac{\lambda_2(T_{2,n}-T_{0,n}) - \lambda_1(T_{1,n}-T_{0,n})}{r_0(h_1+h_2)} +$$

$$+ (c\gamma)_{0,n-1} \frac{T_{0,n-1} - T_{0,n}}{\Delta\tau} + \omega = 0 ; \qquad (1.50)$$

Обозначения даны на рис. 1.4.

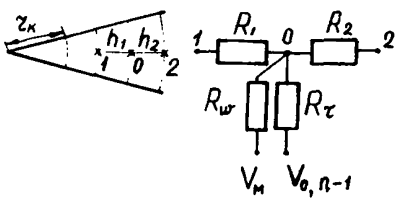


Рис. 1.4. Элемент R-сетки, эквивалентный элементарной площадке вокруг узла 0.

Умножив обе части уравнения (1.50) на $\frac{(h_1+h_2)r_0}{2}$ получим:

$$\frac{\lambda_2 r_0}{h_2}(T_{2,n} - T_{0,n}) + \frac{\lambda_1 r_0}{h_1}(T_{1,n} - T_{0,n}) + \frac{\lambda_2}{2}(T_{2,n} - T_{0,n}) -$$

$$- \frac{\lambda_1}{2}(T_{1,n} - T_{0,n}) + (c\gamma)_{0,n-1} \frac{(h_1+h_2)r_0}{2} \frac{T_{0,n-1} - T_{0,n}}{\Delta\tau} +$$

$$+ \omega \frac{(h_1+h_2)r_0}{2} = 0 ; \qquad (1.51)$$

Так как рассматривается осесимметричная задача, то область исследования удобно ограничить сектором с центральным углом в один радиан.

Для аналогии с законом Кирхгофа (1.36) для цепи, сходящейся в узел 0 (рис. 1.4), необходимо, чтобы параметры R-сетки были рассчитаны так:

$$R_1 = \alpha_R \frac{2}{\lambda_1} \frac{r_0 - r_1}{r_0 + r_1} ; \qquad (1.52)$$

$$R_2 = \alpha_R \frac{2}{\lambda_2} \frac{r_2 - r_0}{r_2 + r_0} ; \qquad (1.53)$$

$$R_\tau = \frac{\alpha_R 2 \Delta\tau}{(c\gamma)_{0,n-1}(r_2 - r_1) r_0} ; \qquad (1.54)$$

$$R_\omega = \frac{\alpha_R 2 V_м}{\alpha_v \omega (r_2 - r_1) r_0} ; \qquad (1.55)$$

В данном случае параметры R -сетки более точно можно рассчитать методом замещения, считая, что узлы расположены в центре площадки.

Для этого нужно, разбив область концентрическими окружностями, определить центры тяжести блоков (рис. 1.5) по формуле [25] :

$$R_c = \sqrt{\frac{r_j^2 + r_{j+1}^2}{2}} \qquad (1.56)$$

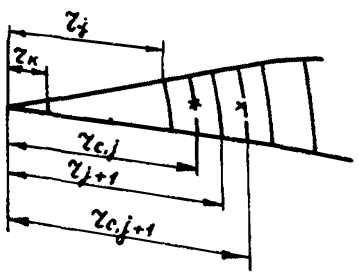


Рис. 1.5. Схема разбивки на блоки при замораживании грунтов одиночной колонкой (узлы внутри блоков).

Тогда сопротивления между центрами тяжести блоков

$$R_{j,j+1} = \alpha_R \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_{c,j+1}}{r_{c,j}} ; \qquad (1.57)$$

R_τ и R_ω выразятся так:

$$R_T = \frac{\alpha_R \, 2 \, \Delta\tau}{(c\gamma)_{c,j,n-1} \cdot (\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2)} ; \qquad (1.58)$$

$$R_\omega = \frac{\alpha_R \, 2 \, V_M}{\alpha_v \cdot \omega (\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2)} ; \qquad (1.59)$$

В формулах (1.57) и (1.58) λ и $(c\gamma)$ берутся соответственно в талом и мерзлом состояниях.

Граничные условия Ш рода для такой цилиндрической поверхности имеют вид:

$$\alpha(T_n - T_c) = -\lambda\left(\frac{\partial T(\tau_к, \tau)}{\partial \tau}\right) ; \qquad (1.60)$$

Сопротивление R_α в этом случае нужно определять по формуле

$$R_\alpha = \frac{\alpha_R}{\alpha \tau_{ср}} \qquad (1.61)$$

где $\tau_{ср} = \tau_к + \frac{\Delta\tau}{2}$; $\Delta\tau$ – приращение координаты τ в узловой точке $\tau = \tau_к$.

1.5. О расположении узлов в элементарных площадках

Вывод параметров R -сетки, приведенный выше, относится к случаю, когда узлы R -сетки находятся в углах граней элементарных площадок, на которые мы разбили область нашей сеткой. Такая разбивка характерна для решения уравнений в конечных разностях.

Но можно подойти к разбивке области на элементы с другой стороны: считать, что сетка разбивает область на элементы, а электрическая сетка заменяет сам элемент, у которого центр находится внутри [16].

На рис. 1.6 показаны два случая (разбивка прямоугольная), отвечающие практически одной и той же сетке, но в первом случае (а) узлы электрической сетки размещены

в узлах геометрической сетки, во втором (б) в середине элементарной площадки.

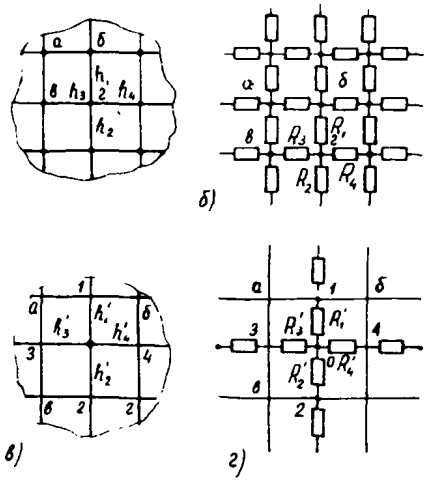


Рис. 1.6. Разбивка области элементарными площадками сеткой а – с узлами в углах граней и в – с узлами внутри площадки и сетки электрических сопротивлений для этих случаев соответственно б и г.

Для случая а) выражения для параметров R – сетки имеют вид (1.37) – (1.39). Здесь $h_1, \ldots, h_n$ – расстояния между узлами.

Для случая б) $h'_1, \ldots, h'_n$ – расстояния от центра до границ элементарной площадки.

При прямоугольной разбивке для плоской задачи выражения параметров R –сетки при расположении узлов внутри площадки будут иметь вид:

$$R'_1 = \frac{\alpha_R h'_1}{\lambda_1 (h'_3 + h'_4)}; \quad R'_2 = \frac{\alpha_R h'_2}{\lambda_2 (h'_3 + h'_4)};$$

$$R'_3 = \frac{\alpha_R h'_3}{\lambda_3 (h'_1 + h'_2)}; \quad R'_4 = \frac{\alpha_R h'_4}{\lambda_4 (h'_1 + h'_2)}; \qquad (1.62)$$

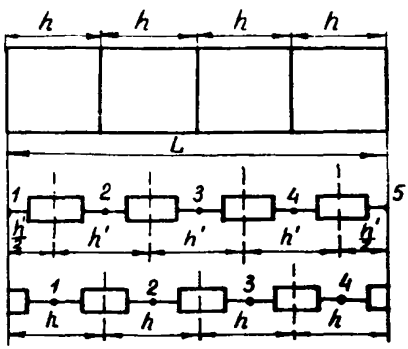
$$R_\tau = \frac{\alpha_R \Delta\tau}{(c\gamma)_{0,n-1} (h'_1 + h'_2)(h'_3 + h'_4)}; \qquad (1.63)$$

$$R'_{\omega} = \frac{\alpha_R (V_M - V_{0,n})}{\alpha_V \omega (h'_1 + h'_2)(h'_3 + h'_4)} ; \qquad (1.64)$$

Отсюда видно, что выражения (1.62) - (1.64) отличаются от (1.37) - (1.39) отсутствием коэффициента 2 в формулах (1.62) и коэффициента 4 в формулах (1.63), (1.64).

Для выяснения достоинств и недостатков этих случаев расположения узлов рассмотрим пример, взятый из [44].

На рис. 1.7,а показан стержень, разбитый на 4 элементарных объёма. Задача одномерная. Шаг в длину $h = \frac{L}{4}$. На этом же рисунке показаны две R -сетки: одна с узлами в углах граней (на границе элементов), другая с узлами внутри элемента.



а)

б)

в)

Рис. 1.7. Замена стержня (а) R -сетками с узлами в углах граней (б) и с узлами внутри элемента (в).

На рис. 1.7,б узлы 1, 5 обслуживают участки $\frac{h}{2}$, а узлы 2, 3, 4 - участки h, т.е. на длине L мы имеем практически 5 узлов, а на рис. 1.7,в только 4 узла, обслуживающие участки длиной h.

Очевидно, что схема расположения узлов (1.7,б) будет давать более точные результаты, чем (1.7,в). Можно так объяснить причину повышенной точности сетки (1.7,б): узлы 1 и 5 обслуживают участки $\frac{h}{2}$, а остальные узлы - участки h, т.е. мы имеем сетку, где есть более мелкая ($\frac{h}{2}$) и более крупная разбивка (h) на той же длине

где в случае (1.7,в) есть только крупная разбивка. Но несмотря на то, что точность сетки типа (1.7,в) меньше, она практически удобна по следующим причинам:

1) количество сопротивлений в случае (1.7, в) (узлы внутри) меньше;

2) расчёт сеток с узлами внутри производится по зависимостям, совпадающим с полученными исходя из метода замещения, метода эквивалентных балансов, что упрощает физическую трактовку задачи, делает более наглядной сетку и приводит к уменьшению ошибок при расчёте.

Отметим, что разбивка с узлами внутри элемента требует расположения узла в центре элемента. Однако можно показать, что узел может быть расположен в любом месте внутри элемента.

В общем случае, чем больше отдален узел от центра, тем меньше точность данной модели при прочих равных условиях.

Разбивку с узлами в углах граней и с узлами внутри элемента можно применять при электромоделировании не только на R-сетках, но и на RC-сетках.

1.6. Методика решения задач промерзания грунта при $\Delta T_{кр}=0$

При математической формулировке задачи промерзания грунта при $\Delta T_{кр}=0$ отмечалось, что процессы в мерзлой и талой зонах описываются уравнениями Фурье (1.2),(1.3) и на границе раздела зон соблюдается условие (1.5), коэффициент теплопроводности λ и объёмная теплоемкость C меняются скачкообразно при переходе температуры через $T_{кр}$, которую без ограничения общности можно принять за нуль.

В процессе электромоделирования условие на границе (1.5) можно включить или в граничное условие, или в основное дифференциальное уравнение теплопроводности. Это не меняет сути дела, будут меняться лишь методы изучения.

Процесс промерзания грунта при введении условия на границе (1.5) в основное дифференциальное уравнение имеет вид (1.33). Функцию ω здесь можно рассматривать

как внутренний источник тепла мощностью

$$\omega = \frac{Q_0}{\Delta \tau} , \qquad (1.65)$$

где Q_0 – скрытая теплота льдообразования, приходящаяся на единицу объёма грунта.

Впервые условие на границе (1.5) включать в основное дифференциальное уравнение теплопроводности при моделировании на R – сетках предложил Либман [39].

Опишем подробнее методику решения этой задачи методом Либмана.

Параметры R –сетки рассчитываются по формулам (1.37), (1.38), (1.39). Следует помнить, что если R_ω определено по формуле (1.39), то условие (1.40) должно строго выполняться, чтобы не внести существенных погрешностей. Практически это означает, что рабочие напряжения в модели должны лежать в диапазоне 0–10% в тех узлах, куда подключается R_ω.

При электрическом моделировании с R_ω следует применять такой приём, который позволяет учесть факт замерзания за время $\Delta \tau$ не всего элементарного объёма, соответствующего данному узлу, а его части. Для этого вводится коэффициент β, который предложил Либман. Коэффициент β изменяется от 0 до 1 во время решения задачи, когда исследуется процесс замерзания:

$$R_\omega = \frac{\lambda_R 4 V_M}{\lambda_V \omega (h_1+h_2)(h_3+h_4)\beta} \qquad (1.66)$$

После расчёта параметров модели и её сборки подключаем модель к измерительной схеме. На концы сопротивлений R_τ подаются напряжения, соответствующие температурам в данных точках согласно заданному начальному условию, то есть в $(n-1)$ момент времени. В граничные узлы сетки подаются напряжения, соответствующие температурам в n момент времени при ГУ–1 рода. На концы сопротивлений R_λ подаются напряжения, соответствующие температурам среды в n момент времени, на концы

R_ω – максимальное напряжение источника. R_ω подключается, когда напряжение в узле становится равным $V_{кр}$. При этом время, в течение которого это произойдет, ищется подбором интервалов $\Delta\tau$ способом исследовательских приближений. Это связано с большим объёмом работ по перерасчёту параметров R -сетки.

Методика моделирования с учётом β состоит в следующем. Рассчитываем R_ω по формуле (1.41). Если напряжение в данном узле получится выше напряжения $V_{кр}$, соответствующего температуре кристаллизации, то R_ω рассчитываем по (1.66).

Практически это означает, что величина R_ω увеличивается до тех пор, пока напряжение не станет равным $V_{кр}$. Это равносильно тому, что мы ввели $\beta < 1$. По величине β определяется часть блока, замерзшая за данный интервал $\Delta\tau$.

В следующий момент времени в данный узел подключается сопротивление

$$R_\omega = \frac{4\alpha_R V_m}{\alpha_v \omega (h_1+h_2)(h_3+h_4)(1-\beta)} \qquad (1.67)$$

и процесс решения задачи аналогичен предыдущему. Он продолжается до тех пор, пока на определенном шаге при подключении R_ω напряжение в узле не будет меньше или равно напряжению $V_{кр}$. Это означает, что весь элементарный объём затвердел. Тогда R_ω отключается от данного узла и подключается к следующему.

Условие окончания фазового перехода в данном узле можно записать несколько иначе, если принять $\Delta\tau$ постоянным. Суммарный ток

$$J^* = \frac{\alpha_v Q_0}{R_\tau (c\gamma)} \cdot \qquad (1.68)$$

Так как при данном методе ток явно не измеряется, а зависит от величины сопротивления, условие (1.72) представим в виде:

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{R_{\omega}^{n}}\right)=\frac{\alpha_{v}\,Q_{0}}{V_{M}\,R_{\tau}\,(C\gamma)}\qquad(1.69)$$

При некотором $\Delta\tau$ может получиться, что процесс выделения скрытой теплоты льдообразования будет продолжаться сверх положенного времени. Практически это означает, что напряжение в данном узле станет ниже $V_{кр}$. При наступлении $V_{кр}$ омические сопротивления между данным узлом и соседними узлами, где напряжение к этому времени уже ниже $V_{кр}$, изменяются скачкообразно.

