МИНВУЗ УССР
ОДЕССКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
Кафедра строительной механики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ОСНОВ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ОДЕССА 1976

gost.e-ecolog.ru

МИНВУЗ УССР
ОДЕССКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
Кафедра строительной механики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ОСНОВ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ОДЕССА 1976

Составитель:
доктор технических наук,
профессор ПРОКОПОВИЧ И. Е.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие строительные материалы—бетон, древесина, пластики, углеродистая сталь и другие обладают свойством ползучести, т. е способностью деформироваться во времени при постоянных напряжениях. Это свойство приводит к тому, что в процессе длительных воздействий происходят изменения напряженных и деформированных состояний строительных конструкций. Перемещения, вызванные внешними нагрузками, увеличиваются; усилия, являющиеся следствием вынужденных деформаций (изменение температуры, усадка, неравномерная осадка опор, предварительное напряжение), затухают. В конструкциях, выполненных с применением материалов, обладающих различными деформативными свойствами, в частности в конструкциях железобетонных, наблюдается перераспределение усилий.

У некоторых строительных материалов во времени происходит изменение физико-механических свойств, называемое далее старением. В бетоне старение является следствием твердения цементного камня и проявляется в виде увеличения прочности и уменьшения деформативности. В древесине старение может условно рассматриваться как следствие высыхания и т. д.

Расчетом конструкций в условиях длительных воздействий занимается раздел механики, носящий название теории ползучести. Теория ползучести строительных материалов и конструкций создана, в основном, трудами советских ученых в течение последних тридцати лет *. Интенсивность развития этой теории, необходимость освоения специального математического аппарата, а также почти полное отсутствие учебных пособий создают значительные трудности при ее изучении. Специальная литература, посвященная теории ползучести

---

* См обзорные статьи в сборнике «Механика в СССР за 50 лет», М., 1972. Ю. Н. Работнов. «Теория ползучести», Н Х. Арутюнян «Ползучесть стареющих материалов, ползучесть бетона».

строительных материалов и конструкций, как правило, малодоступна, так как для ее изучения необходимо время, не соизмеримое с имеющимся у студента.

Настоящие методические указания предназначены для помощи студентам в изучении элементов теории ползучести и содержат ссылки на источники, в которых подробно освещаются те или иные вопросы.

2. СВЕДЕНИЯ ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

При действии постоянной во времени нагрузки полные деформации ε^* таких строительных материалов как бетон, древесина, высокоуглеродистая сталь и другие состоят из упругих, проявляющихся в момент загружения (упруго-мгновенные деформации) — ε_y и деформаций развивающихся во времени и называемых деформациями ползучести — ε_n. В общем случае, при наличии старения материала, величина упруго-мгновенных деформаций связана с состоянием (возрастом) материала к моменту загружения τ; величина деформации ползучести зависит как от τ, так и от продолжительности действия нагрузки $t-\tau$ (рис. 1)

$$\varepsilon^*(t)=\varepsilon_y(\tau)+\varepsilon_n(t,\tau). \qquad (4.1)$$

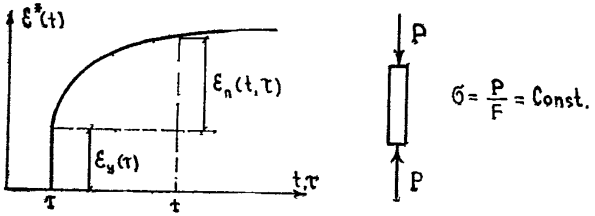


Рис. 1.

Начало отсчета времени совмещается с моментом окончания изготовления материала, точнее с моментом, начиная с которого материал становится твердым телом. Очевидно, что $t \geqslant \tau$, т. е. возраст материала в момент наблюдения всегда больше или равен возрасту материала в момент приложения нагрузки.

При экспериментальном определении величины ползучести необходимо учитывать наличие собственных деформаций, связанных с изменениями температур и влажности (усадка). Поэтому ползучесть строительных материалов определяют как разность между деформациями загруженных и незагруженных образцов-близнецов.

