ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА ИМЕНИ А.А. СКОЧИНСКОГО

А. Д. ИГНАТЬЕВ, Н. Г. МАНОХИН,
А. А. КАРЛЕНКОВ, В. С. БЕЛЯЕВ

МЕТОДИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

МОСКВА
1970

gost.e-ecolog.ru

Министерство угольной промышленности СССР
Академия наук СССР
Институт горного дела им. А. А. Скочинского

Лаборатория
технологии струговой
выемки

Канд. техн. наук А. Д. ИГНАТЬЕВ,
инж. Н. Г. МАНОХИН,
канд. техн. наук А. А. КАРЛЕНКОВ,
канд. техн. наук В. С. БЕЛЯЕВ

МЕТОДИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Москва
1970

УДК 519.2.001.5

Настоящая работа посвящена статистической обработке экспериментальных данных при исследовании процессов, подчиняющихся закономерностям случайных функций. Рассмотрены методы определения случайных величин, установлены статистические характеристики эргодического, стационарного и нестационарного случайных процессов, дана оценка точности и достоверности случайного процесса.

Работа представит интерес для аспирантов, научных и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами формирования нагрузок на различных элементах горнодобывающих машин и изучением стохастических процессов.

В В Е Д Е Н И Е

На современном этапе развития горной науки для исследования закономерностей работы различных горнодобывающих машин характерно применение методов теории вероятностей. Это обусловливается в первую очередь случайным процессом формирования нагрузок на элементах машин. Основные положения теории вероятностей позволяют определить действующие нагрузки для расчета машин на выносливость и текучесть с использованием параметров случайного процесса и случайной величины, что отвечает требованиям достоверности исходных данных и методическому расчету при конструировании и усовершенствовании машин.

Широкое применение аппаратуры для машинной записи изменения исследуемого процесса во времени (осциллографирование, телеизмерение и тензометрирование с применением магнитной записи и т.п.) требует получения обобщающего математического описания процесса, которое, как известно, основано на статистической обработке экспериментального материала.

Первоначальной ступенью обработки экспериментального материала является оценка и определение функций распределения или параметров случайного процесса.

Однако в различной математической литературе обработка экспериментальных данных и определение статистических характеристик трактуется по разному и без учета специфики исследуемого процесса.

Опыт применения теории вероятностей и математической статистики показывает необходимость индивидуального методического подхода к решению задач горного дела: все это послужило поводом для составления специального методического руководства по обработке экспериментальных данных.

Настоящая работа ставит своей целью, основываясь на методах теории вероятностей и математической статистики и анализируя

опыт применения этих методов в различных технических задачах, определить наиболее рациональные методические подходы и особенности при обработке осциллограмм наблюдений применительно к решению задач горного дела.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРЕ

Измерительная аппаратура должна отвечать следующим основным техническим требованиям: учитывать влияние внешних возмущающих воздействий, осуществлять точную и синхронную регистрацию информации, определяемой заданной погрешностью при обработке данных; частотный и динамический диапазоны аппаратуры должны соответствовать диапазонам регистрируемых сигналов.

Измерительный тракт аппаратуры содержит первичные преобразователи исследуемых величин (датчики), блоки усиления и преобразования сигнала, канал связи, обратные преобразователи полученной информации, регистрирующие устройства.

В реальных каналах связи дискретные и непрерывные сигналы характеризуются ограниченным спектром. При ограничении полосы спектра сигнала относительная погрешность $\frac{\Delta E}{E}\%$ определяется через

$$\Delta E = E - E_0 , \qquad (1)$$

где E – напряжение сигнала с датчика, тождественное изменению механической величины без ограничения спектра;

E_0 – напряжение сигнала после ограничения спектра.

Уровень напряжения E определяется в результате разложения исследуемой функции в ряд Фурье:

$$E = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + \frac{a_n}{2}\cos n\frac{2\pi x}{T} +$$

$$+ b_1 \sin\frac{2\pi x}{T} + b_2 \sin 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + b_{n-1}\sin(n-1)\frac{2\pi x}{T} , \qquad (2)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}$ коэффициенты ряда, вычисляемые известным способом тригонометрической интерполяции.

Уровень напряжения E_0 для текущей координаты x определяется согласно выражению (2) после ограничения спектра до любой гармонической составляющей.

Проведенный анализ показывает, что при ограничении спектра исследуемого процесса шестой гармонической составляющей погрешность составляет 3,3% [I]. В этом случае аппаратура, имеющая верхний частотный диапазон f, позволяет регистрировать со средней точностью процессы, имеющие среднюю частоту $\frac{f}{6}$.

Одним из основных требований при исследовании динамических процессов является необходимость записи в полном амплитудном или динамическом диапазоне. Вполне удовлетворительно, если осуществлена запись в 3σ диапазоне для нормального закона распределения (σ - среднеквадратическое отклонение) или десятикратных величин от среднего значения для асимметричных законов распределения.

Динамический диапазон, определяемый как

$$D = 20 \lg \frac{E_{макс}}{E_{мин}}, \qquad (3)$$

для различных типов систем измерения находится в пределах 30-40 дб. Это позволяет определить нижний диапазон (через $E_{мин}$) первичных преобразователей (датчиков) и начальный уровень исследуемого процесса.

ОБРАБОТКА ОПЫТОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Постановка вопроса

Определение функций распределения исследуемого параметра может быть произведено в результате обработки экспериментальных данных, полученных при записи на одной или нескольких осциллограммах наблюдений. Если имеется одна осциллограмма, то запись изменения величины исследуемого параметра должна быть произведена в достаточно большом непрерывном промежутке времени. Если имеется несколько осциллограмм, то запись их должна быть произведена в одинаковых условиях.

Прежде чем приступить к определению функции распределения исследуемого параметра, необходимо:

установить, что изменение записанного параметра действительно есть случайное и, следовательно, можно воспользоваться законами теории вероятностей;

определить стабильность условий испытания. Если условия испытания были нестабильны, то нужно выяснить, чем вызвана неста-

бильность: закономерным или случайным изменением условий испытаний. От этого зависит методика определения закона распределения исследуемого параметра;

оценить погрешность воспроизведения на осциллограмму изменения параметра, т.е. установить, не было ли при записи систематической ошибки контрольно-записывающей аппаратуры (КЗА), которая могла бы исказить истинное изменение во времени исследуемого параметра (обычно считают, что определение временных отметок на осциллограмме производится без ошибок или с такими незначительными ошибками, которыми можно пренебречь);

на основании изучения физической сущности процесса и по виду осциллограммы оценить стационарность исследуемого параметра. Осциллограмма изменения параметра во времени есть одна из случайных реализаций возможных значений случайного процесса, который может быть нестационарным, стационарным в широком или узком смысле или эргодическим по отношению к математическому ожиданию или корреляционной функции.

При стационарности исследуемого параметра для определения функции распределения достаточно иметь одну осциллограмму на довольно большом промежутке времени. Если исследуемый процесс нестационарный, то для определения функции распределения параметра на участках нестационарности необходимо иметь несколько осциллограмм.

На рис. I показана осциллограмма нестационарного случайного процесса. Характеристики такого процесса зависят от времени (или начала) отсчета.

Этот процесс начинается с нестационарной стадии - переходного процесса, что соответствует отрезку ab на осциллограмме, затем с известной степенью приближенности можно считать процесс стационарным - установившимся режимом (отрезок bc) и заканчивается нестационарным режимом-процессом затухания (участок cd).

Для определения функции распределения случайного параметра $p(t)$ на нестационарных участках (ab) и (cd) необходимо несколько осциллограмм, а на стационарном участке (bc) достаточно одной осциллограммы, если она была выполнена на сравнительно большом промежутке времени T .

На рис. 2 изображен нестационарный случайный процесс. Математическое ожидание этого процесса изменяется в зависимости от времени линейно по прямой $m(t) = at + b$ (на осциллограмме показано пунктирной линией). Однако для определения функции распреде-

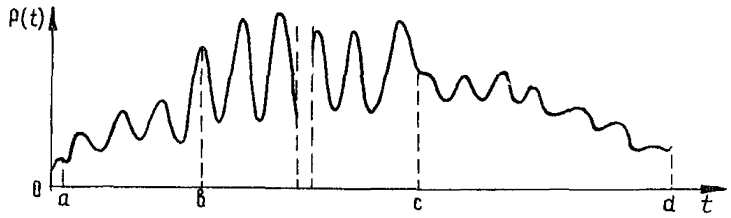


Рис. I. Осциллограмма нестационарного случайного процесса

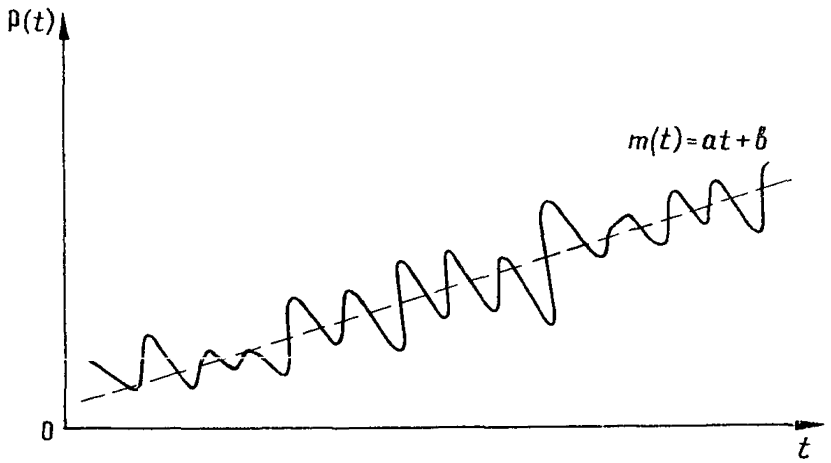


Рис. 2. Осциллограмма случайного процесса с изменением математического ожидания по прямой $m(t)$

ления исследуемого параметра в данном случае необходима одна осциллограмма. Отсчет изменения величины $p(t)$ можно производить от линии математического ожидания $m(t)$ или от любой линии, параллельной $m(t)$. Найденная функция распределения совместно с уравнением прямой для математического ожидания $m(t)$ будет характеризовать изменение исследуемого параметра во времени. Фактически определена функция распределения колебания параметра $p(t)$ относительно своего среднего значения (линии $m(t)$), т.е. функция распределения центрированной случайной величины $[p(t) - \bar{m}(t)]$.

Резкие изменения кривой, как указано на рис.3, говорят о нестабильности условий испытаний или погрешности контрольно-записывающей аппаратуры (КЗА).

В этом случае функция распределения исследуемого параметра изменяется скачкообразно и ее приближенно можно определить на отдельных участках. А если известно, что нестабильность была вызвана изменением условий испытаний, то, независимо от величины и количества скачков, с известной степенью точности можно определить функцию распределения центрированного случайного параметра $[p(t) - \bar{m}_i(t)]$. Средние значения функции $\bar{m}_i(t)$ определяются для каждого участка осциллограммы отдельно.

Если наблюдаются колебательные изменения параметра как среднего значения, так и относительно него (рис.4), то сначала определяется на глаз функция изменения среднего значения $m(t)$, затем функция распределения центрированного параметра $[p(t) - m(t)]$ относительно $m(t)$ и после этого (при наличии осциллограммы на достаточно большом промежутке времени) - функция распределения параметра $m(t)$.

Но для того, чтобы определить функцию распределения параметра $p(t)$ для каждого значения t, необходимо иметь несколько осциллограмм наблюдений.

Определение функции распределения при наличии одной осциллограммы наблюдения

Пусть имеется осциллограмма, на которой показано изменение величины исследуемого параметра на достаточно большом промежутке времени. Требуется определить дифференциальную функцию распределения (плотность вероятности) данного параметра.

Исследуя характер изменения записанного на осциллограмме параметра, выбираем участок, на котором процесс можно считать ста-

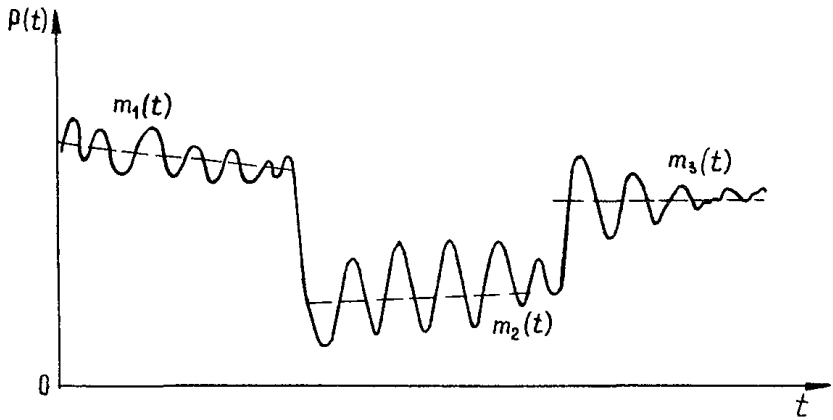


Рис. 3. Осциллограмма случайного процесса при нестабильных условиях испытаний

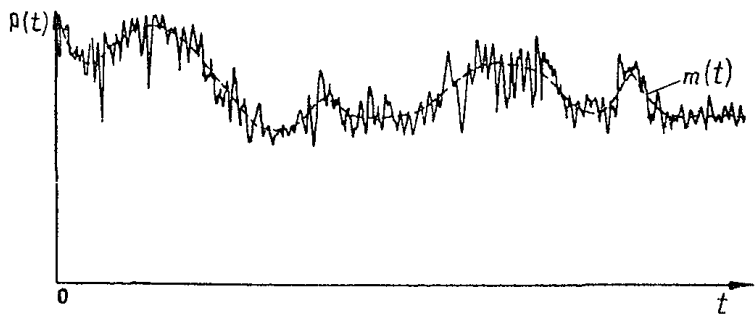


Рис. 4. Осциллограмма случайного процесса с изменением математического ожидания по кривой $m(t)$

ционарным, так как по одной осциллограмме можно определить функцию распределения параметра только в случае, если процесс протекает в стационарном режиме.

На выбранном участке определяется координатная сетка: за ось ординат принимается линия, проходящая через начальную точку выбранного участка осциллограммы, по направлению измерения исследуемого параметра, за ось абсцисс - любая линия, проведенная перпендикулярно оси ординат. Обычно берется прямая отметки времени.