Преобразуем последние два члена в уравнении (1.34) следующим образом:

$$(C\gamma)\frac{T_{0,n-1}-T_{0,n}}{\Delta\tau}+\omega=\frac{(C\gamma)}{\Delta\tau}\left[T_{0,n}-\left(T_{0,n-1}+\frac{Q_{0}}{(C\gamma)}\right)\right]\qquad(1.70)$$

Из формулы (1.70) видно, что для учёта скрытой теплоты льдообразования в этом случае следует на свободный конец временного сопротивления R_{τ} подать значение напряжения V_{τ}, соответствующего величине температуры $T_{0,n-1}+\frac{Q_{0}}{(C\gamma)}$. Величину $(C\gamma)$ во время фазового перехода можно принять либо как для мёрзлой зоны, либо как для талой. Если напряжение в узле $V_{0,n}>V_{кр}$, уменьшением V_{τ} добиваемся, чтобы $V_{0,n}=V_{кр}$. С учётом (1.70) и зная значение подобранного напряжения V'_{τ}, находим, какая часть элементарного блока претерпела фазовое превращение, т.е. определяем коэффициент β. В дальнейшем процесс моделирования аналогичен.

Как показано в [42], при достаточной аппроксимации можно полагать, что истинный фронт затвердевания лежит в центре явной зоны фазового изменения.

Область моделирования, где происходят фазовые переходы, желательно разбить на более мелкую сетку, а по мере продвижения фронта промерзания менять мелкую сетку на более крупную.

Вкратце остановимся на масштабировании при моделировании этих процессов.

В работе Либмана [38] показано, что для моделирования уравнения типа Фурье без источников тепла необходимо выполнить условие

$$\frac{\alpha_\lambda \alpha_\tau}{\alpha_e^2 \alpha_c'} = 1, \qquad (1.71)$$

где α_λ – масштаб коэффициента теплопроводности;

α_τ – масштаб времени;

α_e – масштаб линейных размеров;

α_c' – масштаб объёмной теплоёмкости.

При моделировании уравнения (1.33) с источниками тепла мощностью ω должно выполняться дополнительное условие на масштабирование ω [39]

$$\alpha_\omega = \frac{\alpha_v \alpha_\lambda}{\alpha_e^2} \qquad (1.72)$$

При заданных граничных условиях Ш рода (1.43) коэффициент теплоотдачи масштабируется так:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_e \alpha_\omega}{\alpha_v} = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_e} \qquad (1.73)$$

При необходимости замера расхода тепла в узле, куда заданы ГУ-1 рода, в него подключается эталонное сопротивление, намного меньшее сопротивления сетки, и по падению напряжения на этом сопротивлении вычисляется значение тока.

Определение расхода тепла в узле при заданных граничных условиях Ш рода производится по падению напряжения на сопротивлении R_λ. Для перехода от значения электрического тока к расходу тепла должен быть введен масштаб перехода

$$\alpha_y = \frac{\alpha_v}{\alpha_R} \qquad (1.74)$$

1.7. Методика решения задач промерзания грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$. Линеаризация уравнения

Выше показано, что для некоторых грунтов при их промерзании фазовые переходы происходят в спектре отрицательных температур, при этом теплофизические характеристики λ и С мерзлого грунта являются непрерывными функциями температуры. В связи с этим в мерзлой зоне имеет место нелинейное уравнение теплопроводности (1.7) с источниками, интенсивность которых зависит от температуры. В такой зоне имеет место линейное уравнение теплопроводности (1.3).

При электромоделировании на R-сетках процесса промерзания грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$ можно пользоваться обобщенным уравнением (1.9) либо уравнениями (1.3), (1.7), причём можно использовать два варианта моделирования [18] этого уравнения.

Первый вариант моделирования уравнения (1.8) – это вариант, в котором член $\omega = \delta \frac{\partial q_\lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}$ рассматривается как внутренний источник тепла мощностью ω.

Тогда

$$\delta q_\lambda = \int_{T_{0,к}}^{T_{0,п}} C_{сп}\, dT \qquad (1.75)$$

где $T_{0,к}$ – температура окончания фазового перехода, и при моделировании, проходя диапазон $T_{0,п} - T_{0,к}$, на каждом шаге решения $\Delta\tau$ следует определять по формуле

$$\omega = \frac{\int_{T_{0,n}}^{T_{0,n-1}} C_{сп}\, dT}{\Delta\tau} \qquad (1.76)$$

Когда в процессе моделирования достигается $V_{0,n}$ соответствующее температуре начала кристаллизации грунта, в данный узел подключается R_ω, которое рассчитывается по формуле (1.41).

При определении R_ω величина $T_{0,n}$ входит как нижний предел интегрирования в ω. Но $T_{0,n}$ заранее неизвестно. Поэтому в расчёт R_ω берется его ориентировочное значение.

Если напряжение в узле на данном $\Delta\tau$ станет выше $V_{0,n}$ следовательно, в расчёт R_ω взята температура ниже положенной. Для уточнения $T_{0,n}$ нужно сделать несколько приближений. Практически дело сводится к увеличению R_ω, т.е. вводится коэффициент β, и процесс аналогичен случаю $\Delta T_{кр}=0$.

Если напряжение в узле на данном $\Delta\tau$ станет ниже $V_{0,n}$, то для соответствия полученной температуры температуре, принятой в расчёт R_ω, также следует произвести корретировку сопротивления R_ω.

Этот приём равносилен ступенчатой аппроксимации кривой $\omega=\omega(T)$, и чем меньше интервалы пространства и времени, тем большую точность получим.

Второй вариант моделирования – это учёт теплоты кристаллизации Q в $C_{эф}$, тогда задача решается без источников тепла, но $C_{эф}$ будет входить в R_τ. Для уравнения (1.9) после представления его в конечных разностях

$$R_\tau=\frac{2\lambda_R\Delta\tau}{(c\gamma+C_{сп})(h_1+h_2)} \qquad (1.77)$$

При этом можно выбирать такие диапазоны температур $T_{0,n-1}-T_{0,n}$, в которых Q выделяется по линейному закону, тогда $\frac{\partial q_\lambda}{\partial T}=const$ и нужно учитывать в R_τ лишь $C\gamma(T)$.

Если $\delta q_\lambda(T)$ выделяется не по линейному закону, то на каждом шаге $\Delta\tau$ необходимо учитывать и $C_{сп}(T)$. Учёт $\lambda(T)$, $C\gamma(T)$ и $C_{сп}(T)$ ведется путём корректировки соответствующих сопротивлений R-сетки. Покажем это на примере $\lambda(T)$.

Если температура в узлах, между которыми стоит в R-сетке сопротивление R_λ, на данном шаге резко отлична от температуры на предыдущем шаге и λ в них существенно зависит от температуры, то необходимо применить метод итераций. Для этого R_λ нужно рассчитать по средним значениям λ в узлах для $(n-1)$ и n моментов времени. Если имеется необходимость, то решение можно улучшить, повторив ту же операцию, и так до тех пор, пока разность температур между двумя последовательными приближенными станет достаточно малой.

Таким образом, при методе итераций два последних приближения сравниваются между собой, а $\lambda(T)$ в узлах находится как среднее значение между последним приближением и начальным распределением температур. Такой подход соответствует замене плавной зависимости $\lambda(T)$ ступенчатой.

В случае, когда разность температур между шагами невелика, что может быть при достаточно малом $\Delta\tau$, и кривая $\lambda(T)$ в этом промежутке температур изменится незначительно, предыдущие уточнения делать не следует, а для очередного шага λ следует рассчитать по температуре последнего приближения предыдущего шага.

Процедура учёта зависимостей $\omega(T)$ и $c\gamma(T)$ аналогична заданию R_λ, где $\lambda = \lambda(T)$.

При достаточной разбивке области моделирования сеткой и при достаточно малых $\Delta\tau$ такой учёт нелинейности позволяет получить решение, близкое к точному.

Параметры R-сетки, решающей уравнения (1.37), можно записать различным образом в зависимости от постановки задачи (нелинейная, линейная, линеаризованная) [16]:

а) λ, C – переменные; λ входит в расчёт R_i (R_i – сопротивление грунта), C входит в R_τ; задача нелинейная;

б) λ, C переменные; но λ введено в R_τ так, что $a = \frac{\lambda}{c}$ – величина переменная; линеаризованная задача;

в) λ; C – постоянные; λ входит в R_i, C в R_τ; задача линейная.

Если решать линеаризованную задачу, то уменьшается количество изменяемых сопротивлений. В [16] показано,

что в случае решения при б) соответствующим выбором λ и С можно получить решение, более близкое к а), чем при решении по б), и что для практического решения многочисленных вариантов нелинейной задачи можно рекомендовать следующий путь:

1) с помощью электромодели R -сетки решить один вариант нелинейной задачи;

2) найти осредненные значения теплофизических характеристик;

3) все остальные многочисленные варианты решать при усредненных λ и С.

Интересный способ учёта $\lambda(T)$ предложил Либман[38]. Если изменениями $\Delta\lambda$ коэффициента теплопроводности с температурой пренебречь нельзя, но они относительно малы в течение интервала времени $\Delta\tau$, так что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) \ll 1, \qquad (1.78)$$

то для получения достаточной точности можно включить это изменение в R_τ вместо того, чтобы ввести это изменение в R_i, введя коэффициент в $R_\tau\left(1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$.

1.8. Некоторые дополнительные возможности учёта скрытой теплоты при моделировании на R -сетках

Остановимся еще на некоторых методах учёта внутренней теплоты фазового перехода:

а) теплота фазового перехода включена в граничные условия как внешний источник тепла, действующий на границе раздела фаз.

Граничные условия для этого случая имеют вид (1.5) и применяются, когда теплота фазового перехода выделяется при постоянной температуре $T_{кр}$.

В данном случае учёт $Q\frac{d\xi}{d\tau}$ не совсем удобен, так как необходимо знать скорость движения границы промер-

зания $\frac{d\xi}{d\tau}$, которая при моделировании на R-сетках заранее неизвестна.

Это, однако, не означает, что такой путь учёта теплоты фазового перехода невозможен. Так как на каждом шаге решения известно положение фронта раздела фаз ξ, по предыдущим шагам можно определить

$$\frac{d\xi}{d\tau} \approx \frac{\xi_{n-1} - \xi_{n-2}}{\Delta\tau} \qquad (1.79)$$

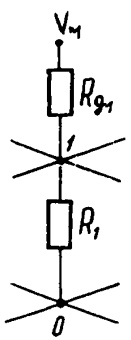
Из (1.79) видно, что для определения члена $Q\frac{d\xi}{d\tau}$ в n-ный момент времени необходимо иметь значения $\xi_{n-1,1}$ и ξ_{n-2}. ξ_{n-2} можно определить, например, решением дифференциального уравнения (1.3) по явной схеме.

Если будет выявлено, что скорость

$$\frac{d\xi}{d\tau} \approx \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\Delta\tau}. \qquad (1.80)$$

отличается существенно от принятой в расчёте, то необходимо сделать одно или несколько приближений.

Методика задания граничных условий II рода $q = Q\frac{d\xi}{d\tau}$ заключается в следующем (рис. 1.8).



В конечно-разностной форме граничное условие II рода для 1 узла можно записать [38] так:

$$q_1 + \lambda_1 \frac{T_{0,n} - T_{1,n}}{h_1} = 0 \qquad (1.81)$$

Рис.1.8. Схема задания граничных условий III рода.

Уравнение электрических токов по закону Кирхгофа для сопротивлений, сходящихся в точку 1 на поверхности раздела фаз, принимает вид:

$$\frac{V_м - V_{1,n}}{R_{q_1}} + \frac{V_{0,n} - V_{1,n}}{R_1} = 0 \qquad (1.82)$$

Из (1.81) имеем

$$-T_{0,n} + T_{1,n} = \frac{q_1 h}{\lambda_1} \qquad (1.83)$$

$$V_{1,n} - V_{0,n} = \alpha_v (T_{1,n} - T_{0,n}) = \alpha_v \frac{q_1 h_1}{\lambda_1} \qquad (1.84)$$

откуда

$$R_{q_1} = \frac{V_м \lambda R_1}{\alpha_v q_1 h_1} \qquad (1.85)$$

При выводе (1.85) учтено условие $V_м \gg V_{1,n}$
Если в узел R -сетки подается непосредственно ток, то его величина определяется формулой

$$J_{q_1} = \frac{\alpha_v q_1 h_1}{\lambda_1 R_1} \qquad (1.86)$$

б) в некоторых работах, например [5],[31], выделение скрытой теплоты рассматривается как повышение температуры на

$$\Delta T = \frac{Q_0}{(c\gamma)} \qquad (1.87)$$

Такой приём задания Q_0 реализуется при использовании явного метода решения конечно-разностных уравнений [5].

При решении уравнений теплопроводности неявным методом нет нужды прибегать к такому приёму, который вносит определенную погрешность [31], занижая время замерзания.

Указанный приём применим и в случае, когда Q_0 выделяется в диапазоне температур $T_{0,n} - T_{0,к}$ [31];

в) рассмотрим еще один приём учёта внутренних теп-

лот ω .

Возьмём два последних члена уравнения (1.35) (одномерный случай):

$$(c\gamma)_{0,n-1}\frac{h_1+h_2}{2\Delta\tau}\left(T_{0,n-1}-T_{0,n}\right)+\omega\frac{h_1+h_2}{2} \qquad (1.88)$$

Подставим вместо ω его значение по (1.65), умножим и разделим второй член в (1.88) на ($T_{0,n-1}-T_{0,n}$), тогда получим

$$\left(c\gamma-\frac{Q_0}{T_{0,n-1}-T_{0,n}}\right)\frac{h_1+h_2}{2\Delta\tau}\left(T_{0,n-1}-T_{0,n}\right) \qquad (1.89)$$

В выражении (1.89) в первых скобках стоит

$$c\gamma-\frac{Q_0}{T_{0,n-1}-T_{0,n}} \qquad (1.90)$$

т.е. какая-то новая эффективная теплоемкость, отнесённая к интервалу температур $T_{0,n-1}-T_{0,n}$.

При моделировании ω таким способом нужно вначале задаться интервалом температур, в котором будет происходить выделение скрытой теплоты $T_{0,H}-T_{0,K}$. Чем меньше разность $T_{0,H}-T_{0,K}$, тем больше мы приближаемся к тому, что фазовые превращения будут происходить при постоянной температуре. Величина ω будет входить в R_τ .

Наиболее правильным методом моделирования ω, выделяющегося как при $\Delta T_{кр}=0$, так и при $\Delta T_{кр}\neq 0$, является приём, когда ток подводится через R_ω, рассчитанное по формуле (1.41). Если $\Delta T_{кр}\neq 0$, то сопротивление R_ω следует включать во все узлы, попадающие в диапазон температур $T_{0,H}-T_{0,K}$.

1.9. Точность решения, полученного на R -сетках

Погрешность, возникающую при электромоделировании

дифференциального уравнения теплопроводности, слагается из четырёх погрешностей: а) погрешности метода, возникающей от замены дифференциального уравнения конечно-разностным; б) собственной погрешности сетки, возникающей от неточного изготовления её элементов; в) погрешности из-за неточного задания напряжений и токов; г) погрешности измерений [3].

Можно считать, что погрешности б), в), г) остаются неизменными. Справедливость такого утверждения подтверждается экспериментами [16]: при использовании компенсационного метода измерения результаты решения одной и той же задачи на одной и той же сетке после десятков опытов, проводимых в разное время, отличаются не более чем на 0,1%.

Оценка погрешности от замены дифференциального уравнения конечно-разностным является чисто математической задачей, решение которой отражено в работах Панова [29], Коллатца [20], Шура-Бура [36]. В общем виде определение этой погрешности связано с большими трудностями, так как она оценивается с помощью линейной комбинации максимальных значений модулей старших производных.