Характер развития деформаций ползучести зависит от уровня напряжений σ, точнее, от отношения между σ и пределом длительной прочности (длительного сопротивления) — $R_д$. Пределом длительной прочности называется величина напряжений, при которой разрушение материала происходит после неограниченного большого периода времени действия. Если $\sigma < R_д$ — деформации ползучести постепенно затухают, при $\sigma > R_д$ — развитие незатухающих деформаций ползучести заканчивается разрушением (рис. 2). Для бетона, загруженного сжимающей нагрузкой в возрасте $\tau_1 = 28$ суток, $R_д \approx 0{,}8\ R_{пр}$; для древесины нормальной влажности, сжатой или растянутой вдоль волокон, $R_д \approx 0{,}5\ R$. Из сказанного очевидно, что строительные конструкции должны проектироваться так, чтобы длительно действующие напряжения σ не превышали предела длительной прочности $R_д$.

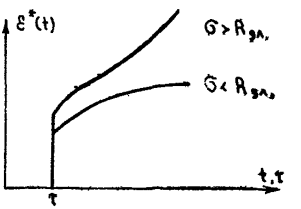


Рис. 2.

Зависимости между напряжениями и упруго-мгновенными деформациями, как правило, линейны; между напряжениями и деформациями ползучести, в общем случае, нелинейны. Для иллюстрации этого на рис. 3 изображены типичные кривые деформаций ползучести бетона, соответствующие различным уровням сжимающих напряжений, а также кривая, представляющая зависимость между уровнями напряжения σ/R и деформациями ползучести, развивавшимися за время $t - \tau$.

Степень нелинейности деформаций ползучести существенно зависит как от уровня напряжений, так и от их характера. Например, для деформации бетона влияние нелинейности считается незначительным, если величина сжимающих напряжений не превосходит $0{,}5\ R_{пр}$, а величина растягивающих напряжений $\sigma \leqslant 0{,}8\ R_р$. Для деформации ползучести дре-

весины при сжатии или растяжении вдоль волокон линейная зависимость характерна во всем диапазоне $\sigma < R_д$.

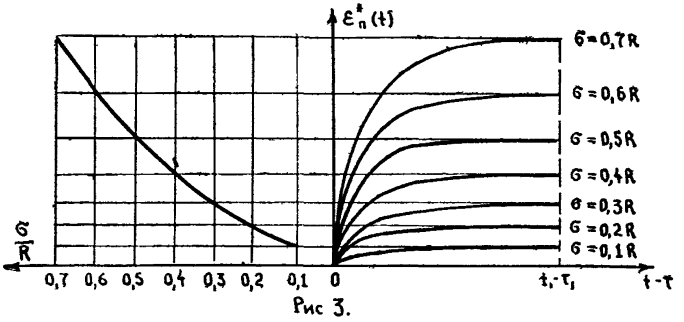


Рис 3.

При снятии длительно действующей нагрузки образец, выполненный из упругого материала, стремится восстановить свои первоначальные размеры. При наличии ползучести такой процесс восстановления обусловлен как мгновенными деформациями $\varepsilon'_y(\tau_2)$, так и деформациями, развивающимися во времени и называемыми деформациями последействия $\varepsilon'_n(t-\tau_2)$ (рис. 4). Деформации последействия часто трактуются как деформации, обратные деформациям ползучести. Поэтому при наличии упругого последействия говорят, что деформации ползучести обладают обратимостью.

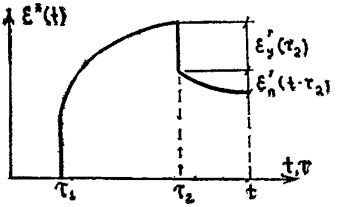


Рис. 4.

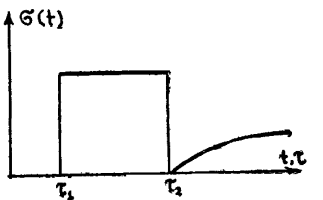


Рис. 5.

При деформировании стареющего бетона деформации ползучести больше деформаций упругого последействия. Иными словами, деформации ползучести стареющего бетона обратимы частично.