Определяется также масштаб изображения на осциллограмме как исследуемого параметра (по оси ординат), так и отметки времени (по оси абсцисс), что необходимо для физической оценки исследуемого параметра.

Обработку осциллограммы для определения функции распределения и вычисления статистических характеристик можно выполнять двумя способами: группированием по "времени" или группированием по уровням.

В радиотехнике операция превращения непрерывного сигнала или непрерывной функции (в данном случае осциллограммы) в последовательность дискретных значений называется дискретизацией или квантованием.

При обработке осциллограммы группированием по времени (квантование по времени) выбранный участок осциллограммы продолжительностью T разбивается на равноотстоящие сечения по оси абсцисс с интервалом Δt (рис. 5).

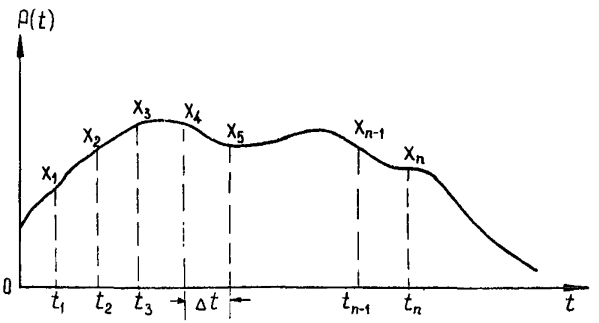


Рис.5. Осциллограмма случайного процесса с интервалами дискретизации по времени

Величина интервала между сечениями Δt выбирается в зависимости от вида исследуемой кривой. Для кривой, соответствующей

плавному, постепенному изменению параметра, интервал Δt можно выбрать больше, чем для кривой, имеющей резко колебательный характер. Практически интервал Δt берется такой, чтобы по точкам пересечения ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), соединяя их последовательно, можно было бы восстановить вид кривой. Как правило, на участке амплитудного изменения кривой наименьшего периода принимается не менее 5 сечений.

Если по характеру кривой трудно определить интервал дискретизации Δt, то можно воспользоваться теоремой отсчетов (теорема Котельника [2]), по которой непрерывная функция $p(t)$ с ограниченным частотным спектром $\Delta F = F_{макс} - F_{мин}$ длительностью t может быть дискретизирована последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при интервале

$$\Delta t = \frac{1}{2\Delta F}.$$

Количество интервалов Δt на конечном участке записи осциллограммы t определится по формуле

$$n = \frac{t}{\Delta t} = 2t\Delta F. \qquad (4)$$

Практически n определяется следующим образом.

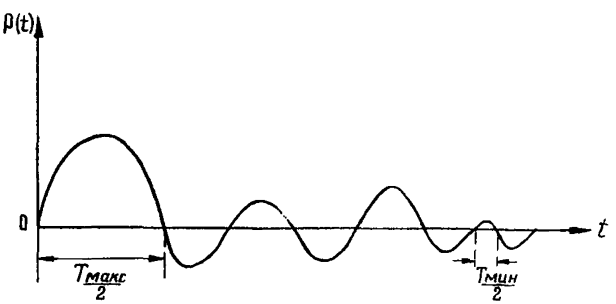


Рис. 6. Наибольший $T_{макс}$ и наименьший $T_{мин}$ периоды кривой для определения величины интервала дискретизации

На кривой (рис.6) измеряется наибольший и наименьший периоды колебаний, по ним определяется разность частот $\Delta\omega = \omega_{макс} - \omega_{мин}$ по формуле

$$\Delta\omega = 2\pi\left(\frac{1}{T_{мин}} - \frac{1}{T_{макс}}\right) = 2\pi\frac{T_{макс} - T_{мин}}{T_{макс}\,T_{мин}}. \qquad (5)$$

Принимая $\Delta\omega \approx \Delta F$ и подставляя данные $\Delta\omega$ в формулу (4), определяем величину n по формуле

$$n = \frac{4\pi t (T_{макс} - T_{мин})}{T_{макс}\, T_{мин}} . \qquad (6)$$

Если при подсчете n получилось дробным числом, его округляют в сторону больших значений. Кроме того, учитывая неравномерность частотных характеристик кривой, n увеличивают на 15–20%.

Этот метод обработки осциллограмм (метод группирования по времени) наиболее удобен, если предположить, что вид функции распределения заранее известен, а требуется определить только ее характеристики (математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение).

Вычисление этих характеристик производится по формулам:

математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad (7)$$

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} . \qquad (8)$$

Весь ход подсчета указанных характеристик записывается в табл. I.

Если подсчет выполняется на полноклавишных счетных машинах типа *Seitron*, то запись квадрата разности $(x_i - \bar{x})^2$ можно не производить, так как счетная машина позволяет умножать (возводить в квадрат) и суммировать одновременно.

При вычислении σ разность $(x_i - \bar{x})$ можно заменить на $(\bar{x} - x_i)$, так как квадраты этих разностей дают одно и то же число. Это облегчает вычисление разностей, если оно выполняется на полноклавишных машинах, для чего на регистре счетчика результатов устанавливается значение $\bar{x}$, а вычитаемую величину x_i при фиксированной клавиатуре сначала вычитают (результат заносится в таблицу), а затем ее прибавляют, чтобы получить искомую величину $\bar{x}$. Потом на клавиатуре набирается следующее вычитаемое x_{i+1} (при фиксированной клавиатуре) и цикл повторяется снова для определения величины $(\bar{x} - x_{i+1})$.

Таблица I

Рабочие формулы	n	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	I	x_1	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_1^2$
	2	x_1	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_2^2$
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	3	x_3	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_3^2$
	⋮	⋮	⋮	
	$n-1$	x_{n-1}	$\tilde{x}_{n-1}$	$\tilde{x}_{n-1}^2$
$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i$	n	x_n	$\tilde{x}_n$	$\tilde{x}_n^2$
	Σ		—	—
$\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\bar{x}$		—	—
	Σ^2	—		
	σ	—		

Построение гистограммы или многоугольника распределения, а также выравнивание их функцией распределения подробно описано в учебных пособиях по курсу теории вероятностей [3, 4].

Группирование статистических данных в так называемый статистический ряд можно производить непосредственно на осциллограмме, разбивая на интервалы кривую осциллограммы линиями, параллельными оси абсцисс. Это облегчает нахождение частот $\tilde{p}_i$ статистического ряда.

При обработке осциллограмм группированием по уровню непрерывное значение функции $p(t)$ заменяется количеством пересечений кривой $p(t)$ уровней (рис.7), т.е. горизонтальных линий, равноотстоящих друг от друга на величину Δp .

Этот метод обработки осциллограммы применяется тогда, когда необходимо знать графически вид функции распределения и ориентировочно определить числовые характеристики распределения.

Уровень группирования Δp выбирается таким, чтобы в каждом интервале содержалось хотя бы пять точек пересечений. Если длина интервала Δp слишком мала, то в каждый интервал попадает мало пересечений и будут доминировать случайные флуктуации. Если длина интервала будет слишком велика, то могут не проявиться детали

вида функции распределения. Слишком малый интервал $\Delta\rho$ оправдывается только тогда, когда осциллограмма имеет большой промежуток времени T (т.е. когда число реализаций достаточно велико).

Гистограмму или многоугольник распределения можно построить при группировании по $\Delta\rho$ различной длины, но во всех случаях значения $m_i \Delta\rho$ должны быть велики.

Для построения гистограммы на каждом уровне $\rho_{x_i}(t)$ определяется частота, равная

$$\tilde{\rho}_i = \frac{m_i}{n},$$

где m_i – количество пересечений кривой $\rho(t)$ уровня $\rho_{x_i}(t)$.
$n = \sum m_i$ – общее количество пересечений кривой $\rho(t)$ всеми уровнями.

Строятся прямоугольники по длине, пропорциональные соответствующим частотам $\tilde{\rho}_i$ (рис.7) и выравниваются кривой, соответствующей плотности распределения. При этом общая площадь прямоугольников должна быть равна единице.

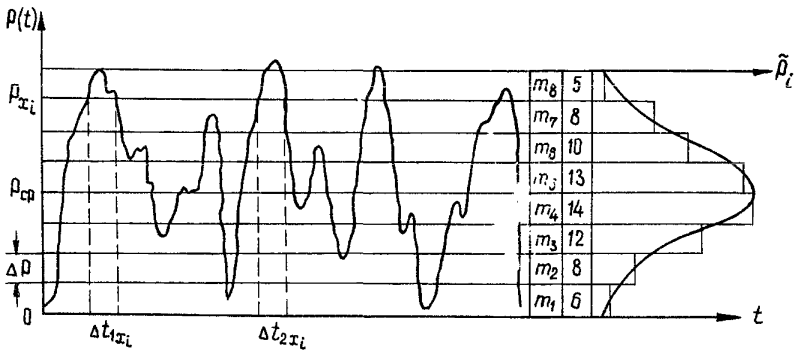


Рис. 7. Осциллограмма случайного процесса с интервалами дискретизации группированием по уровням

Часто при обработке осциллограмм вначале ориентировочно определяют среднее значение исследуемого параметра (на рис. 7 указано $\rho_{ср}$), затем проводят горизонтальные линии (как при обработке осциллограмм группированием по уровням), после чего на каждой горизонтальной линии $\rho_{x_i}(t)$ определяется не сумма пересечений кривой уровня ρ_{x_i}, а суммарная длина отрезков $\Delta t_{x_i} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots + \Delta t_K$, на которых параметр ρ_x был выше данного уров-

ня. Если длина осциллограммы равна T, то отношение $\frac{\Delta t_{xi}}{T}$ соответствует вероятности появления исследуемого параметра $p_x(t)$ больше уровня p_{x_i}. По данным вычислений $\frac{\Delta t_{xi}}{T}$ для всех горизонтальных линий строится кривая, соответствующая плотности распределения.

В последнее время для решения многих практических задач определяют функцию распределения (или числовые ее характеристики) длительности нахождения исследуемого параметра выше заданного уровня $p_x(t) = p_0$ (теория выбросов).

Для иллюстрации возьмем, например, определение функции распределения усилия в рабочей или холостой цепи струга, превышающего уровень p_0. Тогда можно определить как функцию распределения длительности интервалов Δt_i, в которых усилие выше (или ниже) заданного уровня p_0 (рис. 8), так и функцию распределения

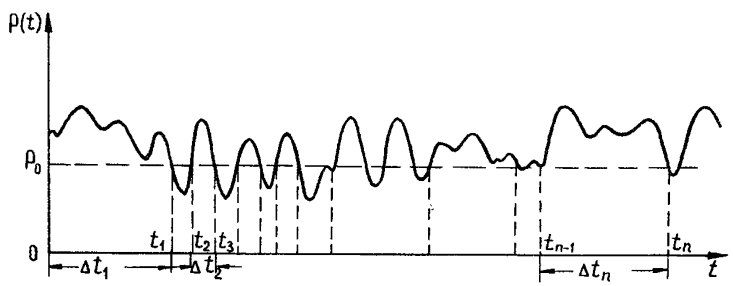


Рис. 8. Осциллограмма случайного процесса с интервалами дискретизации относительно уровня p_0

количества пересечений заданного уровня p_0 кривой $p(t)$ снизу вверх (или сверху вниз) в единицу времени. Такая постановка вопроса может быть справедлива только для стационарного случайного процесса, эргодического по отношению к математическому ожиданию.

Определение функций распределения выбросов или числа пересечений заданного уровня p_0 в единицу времени производится аналогично. Интервалы выбросов Δt_i группируются по длительности в статистический ряд, строится гистограмма распределения и производится выравнивание (сглаживание) статистического ряда.

Более подробно о теории выбросов можно ознакомиться в монографиях [5, 6].

При обработке осциллограмм наблюдений можно определить также функцию распределения экстремальных значений случайного процесса (максимумов или минимумов) в единицу времени, или экстремальных значений, превышающих заданный уровень $P_x(t) = P_0$. При этом задача состоит не только в определении функции распределения экстремумов в единицу времени, а и, в том, чтобы предсказать те экстремумы, которые могут иметь место при последующих испытаниях. Теория экстремальных значений подробно описана в работе [7].

Определение функции распределения при наличии нескольких осциллограмм наблюдений

Если имеется n осциллограмм наблюдений исследуемого параметра нестационарного случайного процесса в интервале времени $0-t$, то можно определять функцию распределения параметра только для каждого фиксированного значения t_i $(0 \le t_i \le t)$ в отдельности. Количество независимых опытов, проведенных в одинаковых условиях и, следовательно, количество необходимых осциллограмм зависит от точности соблюдения одинаковых условий и независимости эксперимента. Обычно считают малую выборку 15–20 осциллограмм.

Таблица 2

t_i / n	t_1		t_2		...	t_k	
	$x_i(t_1)$	$x_i(t_1)-\bar{x}(t_1)$	$x_i(t_2)$	$x_i(t_2)-\bar{x}(t_2)$	...	$x_i(t_k)$	$x_i(t_k)-\bar{x}(t_k)$
I	$x_1(t_1)$	$\tilde{x}_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	$\tilde{x}_1(t_2)$	...	$x_1(t_k)$	$\tilde{x}_1(t_k)$
2	$x_2(t_1)$	$\tilde{x}_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	$\tilde{x}_2(t_2)$	...	$x_2(t_k)$	$\tilde{x}_2(t_k)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$x_n(t_1)$	$\tilde{x}_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	$\tilde{x}_n(t_2)$	...	$x_n(t_k)$	$\tilde{x}_n(t_k)$
Σ		—		—			—
$\bar{x}(t_i)$	$\bar{x}(t_1)$	—	$\bar{x}(t_2)$	—		$\bar{x}(t_k)$	—
Σ^2	—		—			—	
$\sigma(t_i)$	—	$\sigma(t_1)$	—	$\sigma(t_2)$	...	—	$\sigma(t_k)$

На каждой кривой строго определяется единое начало отсчета, выбирается единая координатная сетка и берется ряд одинаковых

по t сечений t_i, равноотстоящих или неравноотстоящих друг от друга.

Для фиксированных значений t_i по выбранной координатной сетке определяются значения функций $\rho_j(t_i)$ и составляется матрица (табл. 2).

Вычисления математического ожидания и среднеквадратического отклонения для каждого сечения t_i производится по формулам (7, 8).