Так как электрическая модель R-сетка позволяет найти решение неявной разностной схемы, то устойчивость решения, полученного на R-сетке, не зависит от соотношения интервалов пространства и времени. Выбор величин пространственных интервалов h и временных $\Delta\tau$ влияет только на точность решения. Так как электрическая модель является математической, т.е. моделируется решение уравнений описывающих явление, а не само явление, погрешность следует определять сравнением с аналитическим решением того дифференциального уравнения, математической моделью которого является электромодель – сетка. Однако для некоторых задач аналитическое решение найти практически невозможно. В этом случае результаты электромоделирования можно сравнить с численным расчётом или с данными опытов.

Общая погрешность и погрешность метода зависят от выбора интервалов h и $\Delta\tau$. В каждом конкретном случае выбор h и $\Delta\tau$ должен быть произведен, исходя из конкретных условий задачи.

Если же отвлечься от конкретных условий задачи, то можно судить лишь о качественном влиянии величин h и $\Delta\tau$ на точность. Уменьшение интервалов h и $\Delta\tau$ ведёт к повышению точности, но зато резко увеличивается время решения, увеличение их приводит к обратному. Нельзя дать общий рецепт по выбору h и $\Delta\tau$.

Выбор "оптимального" интервала времени и пространства, обеспечивающий нужную точность при минимальной затрате времени, производится решением с удвоенным и уменьшенным вдвое интервалом [29]. Если результат, полученный с удвоенным интервалом, незначительно отличается от полученного ранее, то интервал не больше оптимального. Если разница между результатом велика, то необходима проверка решения с шагом, уменьшенным вдвое. Если данные, полученные при первоначальной величине интервала и при уменьшенном вдвое, будут близки, то начальный шаг будет оптимальным. Это правило относится как к выбору интервалов пространства, так и к выбору временных интервалов. Примеры оценки погрешности при решении нестационарных задач теплопроводности можно найти в [16], а применительно к задачам исследования процессов промерзания грунта – в гл. 4.

Глава 2

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА НА ЭЛЕКТРОМОДЕЛЯХ RC-СЕТКАХ

2.1. Расчёт масштабных коэффициентов при моделировании на RC-сетках

При электромоделировании на RC-сетках параметры и переменные величины электрической модели должны соответствовать параметрам и переменным функциям тепловой системы. Для расчёта необходимых величин электрических элементов, составляющих сетку, выбирают масштабные коэффициенты, при помощи которых осуществляется пересчёт соответствующих параметров и переменных величин согласно электротепловой аналогии из одной системы в другую.

Масштабные коэффициенты не могут быть произвольными, так как они связаны тремя основными зависимостями. В случае электрической системы эти зависимости следующие:

$$J = \frac{dq}{d\tau}\ ; \qquad (2.1)$$

$$J = \frac{V}{R}\ ; \qquad (2.2)$$

$$J = C\frac{\partial V}{\partial \tau}\ ; \qquad (2.3)$$

Аналогичные соотношения существуют и в тепловой системе. Отсюда следует, что только при масштабных коэффициентах, связывающих тепловую и электрическую системы, могут быть независимыми:

$$\alpha_V = \frac{V}{T}\ ; \qquad (2.4)$$

$$\alpha_C = \frac{C_э}{C_т}\ ; \qquad (2.5)$$

$$\alpha_R = \frac{R_э}{R_т} \cdot \qquad (2.6)$$

Три другие определяются из условий:

$$\alpha_q = \alpha_c \cdot \alpha_v ; \qquad (2.7)$$

$$\alpha_\tau = \alpha_R \alpha_c ; \qquad (2.8)$$

$$\alpha_э = \frac{\alpha_v}{\alpha_R} ; \qquad (2.9)$$

При выборе масштабных коэффициентов обычно исходят из конструктивных особенностей имеющегося интегратора. В большинстве случаев процесс выбора масштабных коэффициентов заключается в следующем.

Вначале удобно выбирать коэффициент , связывающий напряжение узловых точек сетки с температурой с соответствующих точек тепловой системы. Верхняя граница допустимого напряжения определяется рабочим диапазоном источников питания и допустимым рабочим напряжением ёмкостей. Нижняя граница выбирается такой, чтобы шумы в модели и измерительной аппаратуре были на порядок слабее минимального моделирующего напряжения. Часто масштабные коэффициенты требуют перерасчёта.

В большинстве электроинтеграторов с RC-сетками диапазон изменения емкостей конденсаторов сравнительно мал. Следовательно, следующим должен выбираться коэффициент α_c . В электроинтеграторах с малой постоянной времени, где имеет место периодизация, время решения практически ограничено несколькими дискретными значениями. Исходя из этого, выбирают α_τ .

Масштабный коэффициент α_R вычисляется на основании определенных коэффициентов α_c и α_τ из выражения (2.8). Масштабные коэффициенты α_q и $\alpha_э$ вычисляются тогда соответственно из выражений (2.7) и (2.9).

Легко видеть, что при математическом моделировании процесса промерзания грунтов все коэффициенты масштабирования являются размерными величинами, кроме,разумеется, коэффициента α_τ.

2.2. Способы учёта скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} \neq 0$

Моделирование скрытой теплоты способом подключения в узел дополнительной емкости. Рассмотрим одномерную задачу промерзания грунтов, записанную в прямоугольной системе координат в общем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) - c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega = 0 . \qquad (2.10)$$

Функцию скрытых теплот $\omega = \frac{Q_0}{\Delta \tau}$ преобразуем следующим образом:

$$\omega = \frac{Q_0}{\Delta \tau} \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{Q_0}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (2.11)$$

Учитывая (2.11), уравнение (2.10) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \left(c\gamma + \frac{Q_0}{|\Delta T|}\right)\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \qquad (2.12)$$

Выражение $\frac{Q_0}{|\Delta T|}$ в (2.12) представляет дополнительную объёмную теплоемкость, которой при электромоделировании соответствует дополнительная электрическая ёмкость $C_ф$.

Чем меньше ΔT, а следовательно чем больше дополнительная $C_ф$, тем больше точность моделирования. Однако при её выборе нужно еще руководствоваться конструктивными особенностями интегратора. ΔT нужно выбирать так, чтобы соответствующая разность потенциалов ΔV измерялась достаточно точно. На УСМ-1 ΔV следует брать от 3 до 10% от максимальной величины 20 в. Может получиться, что $C_ф$ не разряжается до первоначального значения за время восстановления.

В этом случае для каждой такой дополнительной емкости $C_ф$ нужны от одного до трех разрядников, либо для этого следует применять герконы, закрывая ими $C_ф$ на время восстановления.

Время наступления $V_{кр}$ и $V_{кр}+\Delta V$ фиксируется измерительным устройством. При достижении в узле $V_{кр}+\Delta V$ $C_ф$ отключается.

Моделирование скрытой теплоты подачей в узловую точку среднего тока. После разбивки области на элементарные блоки, расчёта электрических сопротивлений и ёмкостей подсчитываем количество электричества для каждого блока-эквивалент скрытой теплоты льдообразования по формуле

$$q_j = \alpha_a \cdot i \, \omega_{об} \cdot \gamma_в \cdot 6 \cdot V_j \qquad (2.13)$$

При $V_{кр}$ необходимо отвести от каждого блока q_i :

$$q_i = \int_{\tau_1}^{\tau_2} J_i(\tau) d\tau \qquad (2.14)$$

где τ_1 и τ_2 – соответственно время начала и окончания фазового перехода.

Функция $J_i(\tau)$ должна быть такой, чтобы во время фазового перехода потенциал в узле оставался постоянным и соответствовал $V_{кр}$. Однако функцию $J_i(\tau)$ найти очень трудно. Поэтому приходится брать среднеинтегральное значение электрического тока за время $\Delta\tau$:

$$J_{срj} = \frac{\int_{\tau_1}^{\tau_2} J_i(\tau) d\tau}{\Delta\tau} = \frac{q_i}{\Delta\tau} \qquad (2.15)$$

Уравнение (2.15) с двумя неизвестными. Эту неопределенность, однако, можно преодолеть подбором $J_{срj}$ и $\Delta\tau$ таким образом, чтобы в конце $\Delta\tau$ потенциал соответствовал температуре промерзания. На УСМ-1 ток задается с каналов ГУ-П или ГУ-ПМ. Малую величину электрического тока можно задать более точно, применяя "масштабы" каналов ГУ-П.

На электромодели переход происходит не при постоянном напряжении, а при несколько изменяющемся в сторону положительного значения. Это объясняется тем, что задается среднеинтегральное значение тока на промежуток времени $\Delta\tau$. Величина этого напряжения относитель-

но малая и на точности решения сказывается незначительно.

Время наступления и окончания фазового перехода для узла регистрируется измерительным устройством. Эксперименты показали, что для одномерных задач промерзания при подаче среднеинтегрального значения тока в узел ступенька фазового перехода получается достаточно хорошей. При моделировании двухмерных задач, учитывая взаимное влияние соседних блоков, в которых также идет процесс фазового перехода, при учёте скрытой теплоты среднеинтегрального значения тока для получения ступеньки фазового перехода недостаточно и приходится давать два или несколько больше среднеинтегральных значений на все время фазового перехода. В этом состоит неудобство данного метода.

Скрытую теплоту на электромодели можно учитывать путём задания через сопротивление R_ω напряжения $V_м$. R_ω рассчитывается по формуле (1.14). Такая схема представляет собой балансную систему: при уменьшении (увеличении) напряжения в узле растёт (падает) ток через сопротивление R_ω, а напряжение в узле практически остается постоянным. Можно подавать не $V_м$, а в несколько раз уменьшенное напряжение, соответственно уменьшая во столько же раз R_ω. Эксперименты это полностью подтвердили.

Моделирование скрытой теплоты путём отбора из узловой точки нужного количества электричества каналом ГУ-1. Два перечисленных выше способа учёта скрытой теплоты при моделировании двухмерных задач достаточно трудоёмки, хотя значительно лучше метода Либмана. Предлагаемый способ в несколько раз менее трудоёмок по сравнению с предыдущими и более точен. Сущность его применения на УСМ-1 заключается в следующем.

Когда в узловой точке наступит напряжение $V_{кр}$, к ней подключается канал задания граничных условий I рода ГУ-1, который работает по временной программе. Каналом $V_{кр}$ удерживается в узле до тех пор, пока он не отберёт необходимого количества электричества $q_э$, соответствующего скрытой теплоте льдообразования для этого

узла. После этого канал отключается.

В качестве измерительного устройства количества заряда был сконструирован прибор, который состоит из чувствительного гальванометра магнитоэлектрической системы М 195/1 и телефонных ключей для независимого измерения тока в каждой узловой точке сетки. Диапазон измерения тока прибором был расширен до 560 мка. Внутреннее сопротивление прибора пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением сетки (на используемых практически диапазонах от 7 до 560 мка оно колеблется от 18 до 0,2 ома).

Прибор работает следующим образом (рис. 2.1). На вход ключа (Вх.) с канала ГУ-1 подается необходимое напряжение в соответствии с веременной программой. С выхода ключа (Вых.) это же напряжение через нормально замкнутые контакты ключа, когда он находится в положении, работа поступает в узловую точку. При включении ключа в положение "Измерение" нормально замкнутые контакты его разрываются, а в разрыв их включается гальванометр G, который отмечает среднеинтегральное значение тока за период. Так как в приборе используется один гальванометр для измерения тока в нескольких узловых точках области, то для каждого узла необходим свой ключ. Прибор сконструирован так, что при нажатии определенного ключа происходит измерение в узловой точке, принадлежащей только этому ключу. Внешний вид прибора изображен на рис. (2.2).

Перед решением на машине УСМ-1 необходимо точно замерить при помощи осциллографа ИО-4 полный период решения $T_э$ машины. Так, при $\tau_1 = 10$ мсек и $\tau_2 = 30$ мсек $T_э = 37{,}8$ мсек, а при $\tau_1 = 20$ мсек и $\tau_2 = 30$ мсек $T_э = 58{,}6$ мсек.

Принцип измерения количества электричества основан на измерении среднеинтегрального тока $J_{срj}$ за период T:

$$J_{срj} = \frac{1}{T}\int_{\tau_н}^{\tau_к} J(\tau)\,d\tau \qquad (2.16)$$

Откуда количество электричества для узла

$$q = J_{срj} \cdot T \qquad (2.17)$$

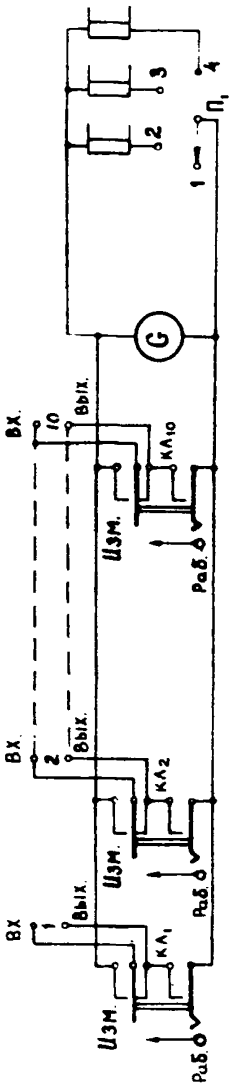


Рис. 2.1. Принципиальная схема прибора для измерения среднего значения тока при решении задач замораживания горных пород на R C-сетке.

При моделировании на R C-сетках вначале, несмотря на то, что время представлено непрерывно, следует, учитывая большие градиенты температур, брать время натуры $\tau_н$ небольшое (один или несколько десятков часов). Машинное время τ_1 при этом также следует брать минимальное, так как при желании увеличить $\tau_н$ этого можно добиться изменением положения переключателя τ_1 машины.

Соответственно $J_{ср}$ нужно изменить. В дальнейшем в процессе расчёта время натуры нужно увеличить в несколько раз. Сопротивления сетки должны быть соответственно увеличены во столько же раз, а электрические ёмкости, учитывая их небольшой разброс и дискретность набора, следует оставить прежними. Совершенно очевидно, что при данном времени модели τ_1 $J_{ср}$ остается неизменным, так как α_γ и α_c не меняются.

Преимущества этого способа особенно наглядно проявляются при решении двухмерных задач,

когда нужно учитывать взаимное влияние соседних блоков.