С упругим последействием связано и такое явление. Представим, что в момент времени τ_2 с бетонного элемента снята

сжимающая нагрузка, действовавшая с момента τ_1, и сразу же после проявления упругих деформаций наложены связи, препятствующие дальнейшему восстановлению размеров. Опыт показывает, что в таком элементе с течением времени будут развиваться сжимающие напряжения. Этот процесс принято называть процессом восстановления напряжений (рис. 5).

Если призматический образец тела, обладающего ползучестью, подвергнуть вынужденным деформациям сжатия (растяжения, изгиба, сдвига) и в дальнейшем сохранять эти деформации, то возникшие напряжения с течением времени будут уменьшаться (рис. 6). Затухание напряжений в условиях вынужденных деформаций называется релаксацией.

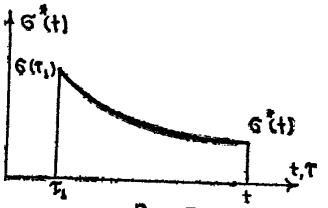


Рис. 6.

Результаты экспериментальных исследований, в частности выполненных для бетона, показывают, что при действии относительно невысоких напряжений, последовательно вводи-

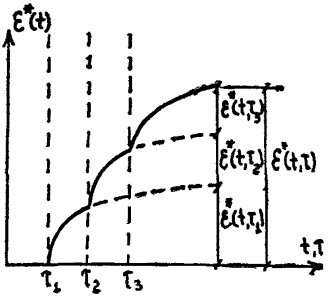
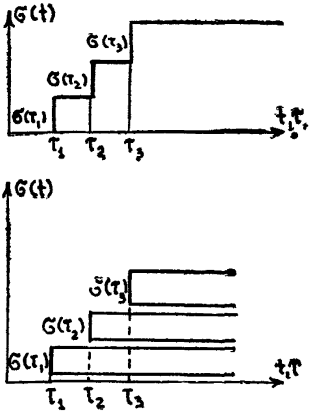


Рис. 7.



мых в моменты времени τ_1, τ_2, τ_3, ..., величина полной деформации, сформировавшейся к моменту t, может быть приближенно вычислена как сумма деформаций от каждой ступени напряжений (рис. 7).

$$\varepsilon^*(t)=\varepsilon^*(t,\tau_1)+\varepsilon^*(t,\tau_2)+\varepsilon^*(t,\tau_3)+\ldots \qquad (4.2)$$

Зависимость (4.2), показывающая возможность вычисления деформации ползучести при ступенчато-изменяющихся напряжениях как суммы деформаций, вызванных напряжениями, постоянными во времени, носит название принципа наложения. Естественно, что этот принцип справедлив в области линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести *.

3. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ. РАЗНОВИДНОСТИ ТЕОРИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Линейная теория ползучести основана на предположении о наличии линейной зависимости между напряжениями и полными деформациями (упруго-мгновенными деформациями и деформациями ползучести).

Считается, что объектом изучения является тело, удовлетворяющее рабочим гипотезам теории упругости (сплошность, однородность, изотропность, малость деформаций) и обладающее, помимо упругих свойств, еще и ползучестью. Типичные кривые полных относительных деформаций изучаемого тела, вызванных постоянными нагрузками, приложенными в возрасте $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, показаны на рис. 8а. Кроме того, вводятся следующие гипотезы и предпосылки:

1. Считается справедливым принцип наложения;
2. Считается, что характеристики деформативности материала не зависят от величин вынужденных деформаций.

Полная относительная деформация при сжатии или растяжении в момент t, вызванная единичным напряжением, действующим с момента времени τ, определяется зависимостью

$$\delta(t,\tau)=\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau), \qquad (4.3)$$

* См. монографии: Н. Х. Арутюнян. Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952; С. В. Александровский. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры с учетом ползучести, М., 1973; В. М. Бондаренко. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков, 1968; Н. Я. Панарин. Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести, Л., 1957; И. Е. Прокопович. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений, М., 1963; А. Р. Ржаницын. Теория ползучести, М., 1968.

где $1/E(\tau)$ — упруго-мгновенная деформация, $C(t, \tau)$ — мера ползучести.