Анализируя изложенный в данном разделе материал, необходимо отметить следующее.

Методика обработки осциллограмм наблюдений может быть применима не только для определения функций распределения случайных величин, но также функций распределения аргумента случайной функции. Осциллограмму наблюдения всегда можно представить как случайную функцию исследуемого процесса.

Однако определение функций распределения случайных величин по осциллограмме наблюдения нерационально, так как при этом информация о вероятностных характеристиках случайной функции, содержащаяся в осциллограмме, используется далеко не полностью. Внутреннюю структуру случайной функции, степень зависимости между сечениями функции могут дать только статистические характеристики случайного процесса (математическое ожидание и корреляционная функция).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Стационарный случайный процесс

Обработка осциллограммы наблюдения проводится с целью определения статистических (оценочных) характеристик случайного процесса, т.е. определения функции математического ожидания $\tilde{m}_x(t)$ и корреляционной (автокорреляционной) функции $\tilde{K}_x(\tau)$ случайного процесса. Вычисления характеристик случайного процесса по результатам опытов очень трудоемки, поэтому целесообразно использование вычислительной техники.

В данном разделе приводится методика обработки осциллограммы наблюдения в предположении стационарности случайного процесса,

эргодического по отношению к корреляционной функции или в предположении нормально распределенного случайного процесса. Характеристики таких процессов могут быть приближенно определены по одной осциллограмме наблюдения как средние значения по времени t.

Эргодичность случайного процесса определяется сначала на основании физических исследований, связанных с существом процесса (его предположительной разложимостью на элементарные процессы различного типа), потом проверяется поведением корреляционной функции при достаточно большом значении $\tau = t - t'$.

Методы определения математического ожидания и корреляционной функции не отличаются от методов определения соответствующих вероятностных характеристик случайных величин.

Для определения статистических характеристик исследуемого процесса необходимо выбрать участок осциллограммы с установившимся периодом, исключая первоначальный участок пуска и конечный участок остановки, в которых предполагается нестационарность исследуемого процесса.

Продолжительность реализации T, т.е. длина стационарного участка осциллограммы, должна быть достаточно большой, но не менее чем 5τ ($T \geq 5\tau$).

Выбранный участок разбивается на n равных интервалов длиной $\Delta t = \frac{T}{n}$ (интервал квантования). Длина интервала квантования выбирается из условия, что на участке осциллограммы длиной в один период наиболее высокочастотной гармоники располагалось не менее десяти точек (интервалов) [8].

Как при обработке опытных данных для определения функций распределения случайных величин, на выбранном участке осциллограммы наносится координатная сетка и проводятся для каждой точки (начала интервалов Δt) прямые, параллельные оси ординат, до пересечения с кривой.

Измеряются ординаты каждой точки кривой $x(t_i)$. Результаты измерения записываются в табл. 3.

Оценочные (статистические) значения математического ожидания $\tilde{m}_x$ дисперсии $\tilde{D}_x$, корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)$ и нормированной корреляционной функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$ вычисляются по формулам:

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i); \qquad (9)$$

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[x(t_i) - \tilde{m}_x \right]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\overset{\circ}{x}(t_i) \right]^2; \qquad (10)$$

$$\tilde{K}_x(\tau)=\frac{1}{n-\tau}\sum_{i=1}^{n-\tau}\mathring{x}(t_i)\cdot\mathring{x}(t_{i+\tau})\,; \qquad (11)$$

$$\tilde{\rho}_x(\tau)=\frac{\tilde{K}_x(\tau)}{\tilde{D}_x}=\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-\tau}\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+\tau})}{(n-\tau)\sum_{i=1}^{n}\left[\mathring{x}(t_i)\right]^2}\,. \qquad (12)$$

Результаты подсчета этих характеристик записываются в соответствующей строке табл. 3.

Таблица 3

Рабочие формулы		n	$x(t_i)$	$x(t_i)-\tilde{m}_x$	$\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+1})$		$\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+m})$
I	2	3	4	5	6	. . .	8
$\mathring{x}(t_i)=x(t_i)-\tilde{m}_x$		1	$x(t_1)$	$\mathring{x}(t_1)$	$\mathring{x}(t_1)\mathring{x}(t_2)$	. . .	$\mathring{x}(t_1)\mathring{x}(t_m)$
$\tilde{m}_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x(t_i)}{n}$		2	$x(t_2)$	$\mathring{x}(t_2)$	$\mathring{x}(t_2)\mathring{x}(t_3)$	. . .	$\mathring{x}(t_2)\mathring{x}(t_{m+1})$
		3	$x(t_3)$	$\mathring{x}(t_3)$	$\mathring{x}(t_3)\mathring{x}(t_4)$	. . .	$\mathring{x}(t_3)\mathring{x}(t_{m+2})$
$\tilde{D}_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\mathring{x}(t_i)\right]^2}{n-1}$		. . .	. . .	. . .	. . .		
$\tilde{K}_x(\tau)=\frac{1}{n-\tau}$		n	$x(t_n)$	$\mathring{x}(t_n)$	—	. . .	—
$\sum_{i=1}^{n-\tau}\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+\tau})$	Σ			—			
$\tilde{\rho}_x(\tau)=\frac{\tilde{K}_x(\tau)}{\tilde{D}_x}$	$\frac{\Sigma}{n}$			—	—	. . .	—
	Σ^2	—	—		—	. . .	—
	$\tilde{D}_x$	—	—		—	. . .	—
	$\tilde{K}_x(\tau)$	—	—	$\tilde{D}_x$	$\tilde{K}_x(\tau=1)$	. . .	$\tilde{K}_x(\tau=m)$
	$\tilde{\rho}_x(\tau)$	—	—	1	$\tilde{\rho}_x(\tau=1)$	. . .	$\tilde{\rho}_x(\tau=m)$

При подсчете указанных характеристик на полноклавишных вычислительных машинах трудность состоит в пересчете результатов наблюдений на центрированный масштаб по формуле

$$\mathring{x}(t_i)=x(t_i)-\tilde{m}_x\,.$$

Эти величины записываются в столбце 5 табл.3 со своим знаком. Возведя в квадрат $\mathring{x}(t_i)$ и одновременно суммируя, определя-

ем сумму квадратов центрированных величин. В результате деления ее на $(n-1)$ получаем статистическую дисперсию $\tilde{D}_x$ случайного процесса.

Для подсчета значений корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)$ при различных τ необходимо согласно формуле (II) перемножить центрированные величины $\mathring{x}(t_i)$, разделенные интервалами $\tau = 1,2,\ldots m$, сложить их, после чего суммы разделить соответственно τ на $n-1$, $n-2,\ldots, n-m$. При перемножении и суммировании величин необходимо учитывать их знаки. Произведения $\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+\tau})$ и сумма произведений записываются в соответствующих столбцах табл. 3.

Если вычисление производится на полноклавишных машинах, то для опытного оператора необязательно записывать произведения $\mathring{x}(t_i)\mathring{x}(t_{i+\tau})$ в таблице, а непосредственно суммировать эти произведения со своими знаками на машине.

Нормированная корреляционная функция $\tilde{\rho}_x(\tau)$ вычисляется согласно формуле (I2) делением корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)$ на статистическую дисперсию $\tilde{D}_x$. По результатам подсчета строится график нормированной корреляционной функции.

Часто полученные статистические значения нормированной корреляционной функции дают не вполне гладкий ход кривой, что можно объяснить недостаточным объемом выборки (малой продолжительностью опыта) или большим интервалом квантования, вследствие чего случайные неоднородности не успевают сглаживаться. Сглаживание и апроксимацию кривой целесообразно производить методом наименьших квадратов.

Если нормированная корреляционная функция имеет отрицательные значения, это говорит о том, что в структуре случайного процесса имеются некоторые элементы периодичности (с периодом, приблизительно равным $2\tau_0$, где τ_0 — расстояние от начала координат до первого пересечения корреляционной кривой оси абсцисс) [8, I0]. Оценка первоначально предполагаемого суждения о стационарности и эргодичности случайного процесса определяется по поведению кривой корреляционной функции или нормированной корреляционной функции.

Если нормированная корреляционная функция с ростом τ стремится к нулю (рис. 9), значит предположение об эргодичности случайного процесса сделано правильно. Если нормированная корреляционная функция не убывает и, начиная с некоторого τ остается приблизительно постоянной (рис.I0), это говорит о том, что случайный процесс состоит из двух слагаемых: эргодического про-

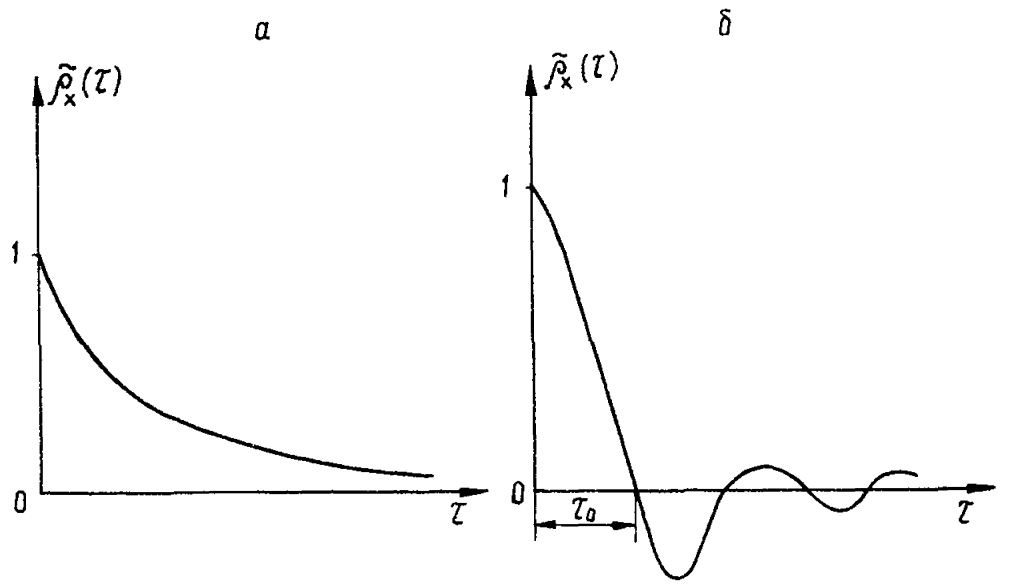


Рис. 9. Нормированные корреляционные функции случайного процесса:
а – для непериодического случайного процесса;
б – при наличии элементов периодичности

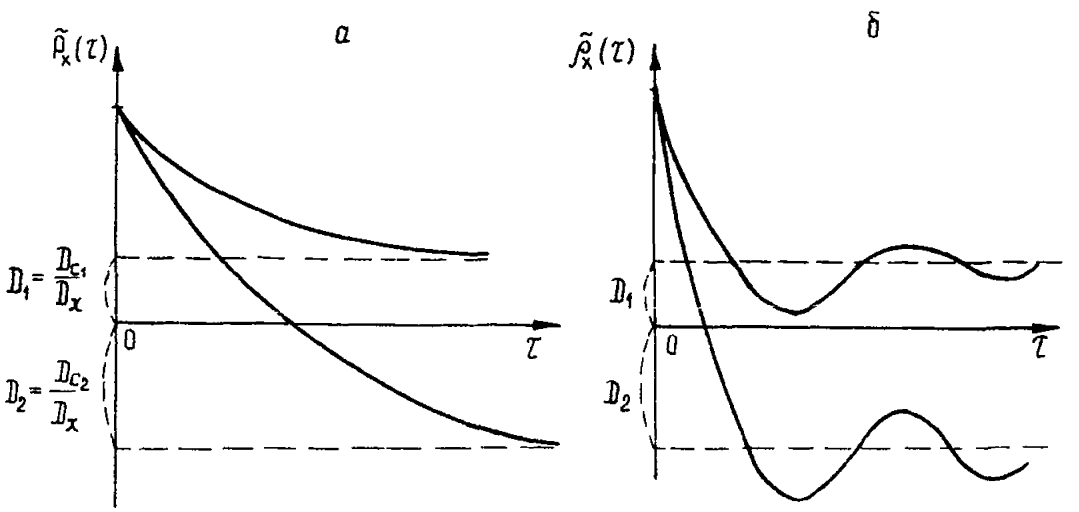


Рис. 10. Корреляционные функции эргодического случайного процесса и случайной величины D_c:
а – для непериодического случайного процесса;
б – при наличии элементов периодичности

цесса и случайной величины, для которой дисперсия является постоянной величиной $D_c = const$

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = \tilde{\rho}_z(\tau) + \frac{D_c}{\tilde{D}_x}. \qquad (13)$$

Такой процесс не является эргодичным, однако к нему применимы методы анализа эргодического процесса за вычетом постоянной составляющей - дисперсии случайной величины. При анализе исследуемого случайного процесса необходимо определить причины, вызывающие изменение нормированной корреляционной функции, и охарактеризовать случайную величину.

Если кореляционная функция не убывает при увеличении τ, а имеет периодические или непериодические колебательные изменения около прямой $o\tau$ (рис.II), то предположение об эргодичности случайного процесса не оправдывается.

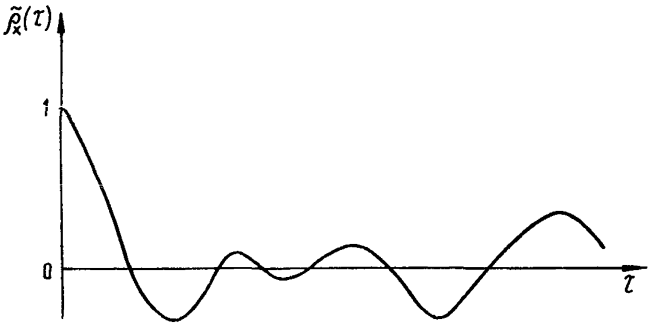


Рис. II. Нормированная корреляционная функция неэргодического стационарного случайного процесса

Причиной неэргодичности процесса является наличие периодической составляющей случайной функции, если корреляционная функция имеет "хвост", периодически изменяющийся с одинаковой частотой, или суммы периодических составляющих, если корреляционная функция имеет "хвост", изменяющийся апериодически.