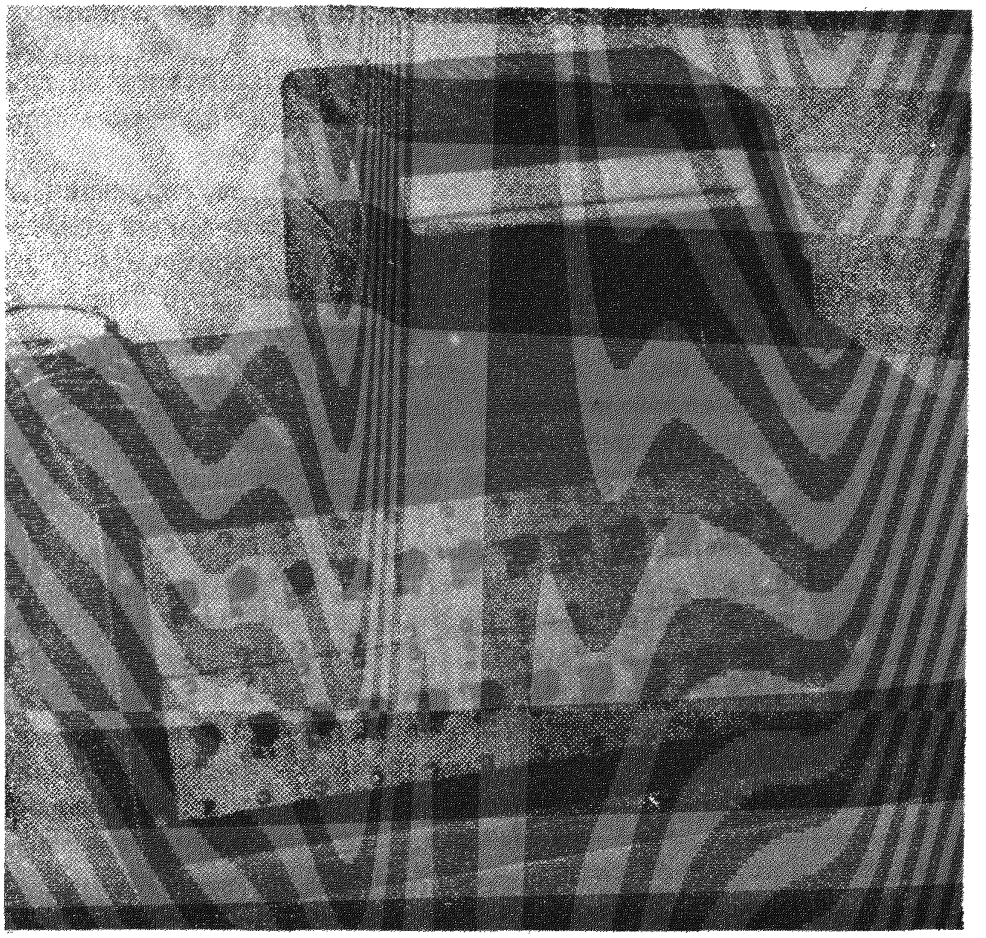


Рис. 2.2. Прибор для измерения среднеинтегрального значения тока.

2.3. Блок учёта нелинейности (БУН)

При решении нелинейных задач математической физики в процессе решения необходимо изменять параметры исследуемой области, т.е. изменять сопротивления и емкости электрической сетки. БУН предназначен для изменения физических свойств области методом непрерывного представления времени. Пусть, например, нам нужно изменить сопротивление R_y на R_y^0 ($R_y^0 < R_y$) (рис.2.2).

Для этого нужно параллельно сопротивлению R_y под-

ключить такое сопротивление $R'_у$, чтобы общее сопротивление стало $R_у$. Подключение сопротивления $R'_у$ производится в необходимый момент времени решения задачи контактами $1P_2$ электронного ключа, выполненного на транзисторе ПП$_1$ и Реле P_1. При необходимости увеличить сопротивление ключ может работать на размыкание.

Специфические особенности работы коммутирующих элементов в сетке сопротивлений препятствуют применению бесконтактных ключей, имеющих конечное обратное (5–10 мОм) и прямое (5–15 ом) сопротивления, сравнимые с сопротивлением сетки. Поэтому в качестве коммутирующих элементов для изменения параметров сетки были использованы герметизированные магнитоуправляемые контакты (герконы), по своим параметрам приближающиеся к бесконтактным ключевым элементам, но лишенные их недостатков, описанных выше.

В простейшем виде геркон представляет собой два частично расплющенных отрезка пермалоевой проволоки, заваренных в стеклянную ампулу, наполненную инертным газом. Под воздействием на геркон магнитного поля достаточной напряженности пермалоевые проволоки пружины притягиваются друг к другу, соединяясь электрически. Переходное сопротивление контакта не превышает 0,2 ома. При уменьшении напряженности магнитного поля ниже определенной величины пружины под воздействием упругих сил возвращаются в исходное состояние и контакт размыкается. Один или несколько герконов, помещенных в электромагнитную катушку, образуют простые безъякорные реле на замыкание. Механические движения в герконовых реле сведены до минимума и заключаются в смещении конца пружины на расстояние от нескольких десятков до нескольких сотен микрон. Поэтому чувствительность и быстродействие у герконовых реле намного выше, чем у обычных электромагнитных реле. Быстродействие его на замыкание не превышает 1 мсек, а на размыкание $\approx$ 0,3 мсек. Среднее число безотказных срабатываний при коммутации малых токов (до 10 ма) близко к 10^9.

Основным элементом БУН является ячейка (см. рис. 2.3 и 2.4), состоящая из полупроводникового ключа на

транзисторе П214 и подключаемых к нему нескольких герконовых реле.

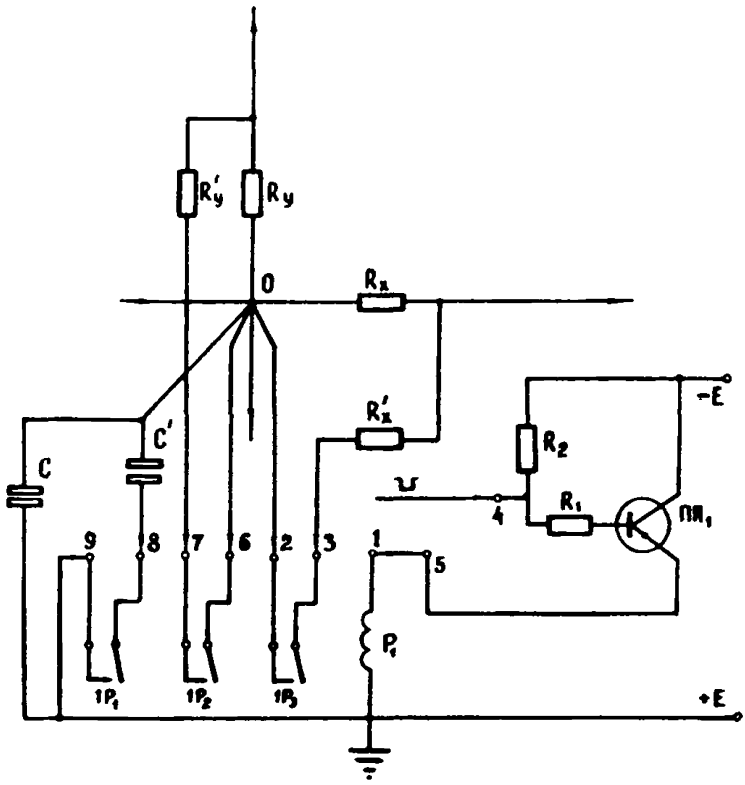


Рис. 2.3. Схема подключения дополнительных сопротивлений и ёмкости к узловой точке 0 при помощи герконового реле.

Полупроводниковый ключ управляется каналом ГУ-1, который имеет временную программу. При поступлении на вход 4 отрицательного импульса напряжения транзистор $ПП_1$ отпирается и через обмотку герконового реле потечёт ток, контакты геркона сомкнутся и произведут подключение дополнительного сопротивления. В качестве дополнительных сопротивлений R'_x и R_y' используются магазины сопротивлений блока сетки. К одному транзисторному ключу возможно подключение 10–15 катушек герконовых реле.

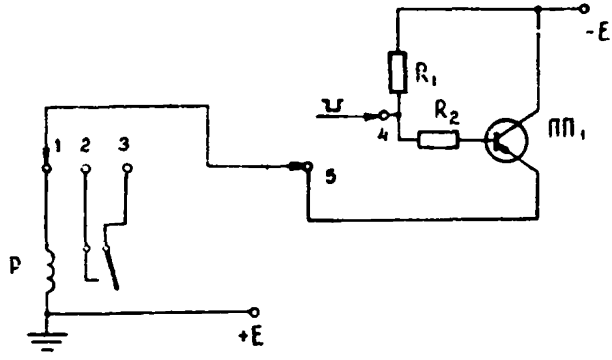


Рис. 2.4. Схема переключающей ячейки с одним герконом.

В свою очередь, к одному каналу ГУ-1 возможно подключение нескольких полупроводниковых ключей. В приборе используется 64 полупроводниковых ключа, 216 одиночных герконов и 54 двойных геркона. Питание прибора осуществляется от мощного выпрямителя с регулируемым напряжением от 0 до 30 в. Все входы и выходы ключей(4 и 5), входы катушек реле (1) и выходы контактов герконов(2,3)

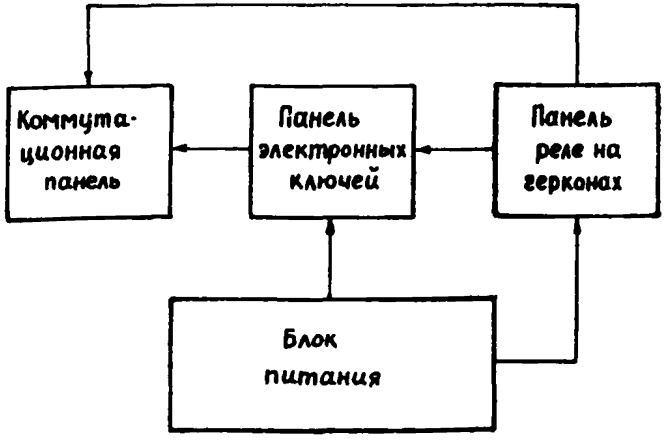


Рис. 2.5. Блок-схема прибора для изменения параметров решаемой задачи.

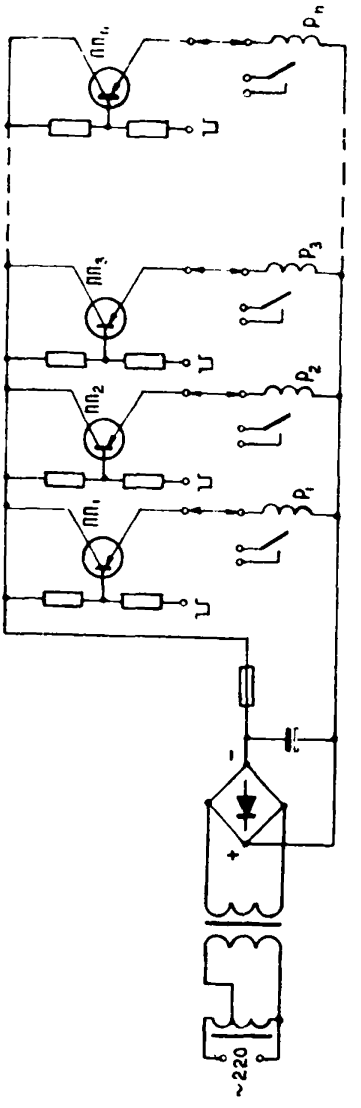


Рис. 2.6. Принципиальная схема прибора для изменения параметров модели.

выведены на лицевую панель. При помощи шнуров, прилагаемых к машине УСМ-1, возможна различная их коммутация. На рис. (2.5) и (2.6) приведены блок-схема и сокращенная принципиальная схема прибора учёта нелинейностей.

У всех герконовых реле было проверено время отпускания. Время срабатывания лежит в пределах от 0,4 до 0,8 мсек, а время отпускания от 0,2 до 0,4 мсек. При работе ключей это необходимо учитывать и запитывать ключи с соответствующим опережением. В связи с этим была доработана схема временного дешифратора машины УСМ-1. С него были выведены импульсы, соответствующие -2, -3, -4, -5, -6, -7 и -8% времени τ_1.

Описанный прибор можно использовать для изменения параметров области, не прерывая времени решения, не только при решении теплофизических задач с фазовыми переходами, но и других нелинейных задач.

2.4. Учёт скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} \neq 0$

В математической формулировке задачи промерзания грунта для случая $\Delta T_{кр} \neq 0$ выделение теплоты льдообразования рассматривается как временное увеличение теплоёмкости при $\lambda(T)$ и $(c\gamma)(T)$ в мерзлой зоне. Это увеличение настолько значительно, что технические особенности электроинтегратора УСМ-1 не позволяют провести моделирование указанной задачи с использованием ёмкостей $C_{эф}(T)$.

Для этого случая предлагается следующий метод моделирования поставленной задачи.

Решение задачи идет "шаг за шагом". Зависимость теплофизических характеристик λ и $(c\gamma)$ от температуры за данный промежуток $\Delta\tau$ учитывается, как и при моделировании на R –сетках (см.1.7 гл.1). Для изменения параметров модели используется БУН.

При достижении в узловой точке напряжения $V_{0,н}$, соответствующего $T_{0,н}$, на промежуток времени $\Delta\tau$ в узел подключается канал ГУ-1 (рис.2.7), на который с функционального преобразователя (ФП) подается линейно изменяющаяся функция напряжения (этим предполагается, что за $\Delta\tau$ функция $C_{оп}(T)$ изменялась бы линейно).

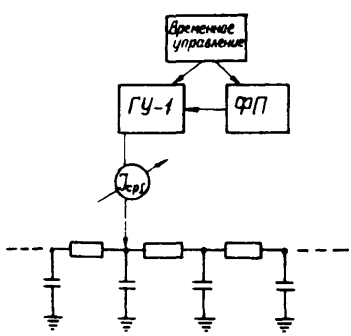


Рис.2.7. Схема учёта скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} = 0$ с помощью ФП и канала ГУ-1.

Обычно берут напряжение $V_{0,н} = 0$. Значение напряжения на конец $\Delta\tau$ берётся приближенно, так как оно является неизвестной величиной. Далее замеряется количество электричества $q_э$, потребляемое каналом ГУ-1 за время $\Delta\tau$ прибором М 195/1. Используя полученное значение $q_э$ и график функции $q_э = q_э(V)$, вводят соответствующие коррективы в наклон функции с

канала ГУ-1 и последовательными приближениями добиваются соответствия измеренного $q_э$ графику $q_э = q_э(V)$.

От величины $\Delta\tau$ зависит только точность. В начале решения $\Delta\tau$ следует брать поменьше, учитывая большие градиенты T, затем постоянно увеличивая.

При описанном здесь способе учёта скрытой теплоты для создания линейно изменяющихся функций на канале ГУ-1 машины УСМ-1 требуются функциональные преобразователи, число которых равно всего 20, что ограничивает количество узловых точек, в которых идет процесс льдовыделения одновременно.

Более приемлемым является следующий способ учёта скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} \neq 0$. При значении потенциала $V_{0,н}$ в узловую точку на промежуток $\Delta\tau$ с канала ГУ-1 через переменное дополнительное сопротивление $R_{доп}$ подается потенциал $V_{0,н}$. Канал включается программой (рис. 2.8).

Здесь также сравниваем замеренное прибором М 195/1 количество электричества $q_э$ с графиком $q_э(V)$. При несоответствии этих величин, изменяя величину дополнительного сопротивления $R_{доб}$, добиваемся соответствия.

Данный способ менее трудоёмок по сравнению с предыдущим, и кроме того, позволяет одновременно учитывать скрытую теплоту для большего числа узловых точек.

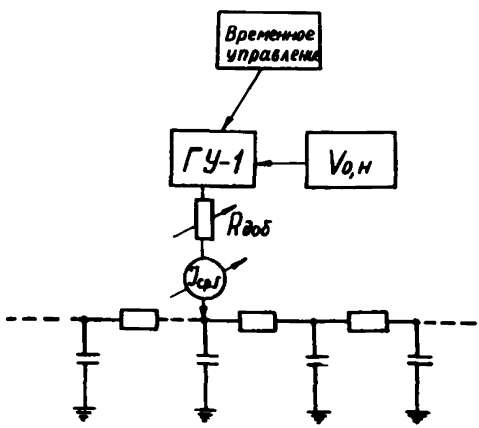


Рис. 2.8. Схема учёта скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} = 0$ с помощью ГУ-1 и $R_{доб}$.