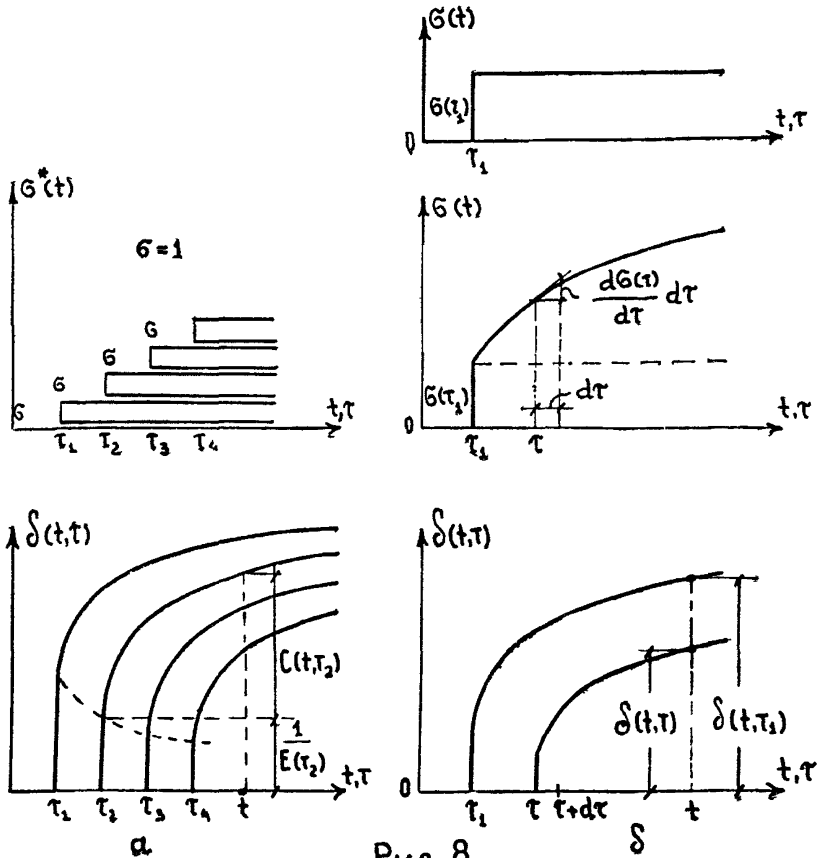


Рис. 8.

Как было уже сказано [см. (4.3)], в теории ползучести применяется понятие модуля упруго-мгновенных деформаций, т. е. модуля, который определяет деформации, происходящие мгновенно и являющиеся только упругими. В связи с этим возникает достаточно сложная задача выделения таких деформаций, так как диаграмма напряжения-деформации, построенная на основании обычных машинных испытаний, связана со временем проведения опыта, т. е. включает неко-

торую часть ползучести. Наиболее достоверно величину модуля упруго-мгновенных деформаций можно получить динамическим методом. Но при таком подходе необходимо обращать особое внимание на выявление и учет деформаций ползучести, проявляющихся сразу же после приложения нагрузки (скоропроходящая часть деформаций ползучести).

Широко применяется другое представление полной относительной деформации, а именно

$$\delta(t,\tau)=\frac{1}{E(\tau)}[1+\varphi(t,\tau)], \tag{4.4}$$

где $\varphi\ (t, \tau)$ — характеристика ползучести, равная

$$\varphi(t,\tau)=\frac{\varepsilon_n(t,\tau)}{\varepsilon_y(t,\tau)}=\frac{C(t,\tau)}{1/E(\tau)}=E(\tau)C(t,\tau). \tag{4.5}$$

Величина $\varphi\ (t, \tau)$ при $t=\infty$ называется предельной характеристикой ползучести $\varphi(\tau)=\varphi(\infty, \tau)$.

Из сказанного очевидны определения понятий меры ползучести и характеристики ползучести. Мерой ползучести $C\ (t, \tau)$ называется величина деформации ползучести к моменту t, вызванная единичным напряжением, действующим с момента τ. Характеристикой ползучести называется отношение меры ползучести к соответствующим упруго-мгновенным деформациям.