Выделение периодической составляющей ведется на основании предположения, что в исследуемом случайном процессе имеется одна синусоидальная составляющая, которая в корреляционной функции дает косинусоиду той же частоты, амплитуда которой равна $\frac{V^2}{2}$

(V - амплитуда синусоиды). Нормированная корреляционная функция будет равна сумме двух слагаемых

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = \tilde{\rho}_z(\tau) + \frac{V^2}{2}\cos\omega_0\tau . \qquad (14)$$

В случае наличия непериодических составляющих (или периодических несинусоидальных), непериодическую составляющую необходимо разложить в ряд Фурье по косинусам частот, соответствующим периодам. Нормированная корреляционная функция будет равна

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = \tilde{\rho}_z(\tau) + \frac{1}{2\tilde{D}_x}\sum_{i=1}^{n}\left(V_i^2\cos\omega_i\tau + U_i^2\sin\omega_i|\tau|\right). \qquad (15)$$

Определение гармонических составляющих приводит к большим вычислительным работам и такую задачу целесообразно выполнять с помощью цифровой ЭВМ.

Если корреляционная функция имеет характер изменения такой, как показан на рис.11, но только колебательные изменения кривой ("хвост" кривой) происходят не около оси абсцисс, а около прямой, параллельной оси абсцисс, то считают, что случайный процесс состоит из трех слагаемых - эргодической функции, синусоидальной составляющей и случайной величины.

Нормированная корреляционная функция будет равна

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = \tilde{\rho}_z(\tau) + \frac{V^2}{2\tilde{D}_x}\cos\omega_0\tau + \frac{D_c}{\tilde{D}_x} . \qquad (16)$$

Если корреляционная функция имеет колебательные изменения около прямой, непараллельной оси абсцисс (рис.12), то случайный процесс является нестационарным.

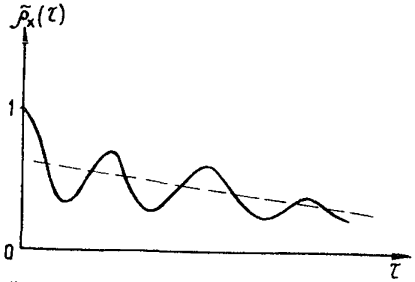


Рис.12. Нормированная корреляционная функция нестационарного случайного процесса

Такие процессы могут быть представлены как простейшие при разложении их по ортогональным или каноническим составляющим. Приближенно их можно представить как сумму периодических низкочастотных и высокочастотных случайных составляющих. Метод приближенного разложения корреляционной функции на составляющие и определение нагрузок, вызывающих изменение корреляционной функции, приводится в статье "Вибрационная устойчивость выемочных машин" [9].

Нестационарный случайный процесс

Вычисление оценочных значений математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции для нестационарного случайного процесса можно также выполнить по одной реализации, как при эргодическом стационарном случайном процессе. Для определения функции распределения параметра из осциллограммы наблюдения нестационарного случайного процесса функция сглаживалась, после чего определялась функция распределения центрированной случайной величины $\left[\rho(t)-\tilde{m}(t)\right]$. Аналогично этому можно определить корреляционную функцию центрированного случайного процесса. Сглаживание реализации можно производить просто на глаз или любым другим методом сглаживания функций.

Если обработка таких осциллограмм происходит с помощью цифровых ЭВМ, то для сглаживания можно воспользоваться методом скользящей средней, который состоит в том, что осредненные (сглаживаемые) значения функции в любой точке t принимают в некотором интервале $2T_0$. При изменении t этот интервал скользит вдоль оси t, чем и объясняется название метода (рис. 13). Оценочное значение математического ожидания определяется по формуле

$$\tilde{m}_x^* = \frac{1}{2T_0}\int_{t-T_0}^{t+T_0} x(s)\,ds . \qquad (17)$$

Интервалы $2T_0$ берутся достаточно большими, чтобы проявилась исследуемая случайность (т.е. в любом интервале $2T_0$ было достаточно большое количество колебаний реализации) и в то же время эти интервалы должны быть достаточно малыми, чтобы можно было в интервале считать статистическое математическое ожидание постоянным или линейной функцией от t.

Если такой интервал подобрать невозможно, то оценочные значения математического ожидания необходимо производить по достаточно большому числу реализаций.

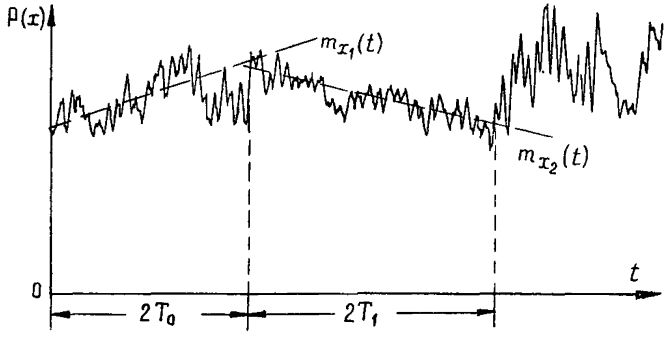


Рис. I3. Осциллограмма нестационарного случайного процесса с интервалами сглаживания

Оценочные значения корреляционной функции определяются по формуле

$$\tilde{K}_x^*(t+\tau,t)=\frac{1}{2T_1}\int_{t-T_1}^{t+T_1}\left[x(s+\tau)-\tilde{m}_x^*(s+\tau)\right]\left[x(s)-\tilde{m}_x^*(s)\right]ds. \quad (18)$$

Интервал $2T_1$ должен быть выбран таким, чтобы корреляционная функция при данном τ была в некоторой степени зависимой только от τ, а математическое ожидание должно быть постоянным или изменяться незначительно.

Если интервал $2T_1$ подобрать невозможно, то определить корреляционную функцию нестационарного случайного процесса по одной реализации нельзя, необходимо иметь несколько реализаций.

Практически интервалы $2T_0$ и $2T_1$ берутся одинаковыми и не менее I/5 всей реализации.

Условия определения статистических характеристик (математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции) нестационарного случайного процесса методом осреднения одной реализации более подробно изложены в работах [4, 6].

Нестационарный случайный процесс при наличии нескольких реализаций

Рассмотрим определение статистических характеристик случайного процесса $X(t)$ по результатам n независимых опытов, проведенных в одинаковых условиях.

Пусть $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ – конкретные значения случайного процесса, которые получились при проведении первого, второго, ..., n-го опыта.

Необходимо определить статистическое математическое ожидание $\tilde{m}_x(t)$ и нормированную корреляционную функцию $\tilde{r}_x(t_1, t_2)$ случайного процесса.

По аналогии с методикой определения статистической функции распределения параметра при наличии нескольких осциллограмм наблюдений сначала необходимо выбрать единую координационную сетку и единое начало отсчета.

Для всех кривых берутся единые по t сечения, равноотстоящие друг от друга на величину $\Delta t = \frac{T}{m}$ (интервал квантования). Длина интервала Δt выбирается из условия, что на участке любой осциллограммы длиной в один период наиболее высокочастотной гармоники располагалось не менее десяти точек (интервалов).

Осциллограммы нагрузок (например, в приводах струговых установок) характеризуются побочными высокочастотными составляющими, которые должны быть либо учтены либо нет при обработке опытных данных. Такое решение зависит от задачи исследования. Если высокочастотные гармоники не надо учитывать, то кривая может быть сглажена на глаз. Величина интервала Δt и количество интервалов m резко изменится: величина интервала увеличится, а m – соответственно уменьшится.

Для любого фиксированного момента времени t_i фиксированные значения $x(t_i)$ в каждом опыте будут случайными величинами.

По фиксированным значениям случайной функции составляется матрица реализации (табл. 4), где каждая строка соответствует определенной кривой (число строк соответствует числу реализаций – числу кривых), а число столбцов соответствует числу интервалов m.

Далее определяются оценочные (статистические) значения математического ожидания и дисперсии по каждому сечению случайной функции:

Таблица 4

Рабочие формулы		t_i / номер реализации	t_1	t_2	t_3	...	t_m
	$X_1(t)$	I	$X_1(t_1)$	$X_1(t_2)$	$X_1(t_3)$	...	$X_1(t_m)$
	$X_2(t)$	2	$X_2(t_1)$	$X_2(t_2)$	$X_2(t_3)$	...	$X_2(t_m)$
	$X_3(t)$	3	$X_3(t_1)$	$X_3(t_2)$	$X_3(t_3)$	...	$X_3(t_m)$
	⋮	⋮	⋮	⋮			⋮
	$X_n(t)$	n	$X_n(t_1)$	$X_n(t_2)$	$X_n(t_3)$	...	$X_n(t_m)$
$\sum = \sum_{i=1}^{n} X_i(t_k)$	$\sum$	–					
$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(t_k)$	$\frac{\sum}{n}$	–	$\tilde{m}_x(t_1)$	$\tilde{m}_x(t_2)$	$\tilde{m}_x(t_3)$	...	$\tilde{m}_x(t_m)$
	$[\tilde{m}_x(t_k)]^2$	–	$\tilde{m}_x^2(t_1)$	$\tilde{m}_x^2(t_2)$	$\tilde{m}_x(t_3)$	...	$\tilde{m}_x^2(t_m)$
$\sum^2 = \sum_{i=1}^{n}[X_i(t_k)]^2$	$\sum^2$	–				...	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i(t_k)]^2$	$\frac{\sum^2}{n}$	–				...	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i(t_k)]^2 - [\tilde{m}_x(t_k)]^2$	$\frac{\sum^2}{n} - \tilde{m}_x^2$	–				...	
$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum^2}{n} - m_x^2\right]$	$\tilde{D}_x(t_k)$	–	$\tilde{D}_x(t_1)$	$\tilde{D}_x(t_2)$	$\tilde{D}_x(t_3)$	...	$\tilde{D}_x(t_m)$

$$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_k)\ ; \qquad (19)$$

$$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)\right]^2. \qquad (20)$$

Чтобы определить статистическую корреляционную функцию $K_x(t_k t_\ell)$ случайного процесса, рассмотрим два фиксированных момента времени t_k и t_ℓ. Соответственно каждому моменту времени t_k и t_ℓ имеем в n опытах два ряда случайных величин

$$\begin{aligned} &x_1(t_k),\ x_2(t_k),\ x_3(t_k),\ \ldots,\ x_n(t_k) \\ &x_1(t_\ell),\ x_2(t_\ell),\ x_3(t_\ell),\ \ldots,\ x_n(t_\ell). \end{aligned} \qquad (21)$$

Статистическая корреляционная функция определяется по формуле

$$\tilde{K}_x(t_k, t_\ell) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)\right]\left[x_i(t_\ell) - \tilde{m}_x(t_\ell)\right]. \qquad (22)$$

Нормированная корреляционная функция

$$\tilde{r}_x(t_k, t_\ell) = \frac{\tilde{K}_x(t_k, t_\ell)}{\tilde{\sigma}_x(t_k)\,\tilde{\sigma}_x(t_\ell)}\ , \qquad (23)$$

где $\tilde{\sigma}_x(t_k)$ и $\tilde{\sigma}_x(t_\ell)$ – среднеквадратические отклонения для сечений t_k и t_ℓ.

Для вычисления дисперсии и корреляционной функции по формулам (21) и (22) требуется найти разность $\left[x_i(t_k) - m_x(t_k)\right]$, т.е. центрированные значения случайной функции. Эта операция в свою очередь требует для каждого фиксированного значения t_k производить в табл. 4 запись центрированных значений, что усложняет подсчет.

Если воспользоваться формулами:

$$\tilde{D}_x(t_k) \approx \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k)\right]^2 - \left[\tilde{m}_x(t_k)\right]^2\right\}; \qquad (24)$$

$$\tilde{K}_x(t_k, t_\ell) \approx \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_k)x_i(t_\ell)\right] - \left[\tilde{m}_x(t_k)\tilde{m}_x(t_\ell)\right]\right\}, \qquad (25)$$

отдельной записи центрированного значения случайной функции не потребуется. Для плавноизменяющихся кривых, если выбрать начало отсчета по оси ординат ближе к среднему математическому ожиданию всех кривых, можно пренебречь как малой величиной квадратами математических ожиданий (24) или их произведениями (25), тогда подсчет дисперсии и корреляционной функции значительно упрощается.

Последовательность вычисления статистических значений математического ожидания и дисперсии при выполнении на полноклавишных вычислительных машинах следующая: суммируя значения по каждому столбцу табл. 4 и деля сумму на число реализаций n, определяем статистические (оценочные) зависимости математического ожидания от t. После этого определяем квадрат математического ожидания. Результаты вычисления записываются в соответствующих строках таблицы.

Вычисление дисперсии для каждого сечения $t_к$ производится суммированием квадратов чисел $x_i(t_к)$, стоящих в соответствующих столбцах, сумма делится на число реализаций. Из частного от деления вычитается квадрат математического ожидания $\tilde{m}_x(t_к)$. Для получения несмещенной оценки разность умножают на поправочный коэффициент $\frac{n}{n-1}$.

Статистическая (оценочная) корреляционная функция $\tilde{K}_x(t_к, t_\ell)$ будет иметь различные значения при сочетании сечений $t_к$ и t_ℓ. Вследствие этого мы можем определить $\binom{m}{n}$ значений корреляционной функции, которые можно сгруппировать в виде матрицы (корреляционной матрицы).

Сначала определяются произведения математических ожиданий $[\tilde{m}_x(t_к)\,\tilde{m}_x(t_\ell)]$ и записываются со своим знаком в виде матрицы в разделе А табл. 5. После этого для двух сечений $t_к$ и t_ℓ перемножаются числа $x_i(t)$, стоящие в соответствующих столбцах табл.4, и произведения суммируются со своими знаками (на полноклавишных вычислительных машинах эти операции производятся автоматически).

Полученная сумма делится на число реализаций n и из результата деления вычитается соответствующее произведение математических ожиданий, которые были определены и записаны в разделе А табл. 5. Для получения несмещенной оценки корреляционной функции разность этих величин умножается на поправочный коэффициент $\frac{n}{n-1}$. Результаты вычисления записываются в виде корреляционной матрицы в разделе Б табл. 5.