2.5. Комбинированный способ решения уравнений типа теплопроводности на сеточных электромоделях (на примере УСМ-1)

В практике решения некоторых задач, описываемых уравнениями типа теплопроводности, на сеточных электроинтеграторах (RC-модель) неизбежен большой диапазон изменения емкостей. К таким задачам относятся, в частности, задача промерзания грунтов для случая, когда $\Delta T_{кр} \neq 0$, задача промерзания грунтов в одиночной колонке, задача фильтрации при напорно-безнапорном режиме и другие. При их исследовании разброс по ёмкостям достигает нескольких порядков, в то время как на УСМ-1,к примеру, он равен всего 15. Это обстоятельство в значительной степени сужает количество типов решаемых задач на RC-сетках.

Такие задачи могут быть решены методом Либмана,но применение его к нелинейным задачам с разрывными коэффициентами, как уже отмечалось выше, нецелесообразно, ввиду большого объёма работ.

Предлагается новый способ решения таких задач (назовём его комбинированным) на RC-сетках. Сущность его заключается в следующем.

До тех пор, пока существующий диапазон изменения ёмкостей удовлетворяет диапазону изменения существующих характеристик натуры, решение ведется обычным способом. При наступлении в узловой точке в момент времени τ_0 "критического" потенциала V_0 , при котором ёмкость должна резко увеличиться, перепад (скачок) емкости с этого момента времени на время $\Delta\tau$ будет моделироваться определенным образом рассчитанным сопротивлением R_τ . Одним концом сопротивление R_τ подключается к узловой точке, а на свободный конец его подается по временной программе с канала ГУ-1 напряжение V_o .

Для обоснования этих рассуждений рассмотрим следующие электрические узлы сопротивлений и ёмкостей (рис. 2.9,а,б).

Разностно-дифференциальные уравнения на основании первого закона Кирхгофа для цепей, изображенных на

Рис. 2.9.
Уэлы RC-сетки.

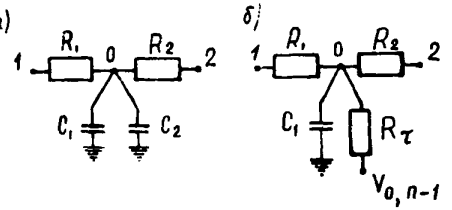


рис. 2.9,а,б, будут соответственно:

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} = (C_1 + C_2)\frac{\partial V}{\partial \tau}\ ; \qquad (2.18)$$

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} = C\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \frac{V_{0,n} - V_{0,n-1}}{R_\tau}\ , \qquad (2.19)$$

где R_τ рассчитывается по формуле

$$R_\tau = \frac{\Delta \tau}{C_2}\ . \qquad (2.20)$$

При выборе интервалов $\Delta\tau$ следует руководствоваться характером изменения потенциальной функции.

Выразим $V_{0,n-1}(x,\tau)$ через функцию $V_{0,n}(d,\tau)$ при помощи ряда Тейлора через приращение времени $\Delta\tau$:

$$V_{0,n-1}(x,\tau) = V_{0,n} - \frac{\partial V_{0,n}}{\partial \tau}\Delta\tau + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V_{0,n}}{\partial \tau^2}\Delta\tau^2 - \cdots \qquad (2.21)$$

Подставив выражение (2.21), ограничиваясь первыми двумя членами разложениями, в уравнение (2.19) и заменяя R_τ его значением из (2.20), получим

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} = C_1\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \frac{V_{0,n} - V_{0,n} + \frac{\partial V_{0,n}}{\partial \tau}\Delta\tau}{\frac{\Delta\tau}{C_2}} =$$

$$= C_1\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + C_2\frac{\partial V_0}{\partial \tau} = (C_1 + C_2)\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\ , \qquad (2.22)$$

что требовалось доказать.

Так как при этом способе решения время является непрерывной величиной, то здесь вообще не возникает проблемы устойчивости решения, а от выбора величины временных интервалов зависит только точность решения.

При отработке нескольких интервалов $\Delta\tau$ на свободный конец R_τ должна быть подана ступенчатая функция, сформированная при помощи функциональных преобразователей машины УСМ-1. Таких преобразователей машина имеет 20 штук, что явно недостаточно при электромоделировании. Поэтому следует использовать еще методику формирования ступенчатых во времени функций с помощью формирователей импульсов. Эта методика подробно разработана А.П.Козьменко [19]. Использование её даёт возможность дополнительно получить около 100 таких функций.

Если R_τ будут меняться для разных $\Delta\tau$,то можно для учёта этих изменений использовать блок учёта нелинейностей (БУН), описанный выше.

Здесь описан случай применения комбинированного метода при скачкообразном увеличении емкости. Более трудным представляется случай, когда емкость будет скачкообразно уменьшаться, так как сопротивление R_τ при этом становится отрицательным. Для его реализации необходим усилитель постоянного тока. Кроме того, требуется следящее устройство, которое автоматически поддерживало бы нужную величину отрицательного сопротивления во времени. Если такое устройство будет создано, то комбинированный способ можно применять и в этом случае.

Комбинированный способ легко можно распространить и на случай не скачкообразного, а плавного изменения емкости в зависимости от потенциала, в частности для задач промерзания грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$. Учёт нелинейности при этом производится по методике, описанной в п.1.7 гл. 1.

Из изложенного видно, что предлагаемый способ представляет собой гибрид методов RC- и R -сеток и применение его к исследованию процессов, описываемых уравнениями типа теплопроводности, в существенной степени расширяет класс решаемых на электромоделях задач.

§ 2.6. К вопросу точности решения, получаемого на R С-сетках

Метод электромоделирования на R С-сетках задач теплопроводности, как всякий экспериментальный метод, даёт также приближенное решение заданного уравнения. Помимо погрешностей решения, присущих R -сеткам, здесь добавляются погрешности вследствие утечки в конденсаторах. (Это не говорит, однако, о том, что точность решения задач на R С-сетках при одинаковой разбивке по пространству хуже, чем на R -сетках).

При эксплуатации модели неизбежна утечка в изоляции диэлектрика сеточных конденсаторов. Конденсаторы во время зарядки пропускают ток утечки и постепенно разряжаются через сопротивление утечки. Узловая точка сетки (одномерный случай) фактически соответствует схеме, представленной на рис. 2.10.

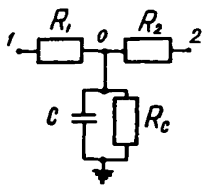


Рис. 2.10. Типовой узел R С-сетки с включением сопротивления утечки конденсатора R_c .

Влияние сопротивления утечки на точность решения задачи зависит от напряжения в рассматриваемой точке. Если оно достаточно мало, ток утечки также очень мал и погрешность решения будет незначительной. Погрешность увеличится с увеличением напряжения в узловой точке. Подробный анализ этого источника погрешностей проведен *В.Пашкисом и М.Хейслером* [11]. *Для уменьшения погрешностей* от тока утечки желательно брать в модели меньшее число блоков, тогда как для уменьшения погрешности от замены непрерывного поля дискретной моделью необходимо включать возможно большее число блоков. В качестве компромиссного решения при моделировании одномерных задач авторы рекомендуют применять 6–8 блоков.

Сопротивления утечки включают сопротивления диэлектрика конденсаторов, сопротивления соединительных проводов и панели. Можно показать, что влияние этих утечек мо-

жет быть объединено и включено в схему в виде одного сопротивления в каждую узловую точку параллельно с сопротивлением утечки конденсатора R_c . Отметим, что проведенный анализ погрешности характерен для RC-моделей с большой постоянной времени (решение задачи на приборе В.Пашкиса обычно длится от 5 до 15 мин) .

Применительно к УСМ-1, учитывая что сопротивление изоляции машины не менее 50 мом, а сопротивление утечки применяемых конденсаторов R_c примерно на порядок больше, а также то обстоятельство, что диапазон применяемых при решении задач напряжений находится в пределах $\pm$20 в и что точность измерения протекающего в сетке тока $\pm$50 мка и сама машина принадлежит к RC-модели с малой постоянной времени, можно считать, что токи утечки на точность решения практически не влияют.

В большинстве экспериментальных работ погрешность вычисляется относительная, т.е. как отношение разности точного и приближенного решения к точному решению:

$$\delta = \frac{V_{точн} - V_{изм}}{V_{изм}} \cdot 100\% \qquad (2.23)$$

Однако это определение не подходит к моделирующим устройствам и к решаемым на них задачам, т.к. точное значение потенциала в точках поля может быть равно нулю (или весьма мало), в этом случае относительная погрешность, согласно формуле (1.23), равна бесконечности, и создается впечатление о неправильности решения, в то время как $V_{изм}$ может быть как угодно близко к точному [14].

Более приемлемым определением процентной погрешности является отнесение погрешности не к точному значению решения в данной точке, а к 100% шкалы измерительного устройства:

$$\delta = \frac{V_{точн} - V_{изм}}{\Delta V_{max}} \cdot 100\% \qquad (2.24)$$

Формула (2.24) также не лишена недостатков, в частности при значениях функций, отличающихся на один или более порядков от 100%, она не гарантирует приемлемой

степени точности, а в некоторых случаях является недостаточной для оценки точности решения задач с помощью электромоделирования.

Можно дать некоторые практические рекомендации, выполнение которых будет содействовать повышению точности решения задач нестационарной теплопроводности на RC-сетках [14].

1. В начале моделирования время натуры нужно брать достаточно малое, чтобы обеспечить приемлемую точность замера получаемых функций на участках значительной крутизны. В частности, на УСМ-1 погрешность измерения автоматического измерительного устройства изменяющихся во времени напряжений, скорость изменения которых не превышает 50% амплитуды на 1% времени, вычисляется по формуле

$$\delta \leq 0{,}2 \left(1 + \frac{\Delta V}{\Delta \tau}\right) \%. \qquad (2.26)$$

2. Следует использовать весь диапазон изменения потенциалов, имеющихся на модели.

3. В местах, где ожидаются большие градиенты потенциала, следует поставить электрическую лупу или произвести раздельное моделирование в более крупном масштабе, используя данные основной модели для задания граничных условий. При отсутствии электрической лупы для соединения сеток с разными шагами можно использовать магазины добавочных сопротивлений.

4. В тех случаях, где это возможно, следует моделировать симметричные области.

5. При замерах поля градиентов следует иметь в виду, что в случае однородной среды значения их изменяются плавно и амплитудные значения наблюдаются вблизи точек задания граничных условий.

Для контроля отсутствия случайных обрывов сопротивлений сетки можно строить зависимости $\Delta V = f(x)$, где ΔV – составляющая градиента потенциала в направлении x; соединяя концы векторов ΔV, получаем плавную кривую. Резкие скачки значений ΔV в соседних точках, выпадающие из плавной линии, показывают места обрывов или неправильных наборов сопротивлений.

Этот метод, названный Л.Г.Коганом "методом спрямления касательных", позволяет обнаружить неисправности модели без перебора сетки или граничных условий.

Глава 3

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ К ЗАДАЧАМ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТА

3.1. Критерии подобия, используемые при моделировании

Принцип подобия позволяет из математической модели процесса, т.е. из дифференциальных уравнений в краевых условий, получить целый ряд следствий, не прибегая к самому решению. В основу метода положен принцип подобия температурных полей (в общем поля могут иметь различную физическую природу), который заключается в том, что если два температурных поля, описываемых уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T ; \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \tau'} = a' \nabla^2 T , \qquad (3.2)$$

подобны, то это означает, что вид функций, выражающих возможное решение обоих уравнений, одинаков, а аргументы: размеры тела l_i, температура T, время τ, коэффициент температуропроводности a, входящие под знак функции, в общем случае пропорциональны:

$$l = \alpha_l l' ; \quad T = \alpha_T T' ; \quad \tau = \alpha_\tau \tau' ; \quad a = \alpha_a a' .$$

Если перепишем (3.2) в форме

$$\frac{\alpha_\tau \partial T}{\alpha_T \partial \tau} = \frac{1}{\alpha_a} \frac{\alpha_{l^2}}{\alpha_\tau} a \nabla^2 T \qquad (3.3)$$

и сравним с уравнением (3.1), то уравнения тождественны только в том случае, если множители в правой и левой частях между собой равны, т.е. если

$$\frac{\alpha_a \alpha_\tau}{\alpha_{l^2}} = 1 ; \qquad (3.4)$$

Выражение (3.4) показывает, что для температурного поля, заданного системой значений a, τ, ℓ, можно найти бесчисленное множество других полей, подобных ему и вполне определяемых подобными системами значений a', τ', ℓ'. Следовательно,

$$\frac{a\tau}{\ell^2} = \frac{a'\tau'}{\ell'^2} = \frac{a''\tau''}{\ell''^2} = \ldots idem$$

Откуда получаем

$$\frac{a\tau}{\ell^2} = F_o \qquad \text{(критерий подобия Фурье)} \qquad (3.5)$$

Критерий подобия Фурье используется как при физическом, так и при математическом моделировании.

Для вывода всех критериев подобия, которые необходимо соблюдать при исследовании процесса промерзания грунта на электрических моделях RC-сетках, рассмотрим одномерную математическую модель промерзания грунта с поверхности, описанную в п. 1.1. гл. 1.

Используя описанный выше способ, легко увидеть, что для уравнений (1.2) и (1.3) критерии Фурье соответственно будут:

$$\frac{\lambda_1\tau}{C_1\chi^2} = idem; \qquad (3.6)$$

$$\frac{\lambda_2\tau}{C_2\chi^2} = idem. \qquad (3.7)$$

Третий критерий подобия, выведенный Био, связывает температуру $T_в$ с законом теплообмена между поверхностью грунта и окружающей средой. Из уравнения (1.1) получаем

$$\frac{\alpha\chi}{\lambda_1} = idem. \qquad (3.8)$$

Из критериев (3.6) – (3.8) видно, что при отсутствии в тепловых процессах изменения агрегатного состояния масштаб температур может быть выбран произвольным. Анализ уравнения (1.5) позволяет вывести дополнительные критерии подобия, учитывающие изменения агрегатного состоя-

ния вещества, в которых масштаб температур присутствует:

$$\frac{\lambda_1 T_1 \tau}{x^2 Q_0} = idem; \qquad (3.9)$$

$$\frac{\lambda_2 T_2 \tau}{x^2 Q_0} = idem; \qquad (3.10)$$

$$\frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_2 T_2} = idem. \qquad (3.11)$$

Критерий (3.11) является производным критериев (3.9) и (3.10). Поэтому его можно не рассматривать. Таким образом, при моделировании процесса промерзания грунта, когда $T_{кр} = const$, а λ и $c\gamma$ меняются скачкообразно, необходимо соблюсти критерии (3.8) – (3.10).

3.2. Применение подобных преобразований при расчёте температурных полей в грунтах

Начало применения подобных преобразований к исследованию температурных полей в грунтах положил в 1952 г. С.Г.Гутман [8]. Он рассматривал стационарное температурное поле.

Сущность его метода заключается в проведении составной среды, состоящей из двух однородных областей с разными коэффициентами теплопроводности, к одной однородной среде.

Рассмотрим одномерное стационарное температурное поле, состоящее из полуограниченного массива мерзлого талого грунта, математическая модель которого следующая.