Таблица 5

Формулы	t_c \ $t_к$	t_1	t_2	t_3	...	t_m
	Раздел А					
	t_1	$[\tilde{m}_x(t_1)]^2$	$\tilde{m}_x(t_1)\,\tilde{m}_x(t_2)$	$\tilde{m}_x(t_1)\,\tilde{m}_x(t_3)$	...	$\tilde{m}_x(t_1)\,\tilde{m}_x(t_m)$
	t_2		$[\tilde{m}_x(t_2)]^2$	$\tilde{m}_x(t_2)\,\tilde{m}_x(t_3)$	...	$\tilde{m}_x(t_2)\,\tilde{m}_x(t_m)$
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	t_m	—	—	—	...	$[\tilde{m}_x(t_m)]^2$
	Раздел Б					
$\tilde{K}_x(t_к - t_e) = \frac{n}{n-1} \times$	t_1	$\tilde{K}_x(t_1 t_1)$	$\tilde{K}_x(t_1 t_2)$	$\tilde{K}_x(t_1 t_3)$	...	$\tilde{K}_x(t_1 t_m)$
$\times\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_к)\,x_i(t_e) - \right.$	t_2	—	$\tilde{K}_x(t_2 t_2)$	$\tilde{K}_x(t_2 t_3)$	...	$\tilde{K}_x(t_2 t_m)$
$\left. - \tilde{m}_x(t_к)\,\tilde{m}_x(t_e)\right]$	t_3	—	—	$\tilde{K}_x(t_3 t_3)$	...	$\tilde{K}_x(t_3 t_m)$
	⋮					⋮
	t_m	—	—	—	...	$\tilde{K}_x(t_m t_m)$
$\tilde{\sigma}_x(t_к) = \sqrt{\tilde{K}_x(t_к t_к)}$	$\tilde{\sigma}_x(t_к)$	$\tilde{\sigma}_x(t_1)$	$\tilde{\sigma}_x(t_2)$	$\tilde{\sigma}_x(t_3)$	...	$\tilde{\sigma}_x(t_m)$
	Раздел В					
	t_1	$[\tilde{\sigma}_x(t_1)]^2$	$\tilde{\sigma}_x(t_1)\,\tilde{\sigma}_x(t_2)$	$\tilde{\sigma}_x(t_1)\,\tilde{\sigma}_x(t_3)$	...	$\tilde{\sigma}_x(t_1)\,\tilde{\sigma}_x(t_m)$
	t_2		$[\tilde{\sigma}_x(t_2)]^2$	$\tilde{\sigma}_x(t_2)\,\tilde{\sigma}_x(t_3)$	...	$\tilde{\sigma}_x(t_2)\,\tilde{\sigma}_x(t_m)$
	t_3			$[\tilde{\sigma}_x(t_3)]^2$	...	$\tilde{\sigma}_x(t_3)\,\tilde{\sigma}_x(t_m)$
	⋮					
	t_m				...	$[\tilde{\sigma}_x(t_m)]^2$
	Раздел Г					
$\tilde{r}_x(t_к\, t_e) = \frac{\tilde{K}_x(t_к t_e)}{\tilde{\sigma}_x(t_к)\,\tilde{\sigma}_x(t_e)}$	t_1	I	$\tilde{r}_x(t_1 t_2)$	$\tilde{r}_x(t_1 t_3)$	...	$\tilde{r}_x(t_1 t_m)$
	t_2		I	$\tilde{r}_x(t_2 t_3)$	...	$\tilde{r}_x(t_2 t_m)$
	⋮			⋮		⋮
	t_m	—	—	—	...	I

По главной диагонали матрицы (раздел Б) мы имеем дисперсии сечений $t_к$. Извлекая корень, определим оценочные значения среднеквадратического отклонения $\tilde{\sigma}_x(t_к)$.

Вычисление нормированной корреляционной функции $r_x(t_к, t_\ell)$ производится по формуле (23) в следующей последовательности. Вычисляются произведения среднеквадратических отклонений, соответствующие сечениям $t_к$ и t_ℓ. Результаты вычисления $\tilde{\sigma}_x(t_к)\tilde{\sigma}_x(t_\ell)$ записываются в разделе В табл.5. Полученные корреляционные функции (в разделе Б) делятся на соответствующие произведения среднеквадратических отклонений и результаты записываются в виде матрицы в разделе Г табл.5. По главной диагонали матрицы получаем единицы, так как производим деление дисперсии сечения на квадрат среднеквадратического отклонения

$$\tilde{\sigma}_x(t_к) = \sqrt{\tilde{D}_x(t_к)} = \sqrt{\tilde{K}_x(t_к, t_к)}.$$

После вычисления нормированной корреляционной матрицы необходимо произвести анализ, чтобы определить – возможно ли считать случайный процесс стационарным.

Математическое ожидание и дисперсия несколько меняются во времени, нормированная корреляционная функция вдоль параллелей главной диагонали изменяется тоже, но незначительно. В этом случае процесс можно считать стационарным, так как учитывая ограниченность выборки (I2-20 реализаций), а также наличие сопутствующих случайных процессов при осциллографировании, такие изменения можно считать незначимыми (при условии, если изменения не носят сколько-нибудь закономерного характера).

Чтобы определить статистические характеристики стационарного случайного процесса, необходимо произвести осреднение этих величин по формулам:

математическое ожидание

$$\tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{m}_x(t_i)}{m} = const \; ; \qquad (26)$$

дисперсия

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \tilde{D}_x(t_i) = const. \qquad (27)$$

Нормированная корреляционная функция для различных $\tau = t_к - t_ℓ$ осредняется вдоль параллелей главной диагонали матрицы

при $\tau = 0$

$$\tilde{\rho}_x(0) = 1;$$

при $\tau = \tau_1 = t_1$

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = \frac{\tilde{r}_x(t_1 t_2) + \tilde{r}_x(t_2 t_3) + \ldots + \tilde{r}_к(t_{m-1}, t_m)}{m};$$

при $\tau = 2t_1$

$$\tilde{\rho}_x(2\tau_1) = \frac{\tilde{r}_x(t_1 t_3) + \tilde{r}_x(t_2 t_4) + \ldots + \tilde{r}_x(t_{m-2}, t_m)}{m-1}$$

и т.д.

По данным значений $\tilde{\rho}_x(\tau)$ строится график нормированной корреляционной функции.

Необходимо отметить, что часто вследствие малого объема выборки происходят незакономерные колебания нормированной корреляционной функции, особенно для больших значений τ. В подобных случаях требуется произвести сглаживание этой зависимости, после чего принять окончательное решение о стационарности случайного процесса по поведению корреляционной функции. Амплитудные колебания корреляционной функции по мере увеличения τ должны уменьшаться, приближаясь к нулю.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ДОСТОВЕРНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Постановка вопроса об оценке функции распределения случайной величины

При обработке статистических данных очень важно правильно оценить [10] точность полученных результатов.

Если оценка точности завышена, то можно дать ложное заключение об исследуемой величине и наоборот, если точность эксперимента занижена, то можно не выявить всех закономерностей исследуемого процесса.

Разработка рациональных методов оценки [11] результатов наблюдений является одной из основных задач математической статистики. В основе оценки экспериментальных методов обработки лежит закон больших чисел, согласно которому при большом числе опытов вероятности событий могут быть заменены соответствующими частотами.

Измеряя на практике какую-либо физическую величину, мы не можем измерить ее точно без ошибок.

Ошибки результатов измерений, в том числе и ошибки при осциллографировании, могут быть из-за случайных или неслучайных (систематических, что реже) ошибок контрольно-записывающей аппаратуры (КЗА); из-за ошибок и флуктуаций, свойственных данному явлению.

Указанные ошибки будут существенными, если проведено малое количество опытов (получена осциллограмма для малого интервала времени) или если условия проведения опытов были нестабильные.

В связи с этим оценка точности и достоверности функции распределения случайной величины или функции распределения аргумента случайной функции состоит в решении следующих основных задач:

Первая задача. Если при постановке решаемой задачи нет необходимости знать вид функции распределения случайной величины, а нужны только характеристики этого распределения (моменты распределения), то приближенные (оценочные) значения моментов (математического ожидания, дисперсии) могут быть получены при обработке результатов измерения. Эта задача называется определением "точечных" оценок характеристик распределения случайной величины.

Вторая задача. Предполагается, что вид функции распределения известен, необходимо оценить значения параметров этой функции по измеренным значениям физической величины. Эта задача называется выравниванием или сглаживанием статистических рядов или функций.

Третья задача. По известным статистическим данным и найденным оценочным значениям параметров при *apriori*-ном выборе функции распределения определить совместимость полученных результатов с предложенным видом функции, т.е. определить, правильно ли выбран вид функции распределения. Эта задача называется определением "критерия согласия" или "критерия непротиворечивости".

Четвертая задача. При ограниченном числе опытов и нестабильных условиях испытаний необходимо оценить точность и надежность найденных оценочных параметров. Эта задача называется определением доверительных интервалов возможного значения параметра, соответствующих принятой доверительной вероятности.

Решение указанных задач для оценки функций распределения случайных величин подробно изложены в учебных пособиях по теории вероятностей. Однако из всех возможных способов решения оценочных задач целесообразно в данной методике остановиться на конкретном способе, который применительно к исследованию процес-

сов горного дела, в особенности струговой выемки, был бы наиболее рациональным.

Первая задача решается определением статистических (оценочных) характеристик. Если математическое ожидание до обработки не было известно, то для того, чтобы оценочные характеристики были состоятельными, несмещенными и эффективными, необходимо [I2] оценочные характеристики функции распределения определять по формулам:

математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \tag{28}$$

дисперсия

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \tag{29}$$

Если случайная величина распределена нормально, то несмещенная оценка дисперсии определяется по формуле

$$\tilde{D}_x = \frac{K_n^2}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 ,$$

где $K_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \sqrt{\dfrac{n-1}{2}}$; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

При известном математическом ожидании несмещенная оценка дисперсии равна

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 , \tag{31}$$

а если исследуемая величина нормальна, то дисперсия равна

$$\tilde{D}_x = \frac{K_{n+1}^2}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 , \tag{32}$$

где $K_{n+1} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

При большом объеме выборки статистические данные объединяют в группы (разряды), тогда, если частота и среднее значение в

каждом разряде определяются по соответствующим формулам $p_j^* = \frac{m}{n}$; $\tilde{x}_j = \frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{m} x_{ji}$, оценки математического ожидания и дисперсии определяются с учетом поправок Шеппарда:

$$\tilde{m}_x \approx \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j p_j^* ; \qquad (33)$$

$$\tilde{D}_x \approx \sum_{j=1}^{K} (\tilde{x}_j - \tilde{m}_x)^2 \cdot p_j^2 - \frac{h^2}{12}, \qquad (34)$$

где K - количество разрядов;

h - длина интервала разряда.

Решение второй задачи сводится к подбору параметров для заранее известной теоретической функции распределения. Подбор параметров должен быть произведен так, чтобы теоретическая функция распределения наилучшим образом описывала (или сглаживала) данное статистическое распределение.

Существуют различные способы сглаживания статистических данных:

способ моментов, согласно которому параметры определяются из условия равенства числовых характеристик (моментов) теоретического распределения соответствующим статистическим характеристикам. Обычно приравнивают математические ожидания и дисперсии соответствующих распределений;

способ наименьших квадратов, по которому параметры определяются согласно условиям минимума суммы квадрата отклонений статистических точек от теоретической кривой;

система кривых Пирсона, которая основана на сохранении первых четырех моментов статистического распределения;

набор кривых Бородачева, принцип построения которых следует из физической сущности случайного процесса;

бесконечный ряд Эджворта [12], в котором при сравнительно небольшом отклонении статистической функции распределения от нормальной первые коэффициенты A - ряда Шарлье будут соответственно равны

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z) - \frac{1}{6}\tilde{S}_K \cdot \varphi^{(2)}(z) + \frac{1}{24}\tilde{E}_x \varphi^{(3)}(z),$$

где $\varphi^{(2)}(z)$, $\varphi^{(3)}(z)$ - производные второго и третьего порядка от нормальной плотности вероятности $\varphi(z)$;

$$z = \frac{x - M(x)}{\tilde{\sigma}_x}; \quad \tilde{S}_K = \frac{\mu_3}{\tilde{\sigma}^3} \quad \text{- оценка асимметрии;}$$

$$\tilde{E}_x = \frac{\mu_4}{\tilde{\sigma}_4} - 3 \quad \text{- оценка эксцесса.}$$

$\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4$ - оценки второго, третьего и четвертого центральных моментов соответственно.

Значения функций $\varphi(z), \varphi^{(2)}(z)$ и $\varphi^{(3)}(z)$ табулированы.

Из указанных способов необходимо остановиться на способе наименьших квадратов, так как он имеет существенные преимущества по сравнению с другими: определение параметров производится с большой степенью точности и сравнительно простыми математическими формулами.

Третья и четвертая задачи решаются совместно.

Вопрос о выборе необходимого (оптимального) критерия согласия еще в настоящее время проблематичен. Однако необходимо иметь в виду, что если при одной и той же доверительной вероятности доверительный интервал по одному критерию меньше чем по другому и будет находиться во втором интервале, то первый критерий согласия лучше определит рациональный выбор вида функции распределения.

Для данной методики предлагается x^2- критерий, так как он приводит к значительно простому математическому аппарату при наличии теоретической и статистической плотностей распределения и при большом количестве опытов n .

Критерий согласия x^2 определяется по формуле

$$x^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (35)$$

где K - число разрядов;

m_i - число значений в i -м разряде;

n - число опытов.

Постановка вопроса об оценке точности и достоверности случайного процесса

Для случайного процесса осциллограмма наблюдения представляет одну реализацию и, следовательно, при определении оценочных

значений математического ожидания, корреляционной функции и спектральной плотности по одной (для стационарного эргодического процесса) реализации или по нескольким реализациям имеют место элементы случайности. Эти величины поэтому называются оценочными.

Распространение методов проверки точности и достоверности случайных величин на непрерывные случайные процессы, которыми являются осциллограммы наблюдения, не всегда дают положительные результаты.

При оценке случайного процесса исходят из того, что статистические характеристики - математическое ожидание $\tilde{m}_x(t)$, дисперсия $\tilde{D}_x(t)$ и корреляционная функция $\tilde{K}_x(\tau)$ - есть случайные функции, параметрически зависящие от продолжительности интервала T, которые сходятся по дисперсии к случайным функциям $m_x(t)D_x(t)$ и $K_x(\tau)$, т.е. можно записать, что статистические (оценочные) математическое ожидание и корреляционная функция стремятся по вероятности к $m_x(t)$ и $K_x(\tau)$:

$$m_x(t) = \lim_{T \to \infty} M\left[\tilde{m}_x(t)\right]; \qquad (36)$$

$$K_x(t) = \lim_{T \to \infty} M\left[\tilde{K}_x(t)\right]. \qquad (37)$$

Ввиду сложности данной задачи рассмотрим отдельные частные случаи:

Сглаживание и аппроксимация корреляционных функций эргодического стационарного случайного процесса способом наименьших квадратов.

Точность определения статистического математического ожидания и статистической корреляционной функции эргодического стационарного случайного процесса.

Сглаживание и аппроксимация корреляционных функций эргодического стационарного случайного процесса

Любая корреляционная функция стационарного случайного процесса может быть согласно работе [4] с любой степенью точности аппроксимирована линейной комбинацией функций вида:

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|}; \qquad (38)$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0 \tau ; \qquad (39)$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos\omega_0 \tau + \gamma \sin\omega_0 |\tau|). \qquad (40)$$

Определим значения параметров α, ω_0 и γ для простейших случаев, т.е. для функций, определяемых формулами (38–40), не учитывая линейные комбинации этих функций.

Для корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|}$

Пусть в результате подсчета нормированной корреляционной функции получен ряд

τ_i	0	I	2	3	...	...	n
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	I	$\tilde{\rho}_x(1)$	$\tilde{\rho}_x(2)$	$\tilde{\rho}_x(3)$	...	...	$\tilde{\rho}_x(n)$

По виду функции $\tilde{\rho}_x(\tau)$, сглаживая, убеждаемся, что кривую можно аппроксимировать нелинейной зависимостью

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (41)$$

Методом наименьших квадратов требуется определить оптимальный параметр α. Практически данная задача решается следующим образом.

Задаемся рядом значений параметра α, для которых согласно таблице e^{-x} [13] экспонента находится приблизительно в пределах колебания исследуемой функции.

Определяем для выбранных значений α ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$) сумму квадратов отклонений по формуле

$$\Sigma^2(\alpha_j) = \sum_{i=0}^{n} \left[\tilde{\rho}_x(\tau_i) - e^{-\alpha_j|\tau_i|}\right]^2 \qquad (42)$$

Результаты подсчета записываются в табл. 6.

Построим график функции $\Sigma^2(\alpha_j)$. Минимум этой функции, определяемый на графике (рис. 14), есть искомая величина α.

Для корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0 \tau$

Чтобы определить параметры α и ω_0 нормированной корреляционной функции вида

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0 \tau, \qquad (43)$$

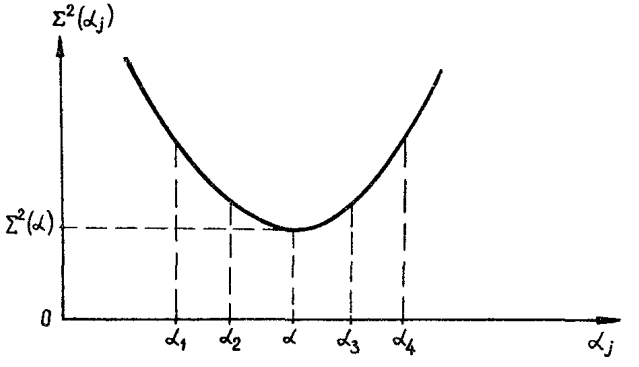


Рис. I4. Кривая изменения параметра α, определяемая методом наименьших квадратов

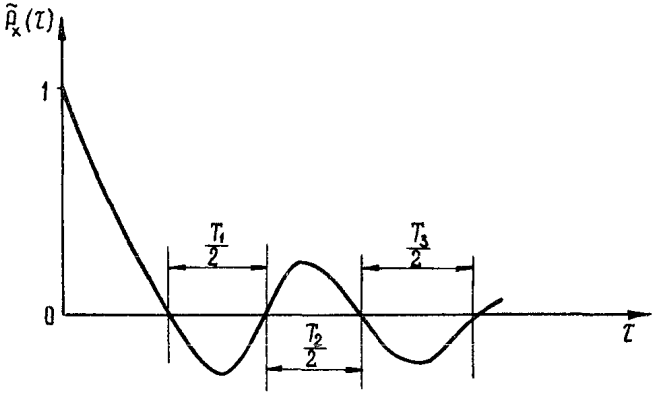


Рис. I5. Периоды корреляционной функции для определения пределов изменения параметра ω_0

Таблица 6

α_j			$\alpha=\alpha_1$		$\alpha=\alpha_2$			$\alpha=\alpha_K$	
n	τ_i	$\tilde{\rho}_x(\tau)$	$e^{-\alpha_1\tau_i}$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_1\tau_i}$	$e^{-\alpha_2\tau_i}$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_2\tau_i}$	...	$e^{-\alpha_K\tau_i}$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_K\tau_i}$
I	0	$\tilde{\rho}_x(0)$	I	0	I	0	...	I	0
2	I	$\tilde{\rho}_x(1)$	$e^{-\alpha_1}$	$y_1(\alpha_1)$	$e^{-\alpha_2}$	$y_1(\alpha_2)$	...	$e^{-\alpha_K}$	$y_1(\alpha_K)$
3	2	$\tilde{\rho}_x(2)$	$e^{-2\alpha_1}$	$y_2(\alpha_1)$	$e^{-2\alpha_2}$	$y_2(\alpha_2)$	...	$e^{-2\alpha_K}$	$y_2(\alpha_K)$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$n-1$	$\tilde{\rho}_x(n-1)$	$e^{-(n-1)\alpha_1}$	$y_{(n-1)}(\alpha_1)$	$e^{-(n-1)\alpha_2}$	$y_{n-1}(\alpha_2)$	...	$e^{-(n-1)\alpha_K}$	$y_{n-1}(\alpha_K)$
$n+1$	n	$\tilde{\rho}_x(n)$	$e^{-n\alpha_1}$	$y_n(\alpha_1)$	$e^{-n\alpha_2}$	$y_n(\alpha_2)$	...	$e^{-n\alpha_K}$	$y_n(\alpha_K)$
		$\Sigma^2(\alpha_j)$	—	$\Sigma^2(\alpha_1)$	—	$\Sigma^2(\alpha_2)$	...	—	$\Sigma^2(\alpha_K)$

Таблица 7

При $\omega_0=\omega_{0_1}$									
α_i			$\alpha=\alpha_1$		$\alpha=\alpha_2$		...	$\alpha=\alpha_\ell$	
n	τ_i	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)$	$e^{-\alpha_1\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_1\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$	$e^{-\alpha_2\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_2\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$	...	$e^{-\alpha_\ell\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$	$\tilde{\rho}_x(\tau_i)-e^{-\alpha_\ell\tau_i}\cos\omega_{0_1}\tau_i$
I	0	$\tilde{\rho}_x(0)$	I	0	I	0		I	0
2	I	$\tilde{\rho}_x(1)$	$e^{-\alpha_1}\cos\omega_{0_1}$	$y_1(\alpha_1\omega_{0_1})$	$e^{-\alpha_2}\cos\omega_{0_1}$	$y_1(\alpha_2\omega_{0_1})$	...	$e^{-\alpha_\ell}\cos\omega_{0_1}$	$y_1(\alpha_\ell\omega_{0_1})$
3	2	$\tilde{\rho}_x(2)$	$e^{-2\alpha_1}\cos 2\omega_{0_1}$	$y_2(\alpha_1\omega_{0_1})$	$e^{-2\alpha_2}\cos 2\omega_{0_1}$	$y_2(\alpha_2\omega_{0_1})$	...	$e^{-2\alpha_\ell}\cos 2\omega_{0_1}$	$y_2(\alpha_\ell\omega_{0_1})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
n	$n-1$	$\tilde{\rho}_x(n-1)$	⋮	$y_{n-1}(\alpha_1\omega_{0_1})$	⋮	$y_{n-1}(\alpha_2\omega_{0_1})$	...		$y_{n-1}(\alpha_\ell\omega_{0_1})$
$n+1$	n	$\tilde{\rho}_x(n)$	$e^{-n\alpha_1}\cos n\omega_{0_1}$	$y_n(\alpha_1\omega_{0_1})$	$e^{-n\alpha_2}\cos n\omega_{0_1}$	$y_n(\alpha_2\omega_{0_1})$	...	$e^{-n\alpha_\ell}\cos n\omega_{0_1}$	$y_n(\alpha_\ell\omega_{0_1})$
		$\Sigma^2(\alpha_i\omega_{0_1})$	—	$\Sigma^2(\alpha_1\omega_{0_1})$	—	$\Sigma^2(\alpha_2\omega_{0_1})$	...	—	$\Sigma^2(\alpha_\ell\omega_{0_1})$

по методу наименьших квадратов, можно аналогично предыдущему примеру не решать систему уравнений для нахождения экстремальных точек, а свести к построению графиков изменения этих параметров. Сначала определяется совокупность значений, которым соответствует минимум минимальных значений суммы квадратов отклонений.

По полученному числовому ряду значений $\tilde{\rho}_x(\tau_i)$ ориентировочно определяем значения параметров α и ω_0.

Параметр α определяется по начальным значениям точек функции $\tilde{\rho}_x(\tau_i)$, для которых преобладает сомножитель экспоненты формулы (43).

Параметр ω_0 определяется по конечным значениям точек $\tilde{\rho}_x(\tau_i)$, для которых преобладают значения косинусоиды. Для этого ориентировочно по виду кривой определяются периоды T_1, T_2, T_3 и по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (рис.I5) вычисляются пределы изменения параметра ω_0. В данном случае ω_0 является циклической (круговой) частотой колебания.

Если величина T на графике нормированной корреляционной функции будет при изменении τ почти одинаковой, т.е. период мало изменяется, то, ориентировочно увеличивая эти значения на I0-20%, по интервалу изменения T определим интервал изменения параметра ω_0. Следовательно, имеем интервалы изменения параметров α и ω_0. При делении их на равные части получаем два соответствующих ряда

$$\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \ldots, \omega_{0k};$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\ell.$$

Для фиксированного значения ω_{01} производится подсчет суммы квадратов отклонений по формуле (42). Результаты подсчета записываются в табл. 7.

Аналогичные таблицы составляются для последующих фиксированных значений $\omega_{02}, \omega_{03} \ldots \omega_{0k}$ при изменении α в заданном интервале $(\alpha_1 - \alpha_\ell)$.

По значениям $\sum^2(\alpha_i, \omega_{0j})$ строятся графики зависимости суммы квадратов от α_i, которые являются квадратическими зависимостями (рис. I6).

Семейство кривых показывает изменение параметров α_i и ω_{0j}. Минимум огибающей семейства кривых определит наивыгоднейшее значение α. На рис. I6 это значение α показано пунктиром. По гра-

фику определяют числовое значение суммы квадратов наивыгоднейшего значения Σ^2, а согласно формуле (42) находят оптимальное значение второго параметра ω_0.

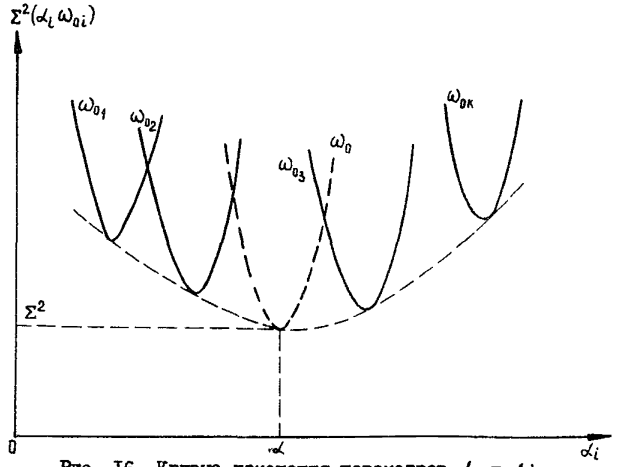


Рис. 16. Кривые изменения параметров α и ω_0, определяемые методом наименьших квадратов

Для корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)=\tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|}[\cos\omega_0\tau+\gamma\sin\omega_0|\tau|]$

Нормированная корреляционная функция данного типа имеет вид:

$$\tilde{\rho}_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}[\cos\omega_0\tau+\gamma\sin\omega_0|\tau|]. \qquad (44)$$

Функция зависит от трех параметров α, ω_0 и γ. Выбор этих параметров методом наименьших квадратов приводит к решению системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\tilde{\rho}_x(\tilde{\tau}_i,\alpha,\omega_0,\gamma)\right]\left(\frac{\partial\tilde{\rho}_x}{\partial\alpha}\right)_i=0\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\tilde{\rho}_x(\tilde{\tau}_i,\alpha,\omega_0,\gamma)\right]\left(\frac{\partial\tilde{\rho}_x}{\partial\omega_0}\right)_i=0\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\tilde{\rho}_x(\tilde{\tau}_i,\alpha,\omega_0,\gamma)\right]\left(\frac{\partial\tilde{\rho}_x}{\partial\gamma}\right)_i=0
\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Решение данного вида системы уравнений представляет большие трудности и может быть выполнено на цифровых ЭВМ.

Однако в частном случае; когда $\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0}$ (корреляционная функция имеет экстремальное, максимальное, значение в точке $\tau = 0$), нормированную корреляционную функцию можно представить как произведение экспоненты и синусоиды, так как

$$\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau = A \sin (\omega_0 \tau + \varphi_0), \qquad (46)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \\ tg\, \varphi_0 &= \frac{\omega_0}{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Следовательно, нормированная корреляционная функция третьего вида будет зависеть не от трех параметров, а только от α и ω_0.

$$\tilde{\rho}_x(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|} \sin (\omega_0 \tau + \varphi_0), \qquad (48)$$

где A - амплитуда (наибольшее отклонение от оси абсцисс);

φ_0 - начальная фаза.

Определение параметров α и ω_0 методом наименьших квадратов производится аналогично предыдущему примеру.

При применении способа наименьших квадратов необходимо иметь в виду, что если имеется небольшое число измерений (небольшое число точек, которые нужно апроксимировать данной кривой способом наименьших квадратов), то данный способ приводит к очень большой и практически весьма ощутимой погрешности.

Если число точек велико, то способ наименьших квадратов приводит к большим вычислительным работам. Однако применение теоретических основ современной линейной алгебры позволяет получить те же результаты более выразительно и особенно наглядно в свете многомерной геометрии [I4].