В мерзлой зоне

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0. \qquad (3.12)$$

В талой зоне

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0. \qquad (3.13)$$

На границе раздела зон – условия теплового равновесия:

$$T_1 = T_2 = 0^{\circ}C; \tag{3.14}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial X} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial X} \tag{3.15}$$

Граничные условия на контуре области I рода

$$T = T(S) \tag{3.16}$$

Для решения этой задачи без применения подобных преобразований использовался бы способ последовательных приближений. Для этого по всей области значение коэффициента теплопроводности принимается равным λ_2 и соответственно ему рассчитываются все сопротивления. Находится положение нулевой изотермы. Внутри этой зоны принимается новое значение λ , U , в соответствии с ним рассчитываются в этой зоне сопротивления. Далее определяется новое положение нулевой изотермы и т.д. до получения совпадения.

Применение подобных преобразований позволяет избежать последовательных приближений и получить решение в один приём.

Приведём разнородные зоны к единой среде с коэффициентом теплопроводности $\lambda_{пр}$. Для этого введем понятие приведенной температуры:

$$T_{пр} = \frac{\lambda}{\lambda_{пр}} T \tag{3.17}$$

Тогда соответственно для зон:

$$T_{1,пр} = \frac{\lambda_1 T_1}{\lambda_{пр}} ; \tag{3.18}$$

$$T_{2,пр} = \frac{\lambda_2 T_2}{\lambda_{пр}} . \tag{3.19}$$

$T_{1,пр}$ и $T_{2,пр}$ удовлетворяют уравнениям соответственно (3.12) и (3.13), условия (3.14), (3.15) на границе разде-

ла, исходя из (3.18) и (3.19), запишутся так:

$$T_{1,пр} = T_{2,пр} = 0; \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial T_{1,пр}}{\partial X} = \frac{\partial T_{2,пр}}{\partial X}. \tag{3.21}$$

Таким образом, в приведенном тепловом потоке $T_{пр}$ – нулевая изотерма, а $T_{1,пр}$ и $T_{2,пр}$ разделяются как для однородной области, независимо от коэффициента теплопроводности приведенной среды. При определении однородного поля необходимо согласно (3.17) корректировать граничные условия на контурах рассматриваемой области:

$$T_{пр}(S) = \frac{\lambda}{\lambda_{пр}} T(S). \tag{3.22}$$

Если принять за приведенную среду одну из зон, например талую, приняв $\lambda_{пр} = \lambda_2$, будем иметь

$$T_{1,пр} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_1; \tag{3.23}$$

$$T_{2,пр} = T_2; \tag{3.24}$$

$$T_{1,пр}(S_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_1(S_1) \tag{3.25}$$

$$T_{2,пр}(S_2) = T_2(S_2). \tag{3.26}$$

Таким образом, температурные поля в талой зоне определяются без искажения, а в мерзлой зоне они являются увеличенными в $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ раз.

Этот способ может быть применен к исследованию экспериментально или аналитически плоских и пространственных задач.

Такое приведение при электромоделировании означает, что все электрические сопротивления данной зоны и все разности потенциалов изменяются в некотором отношении. Электрический ток после такого преобразования останется прежним.

Следует отметить, что это приведение возможно только для однородных грунтов, вернее, в случаях, когда граница раздела не проходит по грунтам с различными теплофизическими характеристиками.

В 1957 г. проф. В.С.Лукьяновым был распространён принцип С.Г.Гутмана на решение задач нестационарного процесса промерзания – оттаивания грунтов. При расчётах промерзания грунтов на гидравлическом интеграторе применение метода приведения составной среды к однородному виду относительно одного из теплофизических параметров грунта позволяет существенно упростить процесс решения и повысить точность. Еще большие преимущества такое приведение даёт при расчётах процесса промерзания грунта на R С-сетках с искусственной периодизацией (например на УСМ-1), так как для автоматического применения параметров R С-сетки требуется довольно дорогое и сложное электронное оборудование.

Теоретическое обоснование применения принципа С.Г. Гутмана дано в работе В.С.Лукьянова и Н.А.Цуканова [23].

Рассматривая математическую формулировку п.1.1 гл.1 и критерии подобия (3.6) – (3.10), можно установить, какие преобразования нужно выполнить с параметрами исходной системы при приведении её к однородному виду при сохранении теплового подобия исходной и приведенной системы. Дополнительное условие – неизменность линейных и временных масштабов. Возможны тогда два случая приведения системы к однородному виду: относительно коэффициентов теплопроводности и относительно объёмной теплоемкости.

Приведение к однородному виду в отношении коэффициентов теплопроводности. Произведем приведение относительно коэффициента теплопроводности талого грунта, т.е. считаем $\lambda_{пр} = \lambda_2$. Тогда из критериев (3.6) – (3.10) получим:

$$\frac{\lambda_1 \tau}{C_1 x^2} = \frac{\lambda_2 \tau}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} C_1 x^2} = \frac{\lambda_2 \tau}{C_{1пр} x^2} = idem; \qquad (3.27)$$

$$\frac{\lambda_2 \tau}{C_2 X^2} = idem\,; \qquad (3.28)$$

$$\frac{dx}{\lambda_1} = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} dx}{\lambda_2} = \frac{\alpha_{пр} X}{\lambda_2} = idem; \qquad (3.29)$$

$$\frac{\lambda_1 T_1 \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} T_1 \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T_{1пр} \tau}{X^2 Q_2} \qquad (3.30)$$

$$\frac{\lambda_2 T_2 \tau}{X^2 Q_0} = idem. \qquad (3.31)$$

Из (3.27) – (3.31) следует, что для приведения к однородному виду в отношении коэффициента теплопроводности талого грунта параметры мерзлого слоя должны быть преобразованы так:

$$\lambda_{1,пр} = \lambda_1 K_\lambda = \lambda_2\,; \qquad (3.32)$$

$$\alpha_{пр} = \alpha K_\lambda\,; \qquad (3.33)$$

$$C_{1,пр} = C_1 K_\lambda\,; \qquad (3.34)$$

$$T_{1,пр} = \frac{T_1}{K_\lambda}\,, \qquad (3.35)$$

где

$$K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,. \qquad (3.36)$$

Параметры талого слоя остаются прежними. Вследствие приведенных преобразований температуры в слое мерзлого грунта искажаются относительно их истинных значений, и при обработке результатов расчёта это нужно учитывать.

Приведение к однородному виду в отношении объемной теплоёмкости. Как и в предыдущем случае, приведение произведем относительно объёмной теплоемкости талого грунта, т.е. $C_{пр} = C_2$.

Непосредственно из критериев подобия (3.6) – (3.10)

находим:

$$C_{1,пр} = C_1 K_c; \quad (3.37)$$

$$\lambda_{1пр} = \lambda_1 K_c; \quad (3.38)$$

$$\alpha_{пр} = \alpha K_c; \quad (3.39)$$

$$T_{1,пр} = \frac{T_1}{K_c}, \quad (3.40)$$

где $K_c = \frac{C_2}{C_1}$.

Параметры талого слоя, как и в первом случае, остаются неизменными.

При обработке результатов расчёта истинные значения температур в мерзлом грунте получаются умножением их приведенных значений на K_c.

Тепловые потоки после данных приведений в мерзлой и талой зонах остаются постоянными.

Отметим, что при моделировании на УСМ-1 процесса промерзания грунтов, учитывая довольно малый разброс электрических емкостей и дискретность набора, приведение нужно делать относительно объёмных теплоёмкостей.

Укажем также на то, что моделирование на гидравлическом интеграторе и УСМ-1 процесса промерзания грунта после приведения к однородному виду относительно объёмной теплоёмкости и коэффициента теплопроводности возможно, т.к. C_1 и C_2, а также λ_1 и λ_2 отмечаются друг от друга относительно мало, ибо при их разбросе в несколько порядков $T_{1,пр}$ и T_2 были бы величинами несравнимыми.

Полученные результаты справедливы также для двух- и трехмерных задач.

Распространим принцип С.Г.Гутмана на приведение составной среды из мерзло-талого грунта к однородному виду в отношении коэффициента теплопроводности и объёмной теплоёмкости одновременно. Как и в указанных выше случаях, приведение осуществим относительно параметров талого грунта при дополнительном условии неизменности линейных масштабов, масштабов времени, исходной и приведенной системы в мерзлой зоне. Это относится также к масштабам сопротивлений и ёмкостей в мёрзлой зоне.

$$\frac{\lambda_1 \tau}{C_1 X^2} = \frac{\lambda_1 K_\lambda \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{C_1 K_c X^2} = \frac{\lambda_{1пр} \tau_{1пр}}{C_{1пр} X^2} = \frac{\lambda_2 T_{1пр}}{C_2 X^2}; \quad (3.41)$$

$$\frac{\lambda_2 \tau}{C_2 X^2} = idem; \quad (3.42)$$

$$\frac{\alpha X}{\lambda_1} = \frac{\alpha K_\lambda X}{\lambda_2} = \frac{\alpha_{пр} X}{\lambda_2} = idem; \quad (3.43)$$

$$\frac{\lambda_1 T_1 \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_1 K_\lambda \frac{T_1}{K_c} \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T_{1пр} \tau_{1пр}}{X^2 Q_0} = idem; \quad (3.44)$$

$$\frac{\lambda_2 T_2 \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T_2 \frac{K_\lambda}{K_c} \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T_{2пр} \tau_{1пр}}{X^2 Q_0} = idem. \quad (3.45)$$

Поскольку граница промерзания принадлежит одновременно мерзлой и талой зонам, то в критериях (3.44)и(3.45) можно с одинаковым правом взять масштаб времени либо как для талой, либо как для мерзлой зоны. Самостоятельного же масштаба времени на границе раздела фаз взять нельзя. Эксперименты это полностью подтверждают. Следовательно, критерии (3.44), (3.45) могут быть заменены так:

$$\frac{\lambda_1 T_1 \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_1 K_\lambda \frac{T_1}{K_\lambda} \tau}{X^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T_{1пр} \tau}{X^2 Q_0} = idem; \quad (3.44^1)$$

$$\frac{\lambda_2 T_2 \tau}{X^2 Q_0} = idem. \quad (3.45^1)$$

Учитывая то, что величина $\frac{K_c}{K_\lambda}$ всегда больше единицы, при моделировании на R C-сетках масштаб времени на границе промерзания нужно брать как для талой зоны, т.е. использовать критерии (3.44[1]), (3.45[1]). Это существенно ускорит процесс моделирования.

При электромоделировании приведенной к однородному виду в отношении λ_2 и C_2 одновременно составной среды масштабные коэффициенты α_R и α_C должны быть взяты одинаковыми для обеих зон. В противном случае нельзя добиться постоянства электрических емкостей и сопротивлений на модели. Процессы в мерзлой зоне будут происходить, согласно критерию (3.41), замедленно в $\frac{K_C}{K_\lambda}$ раз. Но во столько же раз электрический процесс будет идти медленнее (по сравнению с моделированием исходной системы). Следовательно, α_τ также одинаково для обеих зон.

При расчёте $\alpha_V = \frac{V}{T_{1,пр}}$ (если $|T_{1,пр}| > T_2$) напряжение для увеличения точности моделирования должно быть взято максимальным, α_V берётся одинаковым для всей области моделирования.

Зная α_V и α_C, находим α_q.

Возможен и второй вариант расчёта электрических параметров. Вначале рассчитываются электрические параметры для исходной системы, а затем, используя критерии (3.41) – (3.45), в них вводятся соответствующие коррективы.

Время расчёта процесса промерзания на электромодели RC-сетки можно еще более сократить, если приведение сделать относительно параметров мерзлого грунта. В этом случае, однако, увеличится объём работ при обработке результатов в талой зоне.

Если использовать при моделировании критерии (3.44[1]), (3.45[1]), то время движения границы промерзания будет связано с истинным временем протекания процесса в натуре обычным соотношением

$$\tau_n = \frac{\tau_м}{\alpha_\tau}, \qquad (3.46)$$

где $\tau_м$ – время на электрической модели.

Если вместо (3.44[1]), (3.45[1]) использовать (3.44), (3.45), соответственно, то истинное время движения границы промерзания в натуре

$$\tau_н = \frac{\tau_м}{d\tau} \frac{K_л}{K_с} . \qquad (3.47)$$

При определении температурных полей в мерзлой и талой зонах, учитывая то обстоятельство, что электрические напряжения в модели задаются в процентах, следует просто взять эти проценты от температур в исходной (а не приведенной) системе. Время брать при этом как для талой зоны.

Тепловые потоки и после приведения к однородному виду в отношении коэффициента теплопроводности и объёмной теплопроводности одновременно остаются в мерзлой и талой зонах неизмененными.

Такое приведение позволяет производить расчёты на электромодели RC-сетке при постоянных электрических сопротивлениях и емкостях и таким образом избавляет от необходимости иметь сложное электронное оборудование для учёта скачкообразного изменения параметров. Это значительно экономит время решения и повышает точность расчёта.

Особенно наглядно преимущества метода проявляются при решении сложных двух- и трехмерных задач с большим количеством элементарных блоков.

Проведение расчётов на гидравлическом интеграторе при таком приведении становится полностью автоматизированным.

Моделирование одномерной задачи промерзания грунта, имеющей точное аналитическое решение, при постоянных электрических сопротивлениях и емкостях и при различных масштабах времени в мерзлой и талой зонах подтвердило правильность этих теоретических положений.

Отметим, что подобным преобразованиям в общем случае можно подтвердить лишь те функции, которые обладают свойством гомогенности, так как только в этом случае подобное преобразование всех величин, стоящих под знаком функций, приводит к подобному преобразованию самих функций.

Если рассматривать слоистую среду, состоящую из нескольких однородных слоёв, то анализ критериев подобия

для неё показывает невозможность приведения к однородному виду в каждом слое относительно $\alpha_{пр}$ и $C_{пр}$ одновременно из-за невыполнения условий на границе раздела слоёв – равенства температур и тепловых потоков.

3.3. О различных линейных масштабах и масштабах времени в мерзлой и талой зонах при моделировании

Впервые разные линейные масштабы и масштабы времени при исследовании тепловых процессов, сопровождающихся изменением агрегатного состояния, в одномерной среде ввел Пушкин В.С. [30], рассматривая нагревание с торца полубесконечного стержня, боковая поверхность которого изолирована. Выведенные им критерии использовались Шадриным Г.С. при рассмотрении задач таяния.

Нами, кроме того, вводятся специальные масштабы времени и длины для границы раздела фаз. Правда, в работе [35] утверждается, что на поверхности раздела можно взять масштаб времени либо как в мерзлой, либо как в талой зоне. То же касается линейных масштабов. Однако связь между ними не показана.

Возьмём математическую модель одномерной задачи. Из условия (1.4) на границе раздела, беря полный дифференциал, получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}dx + \frac{\partial T_1}{\partial \tau}d\tau = 0 = \frac{\partial T_2}{\partial x}dx + \frac{\partial T_2}{\partial \tau}d\tau . \qquad (3.48)$$

Тогда условие (1.5) можно записать в следующем виде:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = -Q_0 \frac{\frac{\partial T_1}{\partial \tau}}{\frac{\partial T_1}{\partial x}} = -Q_0 \frac{\frac{\partial T_2}{\partial \tau}}{\frac{\partial T_2}{\partial x}} . \qquad (3.49)$$

В формуле (3.49) нелинейность данной задачи становится очевидной. Из (3.49) отчётливо видно, что время

протекания процесса на границе промерзания можно брать как в мерзлой зоне, либо как в талой. Линейный размер на границе раздела должен соответствовать принятому времени протекания процесса. Следовательно,специальный масштаб времени и линейных размеров на границе промерзания ввести нельзя.