Точность определения статистического математического ожидания и статистической корреляционной функции эргодического стационарного случайного процесса

В основе оценки точности математического ожидания является условие, что при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} M\left[\tilde{m}_x(t)\right] = m_x(t).$$

В качестве меры точности оценочных значений математического ожидания $\tilde{m}_x(t)$ можно взять дисперсию математического ожидания D_m, которая при $T \to \infty$ будет стремиться к нулю [8]:

$$D_m = M\left[(\tilde{m}_x(t) - m_x)^2\right] = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_x(\tau)\, d\tau. \quad (49)$$

Так как статистическое математическое ожидание определялось по формуле (9), тогда

$$D_m = \frac{1}{n}\sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|\ell|}{n}\right) K_x(t_\ell). \quad (50)$$

Корреляционная функция $K_x(\tau)$ является четной функцией, тогда

$$D_m = \frac{D_x}{n} + \frac{2}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1} K_x\left(\frac{\ell T}{n}\right) - \frac{2}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell \cdot K_x\left(\frac{\ell T}{n}\right). \quad (51)$$

При конечном интервале T дисперсия D_m не равна нулю и зависит от длины интервала T.

Рассмотрим конкретный случай, когда корреляционная функция стационарного случайного процесса равна

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|}. \quad (52)$$

Тогда подставляя формулу (52) в формулу (49) и интегрируя, находим, что

$$D_m = \tilde{D}_x \frac{2}{\alpha T}\left[1 - \frac{1}{\alpha T}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]. \quad (53)$$

Так как $\alpha T \gg 1$, то приближенно дисперсия

$$D_m \approx \tilde{D}_x \frac{2}{\alpha T}. \quad (54)$$

Если задаться отношением дисперсий $\frac{D_m}{\tilde{D}_x} \leq 0{,}01$, что составит около 10% неточности статистического среднеквадратического отклонения, тогда длительность записи осциллограммы должна быть $T \geq \frac{200}{\alpha}$; подставляя (52) в формулу (51), при условии, что статистические математическое ожидание и корреляционная функция определялись путем суммирования, но не интегрирования, имеем:

$$\tilde{D}_m = \tilde{D}_x \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} e^{-\frac{\alpha T}{n}\ell} - \frac{2}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \cdot e^{-\frac{\alpha T}{n}\ell} \right]. \qquad (55)$$

Так как

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell e^{-\frac{\alpha T}{n}\ell} = -n \frac{\partial}{\partial(\alpha T)} \left[\sum_{\ell=1}^{n-1} e^{-\frac{\alpha T}{n}\ell} \right], \qquad (56)$$

считаем, что

$$S_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n-1} e^{-\frac{\alpha T}{n}\ell} = \frac{e^{-\alpha T} - e^{-\frac{\alpha T}{n}}}{e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1} = \frac{e^{\alpha T \frac{1-n}{n}} - 1}{1 - e^{-\alpha T \frac{1}{n}}}. \qquad (57)$$

После преобразования (55) получаем:

$$\tilde{D}_m = \tilde{D}_x \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \frac{1}{e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1} - \frac{2e^{-\frac{\alpha T}{n}}}{\left(e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1\right)^2 n^2} \left(1 - e^{-\alpha T}\right) \right]. \qquad (58)$$

Раскрывая по правилу Лопиталя неопределенность пределов второго и третьего слагаемых (58), при $n \to \infty$ получаем формулу (53).

Если взять отношение дисперсии математического ожидания D_m, полученной путем интегрирования, и дисперсии $\tilde{D}_m$, полученной путем замены интеграла суммой, и считая, что $D_x \approx \tilde{D}_x$, имеем

$$\lambda_m = \frac{D_m}{\tilde{D}_m} = \frac{\frac{2}{\alpha T} - \frac{2}{\alpha^2 T^2}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)}{\frac{1}{n}\left[1 + \frac{2}{e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1} - \frac{2}{n} \frac{e^{-\frac{\alpha T}{n}}}{\left[e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1\right]^2}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]}. \qquad (59)$$

Так как $e^{-\alpha T}$ при $\alpha T \geq 10$ малая величина ($\leq 0{,}000045$) и отбрасывая последние слагаемые, как величины малого порядка, получаем

$$\lambda_m \approx \frac{2n}{\alpha T} th \frac{\alpha T}{2n}. \qquad (60)$$

График зависимости величины λ_m от $x = \frac{2n}{\alpha T}$ показан на рис.I7. При $x = \frac{2n}{\alpha T} = 5$ практически λ_m не зависит от $th\frac{1}{x}$, т.е. относительная погрешность замены операции интегрирования операцией суммирования не превышает I%.

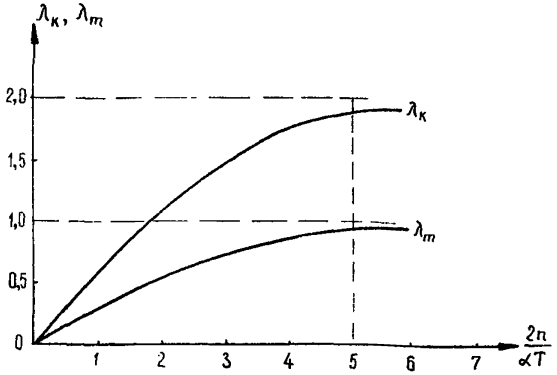


Рис. I7. Кривые изменения зависимости величины $\lambda_к$ и λ_m от времени

В этом случае длина осциллограммы должна быть

$$T_1 \geq \frac{2n}{5\alpha} . \qquad (6I)$$

При относительной погрешности $\leq$I0% длина осциллограммы должна быть $T_{10} \geq \frac{n}{\alpha}$.

При $n \geq 200$ замена операции интегрирования операцией суммирования практически не вносит дополнительной погрешности.

Рассмотрим второй конкретный пример, когда корреляционная функция стационарного случайного процесса равна

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau . \qquad (62)$$

Заменяя $\cos\omega_0\tau$ согласно формуле Эйлера показательной функцией

$$\cos\omega_0\tau = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right) , \qquad (63)$$

составим отношение дисперсий $\frac{\tilde{D}_m}{\tilde{D}_x}$ и интегрируя по τ (при $\tau > 0$) получаем

$$\frac{D_m}{\tilde{D}_x} = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1-\frac{\tau}{T}\right) e^{-\alpha|\tau|} \cos\omega_0\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+i\omega_0)T}\left\{1-\frac{1}{(\alpha+i\omega_0)T}\left[1-e^{-(\alpha+i\omega_0)T}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{(\alpha-i\omega_0)T}\left\{1-\frac{1}{(\alpha-i\omega_0)T}\left[1-e^{-(\alpha-i\omega_0)T}\right]\right\} \quad (64)$$

Так как $\alpha T \geq 1$, а $\frac{1}{\alpha T} \approx 0$ и исключая вторые слагаемые, можно записать

$$\frac{D_m}{\tilde{D}_x} \approx \frac{1}{(\alpha+i\omega_0)T} + \frac{1}{(\alpha-i\omega_0)T} = \frac{2}{T}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}. \quad (65)$$

Если принять относительную погрешность меньше 10%, т.е. отношение среднеквадратических отклонений $\frac{\sigma_m}{\sigma_x} \leq 0{,}1$ (так как среднеквадратическое отклонение имеет одинаковую размерность со случайной величиной), тогда отношение дисперсий $\frac{D_m}{\tilde{D}_x} \leq 0{,}01$. В этом случае длина осциллограммы должна быть не менее

$$T \geq 200\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}. \quad (66)$$

Как показал предыдущий пример, замена операции интегрирования на операцию суммирования незначительно изменила точность вычисления характеристик случайной функции. Для принятой длины осциллограммы согласно (54) или (66) погрешность, вызванная заменой операции интегрирования операцией суммирования, незначительная и ее можно не учитывать.

Статистическая корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса определялась по формуле (19)

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{n-\tau}\sum_{i=1}^{n-\tau} \overset{\circ}{x}(t_i)\,\overset{\circ}{x}(t_{i+\tau}),$$

где $\overset{\circ}{x}(t_i) = x(t_i) - \tilde{m}_x$ - центрированное значение случайной функции при $T = t_i$.

При $\tau = 0$ получаем формулу для статистической дисперсии, которая для эргодического стационарного случайного процесса есть величина постоянная

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\overset{\circ}{x}(t_i)\right]^2. \quad (67)$$

При обработке статистического материала, как правило, истинное значение математического ожидания неизвестно, и вследствие замены математического ожидания его статистической оценкой $\tilde{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)$ воспользуемся для определения дисперсии поправкой Шеппарда. Тогда статистическая дисперсия для малой выборки при условии замены $\tilde{m}_x$ на m_x будет равна:

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\overset{\circ}{x}(t_i)\right]^2 - \frac{T}{12n^2}, \qquad (68)$$

где T - длина осциллограммы.

Если n достаточно велико, то замена математического ожидания его статистической оценкой $\tilde{m}_x$ практически не изменяет величины дисперсии, а поправка $\frac{T}{12n^2} \to 0$.

Основой оценки точности математического ожидания является условие, когда при $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} M\left[\tilde{K}_x(\tau)\right] = K_x(\tau).$$

В качестве меры точности оценочных значений можно взять дисперсию статистической корреляционной функции

$$D_K(\tau) = M\left[\left(\tilde{K}_x(\tau) - K_x(\tau)\right)^2\right], \qquad (69)$$

которая при $T \to \infty$ будет стремиться к нулю. Для конечного значения T дисперсия D_K будет малой конечной величиной, зависящей [8] от вида корреляционной функции, длины осциллограммы T и величины интервала τ

$$D_K(\tau) = \frac{2}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left(1-\frac{\tau_1}{T-\tau}\right)\left[\tilde{K}_x^2(\tau_1) + \tilde{K}_x(\tau_1+\tau)\tilde{K}_x(\tau_1-\tau)\right]d\tau_1, \qquad (70)$$

где τ_1 - текущая ордината интегрирования.

Если принять во внимание, что

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x = \tilde{K}_x(0),$$

тогда выражение (70) имеет вид

$$D_K(0) = D_D(\tau) \approx \frac{4}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)\tilde{K}_x^2(\tau_1)\,d\tau_1. \qquad (71)$$

Рассмотрим конкретные случаи, когда корреляционная функция описывается формулами (52) или (62).

Для корреляционной функции вида (52) при подстановке ее в выражение (70) имеем:

$$\sigma_K^2(\tau) = D_K(\tau) \approx \frac{\tilde{D}_x^2}{\alpha(T-\tau)}\left[1+(1+2\alpha\tau)e^{-2\alpha\tau}\right]. \quad (72)$$

При $\tau = 0$

$$\sigma_K^2(0) = D_D \approx \frac{\tilde{D}_x^2}{\alpha T}, \quad (73)$$

откуда

$$\frac{\sigma_D}{\tilde{D}_x} \approx \sqrt{\frac{2}{\alpha T}}.$$

Если принять, что относительная погрешность должна быть $\frac{\sigma_D}{\tilde{D}_x} \leq 0{,}1$ (10%), тогда длина осциллограммы должна быть $T \geq \frac{200}{\alpha}$.

Для корреляционной функции вида (62) с учетом замены показательной функцией (63) имеем

$$\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-(\alpha+i\omega_0)\tau} + \tilde{D}_x e^{-(\alpha-i\omega_0)\tau}. \quad (74)$$

Такой заменой $\cos\omega_0\tau$ мы преобразовали корреляционную функцию (62) в сумму корреляционных функций вида (52). Показатели степени при этой замене есть комплексно-сопряженные числа.

Применяя для каждых слагаемых результаты интегрирования (72), имеем

$$\sigma_K^2(\tau) \approx \frac{\tilde{D}_x^2}{(\alpha+i\omega_0)(T-\tau)}\left\{1+\left[1+2(\alpha+i\omega_0)\tau\right]e^{-2(\alpha+i\omega_0)\tau}\right\} +$$

$$+\frac{\tilde{D}_x^2}{(\alpha-i\omega_0)(T-\tau)}\left\{1+\left[1+2(\alpha-i\omega_0)\tau\right]e^{-2(\alpha-i\omega_0)\tau}\right\}. \quad (75)$$

Умножая числитель и знаменатель каждого слагаемого (75) на соответствующие сопряженные комплексные числа и учитывая формулы Эйлера для перевода показательных функций в тригонометрические, имеем:

$$\sigma_K^2(\tau) \approx \frac{\tilde{D}_x^2}{(\alpha^2+\omega_0^2)(T-\tau)}\left[2\alpha+2\alpha e^{-2\alpha\tau}\cos 2\omega_0\tau -\right.$$

$$-2\omega_0 e^{-2\alpha\tau}\sin 2\omega_0\tau + 4(\alpha^2+\omega_0^2)\tau e^{-2\alpha\tau}\cos 2\omega_0\tau\Big]. \quad (76)$$

При $\tau = 0$

$$\sigma_K^2(0) \approx \frac{4\tilde{D}_x^2}{T}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}. \quad (77)$$

Если принять относительную погрешность меньше 10% ($\frac{\sigma_D}{\tilde{D}_x} \le 0{,}1$), тогда длина осциллограммы должна быть не менее

$$T \ge 400\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_0^2}. \quad (78)$$

Согласно работам [8, 12] дисперсия статистической корреляционной функции при замене операции интегрирования операцией суммирования имеет вид:

$$\tilde{D}_K(\tau) \approx \frac{T}{n(T-\tau)}\left[\tilde{D}_x + \tilde{K}_x(\tau) + 2\sum_{\ell=1}^{\infty}\tilde{K}_x(t_\ell) + 2\sum_{\ell=1}^{\infty}\tilde{K}_x(\tau+t_\ell)\cdot\tilde{K}_x(\tau-t_\ell)\right] \quad (79)$$

Рассмотрим частный случай, когда корреляционная функция имеет вид $\tilde{K}_x(\tau) = \tilde{D}_x e^{-\alpha|\tau|}$. Подставляя в формулу (79), получаем:

$$\tilde{D}_K(\tau) \approx \frac{T\tilde{D}_x^2}{n(T-\tau)}\left[(1+e^{-2\alpha\tau})\,\frac{1+e^{-2\frac{\alpha T}{n}}}{1-e^{-2\frac{\alpha T}{n}}} + \frac{2n}{T}\tau e^{-2\alpha\tau}\right] \quad (80)$$

При $\tau = 0$

$$\tilde{D}_K(0) \approx \frac{2\tilde{D}_x^2}{n}\,\frac{1+e^{-2\frac{\alpha T}{n}}}{1-e^{-2\frac{\alpha T}{n}}}. \quad (81)$$

Если взять отношение дисперсии $D_K(\tau)$, полученной интегрированием к дисперсии $\tilde{D}_K(\tau)$, полученной суммированием, т.е. $\lambda_K(\tau) = \frac{D_K(\tau)}{\tilde{D}_K(\tau)}$, то это отношение изменяется в пределах $0 \le \lambda_K(\tau) \le 2$.