Исходя из физических соображений, можно сделать вывод, что при физическом моделировании невозможно применять различные линейные масштабы, во-первых,потому, что в природе не существует таких грунтов,которые бы при перемене фазы автоматически изменяли свои линейные размеры в необходимое число раз, во-вторых, в этом случае площади соприкосновений зон будут различными и нарушится условие теплообмена на границе раздела.Поэтому выводы Шадрина Г.С. по этому вопросу являются ошибочными.

При математическом моделировании можно ввести разные линейные масштабы в мерзлой и талой зонах только в одномерном случае, если одну из зон "сжать" или "растянуть" в определенное число раз только в направлении изменения температурного поля. В этом случае возможно приведение составной среды к однородному виду в отношении термических сопротивлений и емкостей. Покажем, какие преобразования для этого нужно произвести над исходной системой критериев подобия на примере задачи п. 1.1 гл.1 λ_1 и λ_2 оставляем без изменения,линейный размер в мерзлой зоне растягиваем в λ_1/λ_2 раз. Приведение делаем к R талое и C талое:

$$\frac{\lambda_1 \tau}{C_1 X^2} = \frac{\lambda_1 \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{C_1 K_c K_\lambda X^2 \left(\frac{1}{K_\lambda}\right)^2} = idem; \qquad (3.50)$$

$$\frac{\lambda_2 \tau}{C_2 X^2} = idem, \qquad (3.51)$$

$$\frac{\Delta x}{\lambda_1} = \frac{\Delta K_\lambda x \frac{1}{K_\lambda}}{\lambda_1} = idem; \qquad (3.52)$$

$$\frac{\lambda_1 T_1 \tau}{x^2 Q_0} = \frac{\lambda_1 T_1 \frac{1}{K_c} \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{x^2 (\frac{1}{K_\lambda})^2 Q_0 K_\lambda} = idem; \qquad (3.53)$$

$$\frac{\lambda_2 T_2 \tau}{x^2 Q_0} = \frac{\lambda_2 T \frac{K_\lambda}{K_c} \tau \frac{K_c}{K_\lambda}}{x^2 \frac{1}{K_\lambda} Q K_\lambda} = idem. \qquad (3.54)$$

Легко видеть, что после таких преобразований термические сопротивления и емкости в мерзлой и талой зонах становятся равными. Расчёт электрических параметров R C-сетки, начальных и граничных условий для приведенной системы (3.50) - (3.54) и сравнение соответственно с электрическими параметрами R C-сетки (пространственная разбивка одинакова), начальными и граничными условиями системы (3.6) - 3.10) показало полное совпадение результатов.

Таким образом, применение различных линейных масштабов в мерзлой и талой зонах, а также приведение составной среды из тало-мерзлого грунта к однородной среде в отношении термических сопротивлений и ёмкостей при этих условиях нужно считать ограниченным (для одномерных задач).

Глава 4

РЕШЕНИЕ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ПРОМЕРЗАНИЯ ГРУНТОВ

4.1. Задача промерзания полуограниченного массива грунта при $\Delta T_{кр}=0$

Математическая формулировка задачи дана в п.1.1, но граничные условия 1 рода; $T_c = const$. Данные для решения приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

T_c °C	$T_н$ °C	T_0 °C	λ_1	λ_2	C_1	C_2	δ	$\gamma_{1,2}$	i	n
-20	10	0	2,5	1,8	0,3	0,46	80	1600	1	0,3

Задача решена методом Либмана на R -сетке и на R C-сетке. Моделирование на R C-сетке скрытой теплоты проводилось способами, описанными в п. 2.2.

Разбивка полупространства приведена в табл. 4.2.

Таблица 4.2

№ узла	1	2–10	11	12–21	22–26	27–28	29–45
h ,м	0,025	0,05	0,075	0,1	0,2	0,4	0,8

Результаты решения сравнивались с точным аналитическим решением для границы промерзания и температурных полей.

На рис. 4.1 представлен график продвижения границы промерзания. * - точки графика по результатам моделирования на R C-сетке. Результаты решения методом Либмана и на R C-сетке практически совпадают.

На рис. 4.2 показаны графики распределения температуры по результатам моделирования на R C-сетке и по аналитическому решению.

Моделирование на R C-сетке проведено при скачкообразно изменяющихся и постоянных электрических сопротивлениях и ёмкостях. Результаты хорошо согласуются.

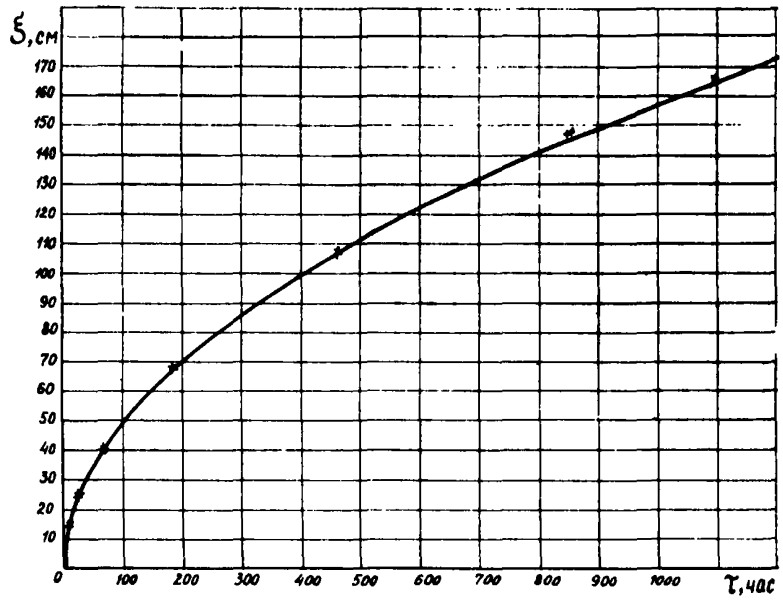


Рис. 4.1. Продвижение границы промерзания при замораживании полубесконечного массива:
— точное решение Стефана;
* моделирование на RC-сетке.

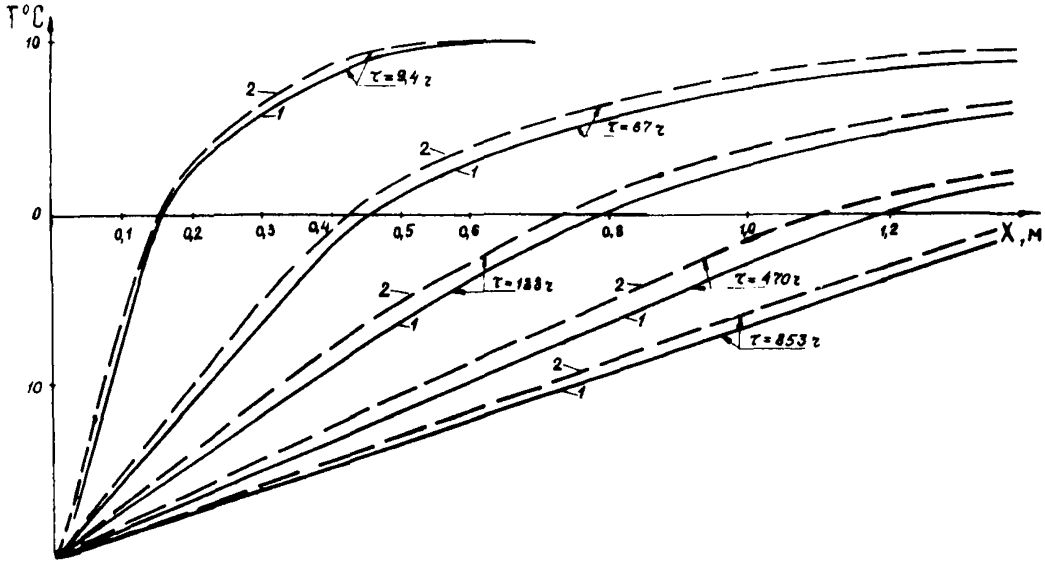


Рис. 4.2. Распределение температуры при замораживании полубесконечного массива для некоторых значений времени:
1 – решение на RC-сетке;
2 – аналитическое решение.

4.2. Задача промерзания грунта одиночной колонкой $\Delta T_{кр} = 0$

Задача решена по данным табл. 4.3 моделированием на R-сетке методом Либмана и на R C-сетке.

Таблица 4.3

T_C^0C	T_H^0C	T_0^0C	λ_1	λ_2	C_1	C_2	β	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_к$	i	n
-20	+10	0	2,5	1,8	0,254	0,34	80	2100	0,057	1	0,35

Разбивка по пространству выполнена в соответствии с методикой [27] и представлена табл. 4.4.

Таблица 4.4

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8
γ_j	0,057	0,2	0,45	0,6	0,75	0,9	1	1,1
9	10	11	12	13	14	15	16	17
1,3	1,6	2	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5
18	19	20	21	22	23	24	25	26
3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,85	5	5,15
27	28	29	30	31	32	33	34	35
5,3	5,6	5,9	6,1	6,366	6,621	6,867	7,104	7,334
36	37	38	39	40	41			
7,557	7,773	7,983	8,188	8,388	8,583			

На рис. 4.3 приведены графики продвижения границы промерзания [45]. Из графика видно, что отличие результатов моделирования и аналитического решения составляет менее 10%.

При моделировании на R C-сетке скрытая теплота учитывалась способом, описанным в п.2.2 (случай B).

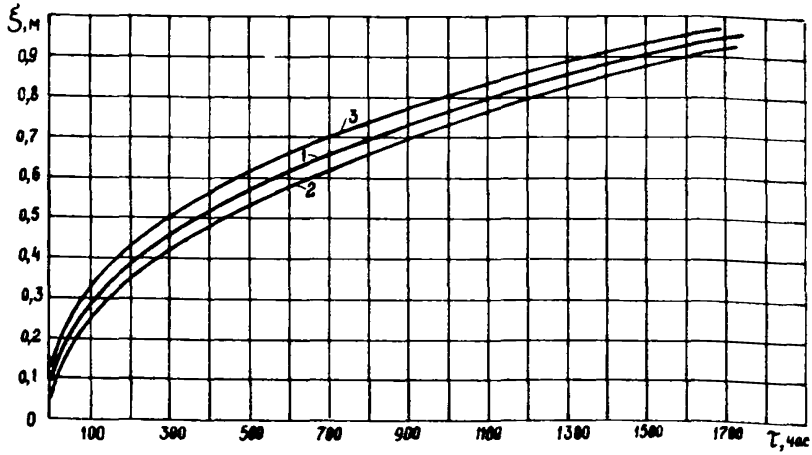


Рис. 4.3. Продвижение границы промерзания при замораживании одиночной колонкой: 1 – по методу Либмана; 2 – по моделированию на R C-сетке; 3 – по формуле Селезнёва Н.А.

4.3. Задача промерзания грунта при расположении ряда колонок по прямой линии, $\Delta T_{кр} = 0$

Задача решалась как плоская симметричная.

Теплофизические характеристики были взяты из табл. 4.3, за исключением $T_н = 8\,^{o}C$.

На рис. 4.4 представлены графики продвижения границы промерзания [21].

Температурные поля в ледяной зоне представлены на рис. 4.5.

4.4. Задача промерзания грунта при расположении ряда колонок по кольцу, $\Delta T_{кр} = 0$

Задача решена по данным задачи замораживания прямолинейным рядом колонок. Количество колонок равно 44, радиус кольца, по которому расположены колонки, – 7 м.

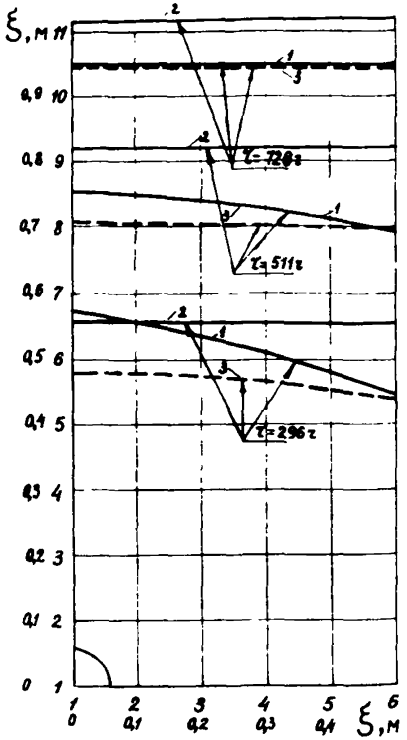


Рис. 4.4. Продвижение границы промерзания при замораживании бесконечным рядом колонок:
1 – по моделированию на RC-сетке; 2 – по формуле Селезнёва Н.А.; 3 – по формуле Красношевского Г.М.

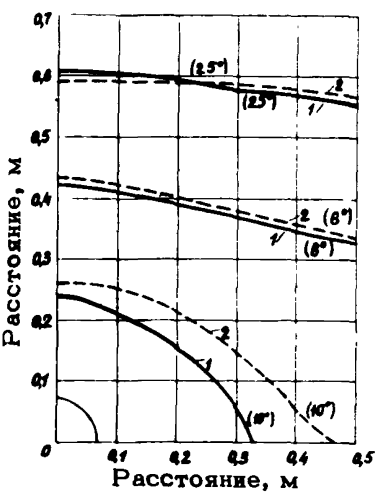


Рис. 4.5. Температурное поле ледяной зоны:
1 – по моделированию на RC-сетке; 2 – по формуле Красношевского Г.М.

Разбивка области моделирования была одномерной и двухмерной, согласно методике [25].

Движение границы промерзания для первого случая представлено на рис. 4.6, для второго – на рис. 4.7. Результаты обоих решений получились достаточно близкими друг другу. Они сравнивались с расчётом по ффмуле Н.А.Селезнёва [45].

Расхождения результатов моделирования и аналитического решения составляют по внешнему направлению 7%, по внутреннему – около 12%.

4.5. Задача промерзания полуограниченного массива грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$

Данные для решения представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

T_c °C	$T_н$ °C	λ_1	λ_2	$c\gamma_1$	$c\gamma_2$	$б$	$\gamma_{ск}$	i	$w_{бс}$	T_0^1 C
-20	+10	1,155	0,9	509,8	720,5	80	1140	0,8	0,412	-1

Задача моделировалась на RC-сетке двумя способами: 1 – с учётом зоны промерзания; 2 – путём сведения данной задачи к задаче Стефана.