Подставляя значения $D_K(\tau)$ и $\tilde{D}_K(\tau)$ из формул (72) и (80), определим $\lambda_K(\tau)$:

$$\lambda_K(\tau) = \frac{\frac{D_x^2}{\alpha(T-\tau)}\left[1+(1+2\alpha\tau)e^{-2\alpha\tau}\right]}{\frac{T\tilde{D}_x^2}{n(T-\tau)}\left[(1+e^{-2\alpha\tau})\frac{1+e^{-2\frac{\alpha T}{n}}}{1-e^{-2\frac{\alpha T}{n}}} + \frac{2n}{T}\tau e^{-2\alpha\tau}\right]}. \quad (82)$$

Если принять, что $D_x = \tilde{D}_x$, то $\lambda_k(0)$ при $\tau = 0$ будет равно:

$$\lambda_k(0) = \frac{2n}{\alpha T} \frac{1 - e^{-2\frac{\alpha T}{n}}}{1 + e^{-2\frac{\alpha T}{n}}} = \frac{2n}{\alpha T} th \frac{\alpha T}{n}. \qquad (83)$$

График зависимости λ_k от величины $\frac{2n}{\alpha T}$ показан на рис. 17. На этом рисунке приводится также график зависимости λ_m в соответствии с формулой (60).

При $\frac{2n}{\alpha T} = 5$ величина $\lambda_k = \frac{D_k}{\tilde{D}_x}$ практически не зависит от $th\,2\left(\frac{\alpha T}{2n}\right)$. Относительная погрешность при этом не превышает 5%.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ И ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение корреляционных моментов и коэффициентов корреляции

Предположим, что при проведении экспериментальных работ мы получим три осциллограммы усилий (или других величин) P_1, P_2 и P_3. Необходимо определить степень тесноты линейной зависимости этих величин по коэффициентам корреляции.

С целью упрощения записи обозначим анализируемые случайные величины через x, y и z.

Статистические корреляционные моменты и коэффициенты корреляции определяются по формулам

$$\tilde{K}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{m}_x)(y_i - \tilde{m}_y)}{n-1}; \qquad (84)$$

$$\tilde{r}_{xy} = \frac{\tilde{K}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \qquad (85)$$

При обработке осциллограмм для получения функций распределения была получена таблица дискретных значений изменения исследуемого параметра. В данном случае имеется система трех случайных величин x, y и z. Вычисление статистических корреляционных моментов производится в соответствии с табл.8, в которой записываются дискретные значения исследуемых параметров и их центрированные значения.

Таблица 8

n	X		y		z	
	x_i	$x_i - \tilde{m}_x$	y_i	$y_i - \tilde{m}_y$	z_i	$z_i - \tilde{m}_z$
I	x_1	$\mathring{x}_1$	y_1	$\mathring{y}_1$	z_1	$\mathring{z}_1$
2	x_2	$\mathring{x}_2$	y_2	$\mathring{y}_2$	z_2	$\mathring{z}_2$
3	x_3	$\mathring{x}_3$	y_3	$\mathring{y}_3$	z_3	$\mathring{z}_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	$\mathring{x}_n$	y_n	$\mathring{y}_n$	z_n	$\mathring{z}_n$
Σ		—		—		—
$\frac{\Sigma}{n}$	$\tilde{m}_x$		$\tilde{m}_y$		$\tilde{m}_z$	
D		D_x	—	D_y	—	D_z
σ		σ_x		σ_y		σ_z

Попарно перемножая центрированные значения случайных величин $\mathring{x}_i$, $\mathring{y}_i$ и $\mathring{z}_i$ и суммируя их, получаем $\Sigma \mathring{x}_i \mathring{y}_i$; $\Sigma \mathring{x}_i \mathring{z}_i$ и $\Sigma \mathring{y}_i \mathring{z}_i$. При делении каждой суммы на $(n-1)$ получаем корреляционные моменты, которые обычно располагают в виде прямоугольной таблицы (квадратичной корреляционной матрицы).

$$\left\| \tilde{K}_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \tilde{K}_{xx} & \tilde{K}_{yx} & \tilde{K}_{zx} \\ \tilde{K}_{xy} & \tilde{K}_{yy} & \tilde{K}_{zy} \\ \tilde{K}_{xz} & \tilde{K}_{yz} & \tilde{K}_{zz} \end{Vmatrix} \qquad (86)$$

Корреляционные моменты не зависят от изменения порядка корреляции (от перестановки сомножителей), так как $K_{xy} = K_{yx}$; $K_{xz} = K_{zx}$ и $K_{yz} = K_{zy}$, в этом случае квадратичную корреляционную матрицу записывают в виде треугольной матрицы.

$$\|K_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \tilde{K}_{xx} & \tilde{K}_{xy} & \tilde{K}_{xz} \\ & \tilde{K}_{yy} & \tilde{K}_{yz} \\ & & \tilde{K}_{zz} \end{Vmatrix} \qquad (87)$$

Нормированная корреляционная матрица определяется согласно формуле (85), если каждый член матрицы (87) разделить на соответствующие среднеквадратические отклонения:

$$\|\tilde{\tau}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ & 1 & \tilde{\tau}_{yz} \\ & & 1 \end{Vmatrix} \qquad (88)$$

Степень значимости коэффициентов корреляции определяется из существа физического явления.

Определение взаимных корреляционных функций

Взаимная корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса зависит от разности двух сечений $\tau = t - t'$ и для $\tau = const$ на протяжении всей реализации случайных функций взаимная корреляционная функция также есть постоянная (в строгом смысле) величина. Незначительные ее изменения являются следствием флуктуации стационарного процесса и случайности эксперимента. Такие две функции, для которых взаимная корреляционная функция является функцией разности аргументов $\tau = t - t'$, называются стационарно связанными.

Вычисление статистических значений нормированной взаимной корреляционной функции $\tilde{\tau}_{xy}(\tau)$ для стационарно связанных функций $X(t)$ и $Y(t)$ производится в следующей последовательности:

I) Вследствие эргодичности (по отношению корреляционной функции) стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ их математические ожидания и дисперсии на протяжении всей реализации t являются постоянными величинами $\tilde{m}_x(t) = \tilde{m}_x$; $\tilde{m}_y(t) = \tilde{m}_y$; $D_x(t) = \tilde{D}_x$,

Таблица 9

$t_i=\tau$	$X(t)$	$Y(t)$	$X(t)-\tilde{m}_x$	$Y(t)-\tilde{m}_y$	$\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t+1)$	$\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t+2)$	$\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t+3)$	...	$\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t+m)$
I	$x(t_1)$	$y(t_1)$	$\mathring{x}(t_1)$	$\mathring{y}(t_1)$	$\mathring{x}(t_1)\mathring{y}(t_2)$	$\mathring{x}(t_1)\mathring{y}(t_3)$	$\mathring{x}(t_1)\mathring{y}(t_4)$	...	$\mathring{x}(t_1)\mathring{y}(t_m)$
2	$x(t_2)$	$y(t_2)$	$\mathring{x}(t_2)$	$\mathring{y}(t_2)$	$\mathring{x}(t_2)\mathring{y}(t_3)$	$\mathring{x}(t_2)\mathring{y}(t_4)$	$\mathring{x}(t_2)\mathring{y}(t_5)$	...	$\mathring{x}(t_2)\mathring{y}(t_{m+1})$
3	$x(t_3)$	$y(t_3)$	$\mathring{x}(t_3)$	$\mathring{y}(t_3)$	$\mathring{x}(t_3)\mathring{y}(t_4)$	$\mathring{x}(t_3)\mathring{y}(t_5)$	$\mathring{x}(t_3)\mathring{y}(t_6)$	...	$\mathring{x}(t_3)\mathring{y}(t_{m+2})$
4	$x(t_4)$	$y(t_4)$	$\mathring{x}(t_4)$	$\mathring{y}(t_4)$	$\mathring{x}(t_4)\mathring{y}(t_5)$	$\mathring{x}(t_4)\mathring{y}(t_6)$	$\mathring{x}(t_4)\mathring{y}(t_7)$	...	$\mathring{x}(t_4)\mathring{y}(t_{m+3})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
$n-1$	$x(t_{n-1})$	$y(t_{n-1})$	$\mathring{x}(t_{n-1})$	$\mathring{y}(t_{n-1})$	$\mathring{x}(t_{n-1})\mathring{y}(t_n)$	—	—	—	—
n	$x(t_n)$	$y(t_n)$	$\mathring{x}(t_n)$	$\mathring{y}(t_n)$	—	—	—		—
Σ			—	—					
$\frac{\Sigma}{n}$	$\tilde{m}_x$	$\tilde{m}_y$	—	—					
D	—	—	$\tilde{D}_x$	$\tilde{D}_y$					
σ	—	—	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{\sigma}_y$					
$\tilde{R}_{xy}(\tau)$	—	—	—	—	$\tilde{R}_{xy}(1)$	$\tilde{R}_{xy}(2)$	$\tilde{R}_{xy}(3)$	...	$\tilde{R}_{xy}(m)$
$\tilde{r}_{xy}(\tau)$	—	—	—	—	$\tilde{r}_{xy}(1)$	$\tilde{r}_{xy}(2)$	$\tilde{r}_{xy}(3)$	...	$\tilde{r}_{xy}(m)$

$\widetilde{D}_y(t)=\widetilde{D}_y$. Тогда нормированная взаимная корреляционная функция определяется по формуле

$$\widetilde{r}_{xy}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{D}_x\widetilde{D}_y}}\,M\left[(X(t)-\widetilde{m}_x)(y(t)-\widetilde{m}_y)\right]. \qquad (89)$$

Вычисляя при заданном τ математическое ожидание случайной функции $\mathring{X}(t)\cdot y(t+\tau)$ как среднее по времени, получаем

$$M\left[(X(t)-\widetilde{m}_x)(y(t+\tau)-\widetilde{m}_y)\right]=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\mathring{x}(t)\,\mathring{y}(t+\tau)dt. \qquad (90)$$

Заменяя интеграл конечной суммой, окончательно имеем формулу для нормированной взаимной корреляционной функции

$$\widetilde{r}_{xy}(\tau)=\frac{1}{(n-\tau)\sqrt{\widetilde{D}_x\widetilde{D}_y}}\sum_{i=1}^{n-\tau}\left[X(t_i)-\widetilde{m}_x\right]\left[y(t_{i+\tau})-\widetilde{m}_y\right]. \qquad (91)$$

2) Для двух случайных функций $X(t)$ и $y(t)$ определяем единое начало отсчета и производим квантование этих функций на ряд последовательных значений при n фиксированных точках. Значения функций $X(t)$ и $y(t)$ записываются в табл. 9.

Вычисляются центрированные значения функций $X(t)$ и $y(t)$ и производится перемножение их через интервал $\tau = 1,2\ldots,m$.

В результате деления суммы произведений соответственно на $n-\tau$ получаем значения взаимной корреляционной функции $\widetilde{R}_{xy}(\tau)$. Делением на $\sqrt{\widetilde{D}_x\widetilde{D}_y}$ получаем значения нормированной взаимной корреляционной функции $\widetilde{r}_{xy}(\tau)$ для стационарно связанных функций $X(t)$ и $y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Карленков А. А. Исследование условий и определение параметров беспроводной передачи сигналов телеизмерения для струговых установок. Канд.диссертация. М., ИГД им.А.А.Скочинского, 1969.

2. Босый Н. Д. Каналы связи. Гос. изд-во технической литературы УССР. Киев, 1963.

3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., "Наука", 1969.

4. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. М., "Наука", 1968.

5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, часть I, II. М., "Советское радио", 1966, 1968.

6. Лившиц Н. Л., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления, часть I. М., "Советское радио", 1963.

7. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М., "Мир", 1965.

8. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., "Наука", 1965.

9. Горная электромеханика и механизация горных работ (сборник статей). М., "Недра"; 1969.

10. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. М., "Мир", 1968.

11. Арлей Н., Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., Изд-во "Иностранная литература", 1951.

12. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А.А.Свешникова. М., "Наука", 1965.

13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., "Наука", 1965.

14. Музмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. М., "Недра", 1968.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение 3
Общие требования к измерительной аппаратуре 4
Обработка опытов и определение функций распределения случайных величин 5
Постановка вопроса . . . . . –
Определение функции распределения при наличии одной осциллограммы наблюдения 8
Определение функции распределения при наличии нескольких осциллограмм наблюдения I6
Определение статистических характеристик случайного процесса I7
Стационарный случайный процесс . . . . . –
Нестационарный случайный процесс 24
Нестационарный случайный процесс при наличии нескольких реализаций 26
Оценка точности и достоверности случайного процесса 32
Постановка вопроса об оценке функции распределения случайной величины . . . . . –
Постановка вопроса об оценке точности и достоверности случайного процесса 36
Сглаживание и аппроксимация корреляционных функций эргодического стационарного случайного процесса 37
Точность определения статистического математического ожидания и статистической корреляционной функции эргодического стационарного случайного процесса 44
Определение коэффициентов корреляции и взаимных корреляционных функций 5I
Определение корреляционных моментов и коэффициентов корреляции . . . . . –
Определение взаимных корреляционных функций 53
Литература 56

Александр Дмитриевич Игнатьев, Николай Гаврилович Манохин,
Анатолий Алексеевич Карленков, Владимир Семенович Беляев

МЕТОДИКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Редактор Т.Н.Камнева

Т-II905 Тираж 700 Заказ № 4938

ный цех Института горного дела им.А.А.Скочинского
3,7 печ.л. Подписано к печати I0/УП I970 г.

gost.e-ecolog.ru