Результаты полученного решения сравнили с решением Стефана при аналогичных условиях. Теплофизические характеристики λ_1 и C_1 в мерзлой зоне взяли усредненными. Кроме того, чтобы свести задачу, когда $\Delta T_{кр} \neq 0$, к случаю $\Delta T_{кр} = 0$, необходимо ввести расчётное количество скрытой теплоты Q_0, которое явилось бы эквивалентом количества скрытой теплоты, наблюдающейся при постепенном замерзании влаги грунта. Это расчётное количество скрытой теплоты Q_0 принято выражать в виде отношения его к величине скрытой теплоты, которая выделяется при замерзании всей влаги грунта Q^1 [24]:

$$i = \frac{Q_0}{Q'} = \frac{q_{л,э}\, б}{\gamma_{ск}\, w_{бк}\, б} = \frac{q_{л,э}}{\gamma_{ск}\, w_{бс}} .$$

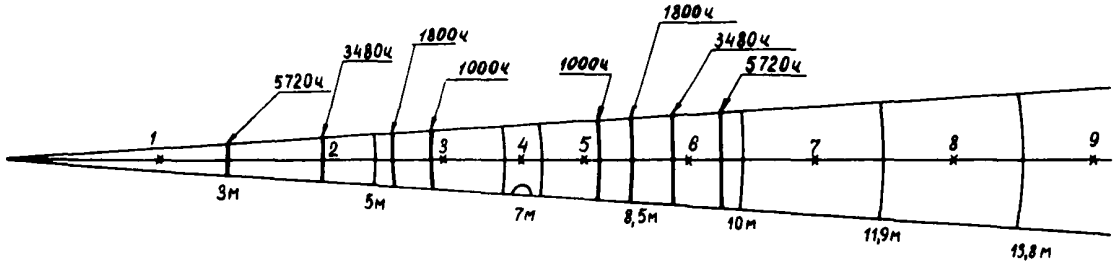


Рис. 4.6. Продвижение границы промерзания при кольцевом расположении колонок (одномерный случай).

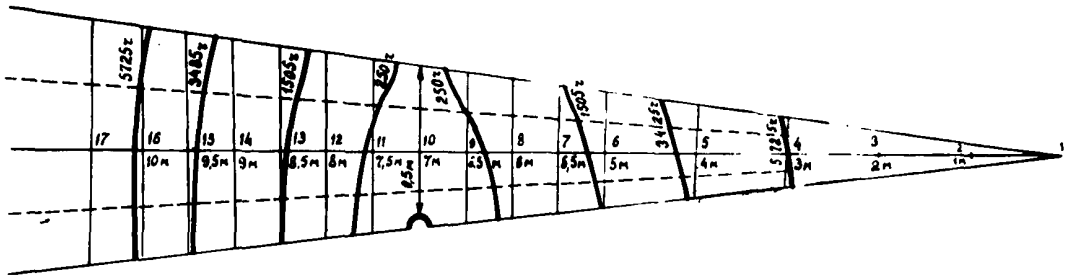


Рис. 4.7. Продвижение границы промерзания при кольцевом расположении колонок (двухмерная разбивка замораживаемой области).

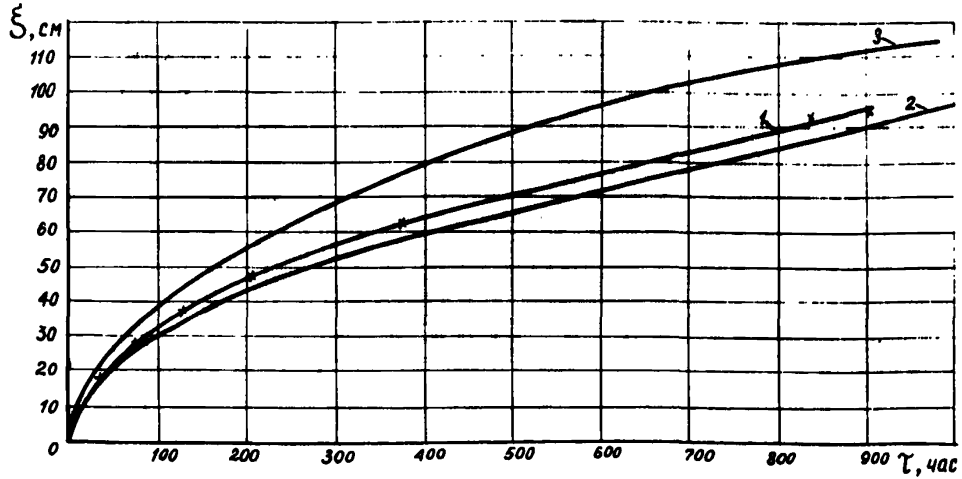


Рис. 4.8. Продвижение границы промерзания (замораживание в диапазоне температур):
1 – моделирование на R C–сетке сведением к задаче Стефана; 2 – аналитическое решение сведением к задаче Стефана; 3 – моделирование на R C–сетке с учётом зоны промерзания.

Величину i называют расчётной льдистостью. Она всегда меньше единицы и служит для того, чтобы приближенно учесть постепенное замерзание влаги.

В зависимости от вида грунта назначается также условная температура $T_0^1 < T_{0,н}$, при которой происходит кристаллизация.

В рассматриваемой задаче $T_0^1 = -1°C$ и $i = 0,8$ для глины взяты из (22).

На рис. 4.8 представлены кривые продвижения границы промерзания.

На рис. 4.9 изображены температурные поля промерзания в диапазоне температур.

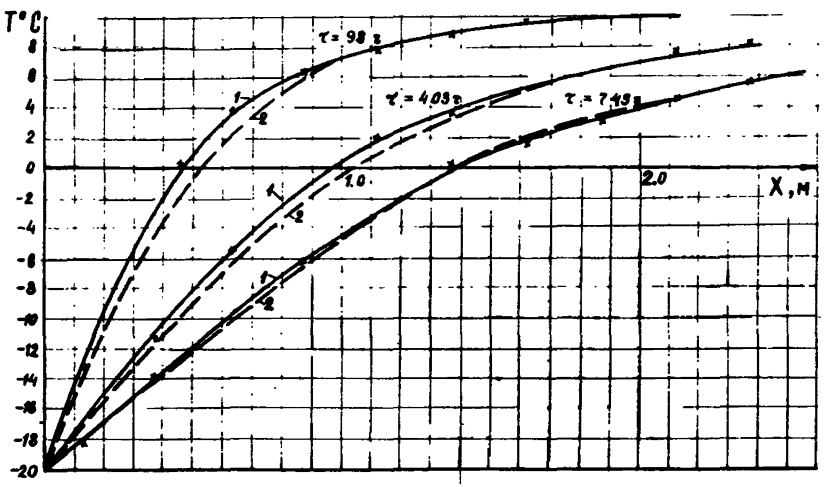


Рис. 4.9. Температурные поля:
1 – решение сведением к задаче Стефана;
2 – моделирование на RC-сетке с учётом зоны промерзания.

Как видно из рис. 4.9, температурные поля практически совпадают. Процесс промерзания с учётом зоны промерзания идет более интенсивно, чем при постановке задачи сведением её к задаче Стефана. Этот вывод совпадает с выводом, сделанным В.Г.Меламедом в [26].

Литература

1. Андерсон, Ботье, Коффель. Сравнение неявного и явного методов решения конечно-разностных задач теплопроводности. Теплопередача, т.83, с, № 4, 1962.

2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.П, М., Физматгиз, 1960.

3. Быховский М.Л. Точность электрических сеток, предназначенных для решения уравнений Пуассона. В сб. "Точность механизмов и машин". Вып. 1, Машиздат, 1952.

4. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М. Изд-во ИЛ, 1963.

5. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. М., Машгиз, 1960.

6. Волынский Б.А. Об основных направлениях и работах в период 1962-1965 гг. В сб. "Расчёт физических полей методами моделирования". М., "Машиностроение", 1968.

7. Волынский Б.А. и Бухман В.Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.

8. Гутман С.Г. К исследованию установившегося теплового потока в составной среде из мерзлого и талого грунта. (Приведение исследуемой области к однородной среде). Известия ЛНИИГ, т. 47, 1952.

9. Жеребятьев И.Ф., Лукьянов А.Т. Моделирование неявных разностных схем. Сб. Вестник АН Каз. ССР, № 10 (282), Алма-Ата, 1968.

10. Жеребятьев И.Ф., Лукьянов А.Т. Математическое моделирование уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами. М. "Энергия", 1968.

11. Иванов Н.С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М., "Наука", 1969.

12. Карплюс В. Вычислительная машина ДЭДТ. Первый международный конгресс ИФАК по автоматическому управлению. М. Изд-во АН СССР, 1960.

13. Карплюс В. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М. Изд-во ИЛ, 1962.

14. Коган Л.Г. О точности решения задач фильтрации на электрических сетках. Известия ЛНИИГ, т.47, 1952.

15. Коздоба Л.А. Применение электрических моделей

для решения задач тепло-массопереноса. Инженерно-физический журнал, т. XI, № 6, 1966.

16. Коздоба Л.А. Электромоделирование температурных полей в деталях суровых энергетических установок. Л., "Судостроение", 1964.

17. Коздоба Л.А. Электромодели-сетки омических сопротивлений для расчёта глубины промерзания грунтов. В сб. "Конвективный теплообмен". "Наукова думка", Киев, 1965.

18. Коздоба Л.А. Решение обратных и инверсных задач металлургической теплотехники с помощью электрических моделей. Инженерно-физический журнал, т. XУ, № 6, 1968.

19. Козьменко А.П. Некоторые вопросы расширения возможностей УСМ-1 при решении фильтрационных задач. Материалы 3-го семинара по применению геофизических методов при гидрогеологических исследованиях. "Недра", М., 1970.

20. Коллатц Л.Н. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М. Изд-во ИЛ, 1953.

21. Крастошевский Г.М. Образование долговременных ледогрунтовых ограждений и способы их расчёта. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. М., ВЗПИ, 1969.

22. Лукьянов В.С., Головко М.Д. Расчёт глубины промерзания грунтов. М., Гострансжелдориздат, 1957.

23. Лукьянов В.С., Цуканов Н.А. О некоторых возможностях подобных преобразований при расчётах нестационарных температурных полей в промерзающих и оттаивающих грунтах. Известия ЛНИИГ, т. 47, 1952.

24. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М. Изд. техн.-теорет. литер., 1952.

25. Маньковский Г.И. и др. Методика расчёта с помощью гидроинтегратора основных параметров процесса замораживания горных пород при проходке шахтных стволов. М. Гогортехиздат, 1960.

26. Меламед В.Г. Промерзание пористых тел с учётом кривой незамерзшей воды в автомодельном случае. В сб. "Мерзлотные исследования", вып. У1, МГУ, 1966.

27. Меламед В.Г. О влиянии кривой льдистости на процесс промерзания и оттаивания грунтов с различной

естественной влажностью. В сб. "Мерзлотные исследования", вып. У1, МГУ, 1966.

28. Николаев Н.С., Козлов Э.С., Полгородник Н.П. Аналоговая математическая машина УСМ-1. М. Машгиз, 1962.

29. Панов Д.Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М. Гостехиздат, 1951.

30. Пушкин В.С. К вопросу о теплопроводности в твердых телах. Журнал технической физики, т. ХУШ, вып. 8, 1948.

31. Раддл У. Затвердевание отливок. М., Машгиз, 1960.

32. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач. М. Изд-во ИЛ, 1960.

33. Селезнёв Н.А. Формулы к основным инженерным задачам определения продолжительности замораживания грунтов при отсутствии фильтрационных потоков. Изд. ВИОГЕМ, Белгород, 1970.

34. Тетельбаум И.М. Электрическое моделирование. М. Физматгиз. 1959.

35. Шадрин Г.С. Моделирование тепловых процессов, сопровождающихся изменением агрегатного состояния в слоистой среде. В сб. "Лёдотермические вопросы в гидроэнергетике". М.-Л., 1954.

36. Шура-Бура М.Р. Вероятностная оценка погрешности в решении конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих задачу Дирихле для уравнения Лапласа на электрических сетках. Известия АН СССР, т.ХХУШ, № 1, 1951.

37. Эйгемсон Л.С. Моделирование. М. "Советская наука", 1952.

38. Liebmann G. A new Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat-Conduction Problems. Trans. ASME, vol. 78, No3, 1956.

39. Liebmann G. A Solution of Transient Heat-Transfer Problems by the Resistance-Network Analog-Method Trans. ASME. vol. 78, No3, 1956.

40. Paschkis V. The Heat and Mass Flow Analysis a Simulator for the Study of Heat Conduction. Annales de l'Association internationale pour le calcul analogique, №1, Janvier, 1963.

41. Paschkis V, Heisler M.P. The accuracy of Measurements in Lumped RC-cable Circuits as used in the study of Transient Heat Flow Trans. AIEE, vol. 63, 1944.

42. Price P.H. and M.R. Slacke. The Effect of Latent Heat in Numerical Solutions of the Heat Flow Equation, British Journal of applied Physics, vol-5, 1954, pp 285-287.

Фондовая

43. Технический проект УСМ-2. Фонды института НИИУВМ, Пенза, 1965.

44. Коздоба А.А. Отчёт по теме "Методика электромоделирования прямых и обратных задач нестационарной теплопроводности применительно к задачам кристаллизации". Часть 1. Фонды Института гидромеханики, Киев, 1967.

45. Селезнёв Н.А. Отчёт по теме "Исследование процессов совмещения замораживания горных пород и водопонижения при проходке стволов шахт." Фонды института ВИОГЕМ, Белгород, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава 1. Методика расчёта промерзания грунта на электрических моделях-сетках омических сопротивлений 8

1.1. Математическая теория вопроса 8

1.2. Схемы конечно-разностных аппроксимаций уравнений теплопроводности. Вопросы устойчивости и сходимости. Электрическая реализация неявных разностных схем 11

1.3. Правила моделирования. Электротепловая аналогия 16

1.4. Расчёт параметров R -сетки 18

1.5. О расположении узлов в элементарных площадках 27

1.6. Методика решения задач промерзания грунта при $\Delta T_{кр} = 0$ 30

1.7. Методика решения задач промерзания грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$. *Линеаризация уравнения*. 35

1.8. Некоторые дополнительные возможности учёта скрытой теплоты при моделировании на R -сетках 38

1.9. Точность решения, полученного на R-сетках 41

Глава 2. Методика расчёта промерзания грунта на электромоделях RC-сетках 44

2.1. Расчёт масштабных коэффициентов при моделировании на RC-сетках 44

2.2. Способы учёта скрытой теплоты при $\Delta T_{кр}=0$ 46

2.3. Блок учёта нелинейностей (БУН) 51

2.4. Учёт скрытой теплоты при $\Delta T_{кр} \neq 0$ 56

2.5. Комбинированный способ решения уравнений типа теплопроводности на сеточных электромоделях (на примере УСМ-1) 58

2.6. К вопросу точности решения, получаемого на RC-сетках 61

Глава 3. Применение теории подобия к задачам промерзания грунта 65

3.1. Критерии подобия, используемые при моде-

лировании 65
3.2. Применение подобных преобразований при расчёте температурных полей в грунтах 67
3.3. О различных линейных масштабах и масштабах времени в мерзлой и талой зонах при моделировании 76

Глава 4. Решение конкретных задач промерзания грунтов 79
4.1. Задача промерзания полуограниченного массива грунта при $\Delta T_{кр} = 0$ 79
4.2. Задача промерзания грунта одиночной колонкой, $\Delta T_{кр} = 0$ 82
4.3. Задача промерзания грунта при расположении ряда колонок по прямой линии, $\Delta T_{кр} = 0$ 83
4.4. Задача промерзания грунта при расположении ряда колонок по кольцу, $\Delta T_{кр} = 0$ 83
4.5. Задача промерзания полуограниченного массива грунта при $\Delta T_{кр} \neq 0$ 85

Литература 89

Ответственный за выпуск Ю.Ф.Докукин
Редактор А.Г.Воронцова
Корректор Н.К.Шифрина

АЯ 02136. Подписано к печати 3 марта 1974 года.
Объём 5,0 уч.-изд.л. Тираж 150 экз. Заказ № 38.
Ротапринт ВИОГЕМ, Белгород, ул.Б.Хмельницкого, 86.
Цена 50 коп.

gost.e-ecolog.ru