Полная деформация в момент t, вызванная постоянным во времени напряжением $\sigma\ (\tau_1)$, действующим с момента τ_1, определяется произведением (рис. 8б)

$$\varepsilon^*(t)=\sigma(\tau_1)\delta(t,\tau_1). \tag{4.6}$$

Если же величина напряжения, приложенного в момент τ_1, в дальнейшем изменяется, то в силу принципа наложения, полная деформация может быть найдена как сумма деформаций, вызванных постоянной и переменной частями напряжений (рис. 8б)

$$\varepsilon^*(t)=\sigma(\tau_1)\delta(t,\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\delta(t,\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

Интегрирование этого выражения по частям и выполнение элементарных преобразований позволяет получить

$$\varepsilon^*(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{4.8}$$

В этом выражении первое слагаемое представляет упруго-мгновенную деформацию, т. е. деформацию в момент t, вызванную напряжением $\sigma(t)$, условно приложенным в этот же момент; второе учитывает деформации ползучести и влияние старения. Так как в интервале $\tau_1<\tau<t$ всегда справедливо равенство

$$\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\leqslant 0, \tag{4.9}$$

то при наличии ползучестй полная деформация всегда больше упруго-мгновенной.

Неравенство (4.9) является следствием уменьшения величины полной относительной деформации $\delta(t, \tau)$ при приближении τ к t (см. рис. 8).

Значок *, стоящий в формулах (4.6), (4.7), (4.8) при $\varepsilon(t)$ и при $\sigma(t)$, $\gamma(t)$ и т. д. в формулах, записанных ниже, показывает, что данная составляющая напряженно-деформированного состояния определяется с учетом ползучести.

При обозначениях нормальных напряжений в (4.6), (4.7) и (4.8) значки не проставлены, так как при выводе формул напряжения считались заданными. В более общем случае, при решении задач по разысканию напряжений в теле, обладающем ползучестью, деформации определяются по тем же формулам (4.6), (4.7), (4.8) с предварительной заменой $\sigma(t)$ на $\sigma^*(t)$ (см. 9-й параграф). По аналогии с (4.8) записывается формула для деформации сдвига

$$\gamma^*(t)=\frac{\tau(t)}{G(t)}-\int_{\tau}^{t}\tau(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}+\omega(t,\tau)\right]d\tau, \tag{4.10}$$

где $G(t)$ — модуль сдвига, $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести при сдвиге.

Поскольку в упругой стадии справедлива зависимость

$$G=\frac{E(\tau)}{2[1+\nu_1(\tau)]}, \tag{4.11}$$

то, аналогично, при ползучести существует равенство

$$\omega(t, \tau)=2C(t, \tau)[1+\nu_2(t, \tau)], \tag{4.12}$$

причем $\nu_1(\tau)$ — коэффициент поперечных деформаций в упругой стадии, $\nu_2(t, \tau)$ — то же при ползучести.

В силу (4.11) и (4.12)

$$\frac{1}{G(\tau)}+\omega(t,\tau)=\frac{2[1+\nu_1(\tau)]}{E(\tau)}+2C(t,\tau)[1+\nu_2(t,\tau)]=$$

$$=2\left\{\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)+\frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)}+\nu_2(t,\tau)C(t,\tau)\right\}=2[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)], \quad (4.13)$$

где $\delta_1(t,\tau)$ — полная относительная поперечная деформация

$$\delta_1(t,\tau)=\frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)}+\nu_2(t,\tau)C(t,\tau).$$

В соответствии с (4.13) зависимость (4.10) можно переписать иначе:

$$\gamma^*(t)=2\left\{\frac{[1+\nu_1(t)]\tau(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\tau(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau\right\}. \quad (4.14)$$

Зависимость между напряжениями и деформациями может быть записана и в форме, отличающейся от (4.8).

$$\varepsilon^*(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}L(t,\tau)d\tau, \quad (4.15)$$

где $L(t,\tau)$ — «наследственная функция» — функция влияния предшествующих упругих деформаций на полную деформацию. Из сопоставления (4.8) и (4.15) с учетом (4.3) очевидно наличие зависимости

$$L(t,\tau)=-\frac{1}{E(\tau)}\frac{\partial E(\tau)}{\partial\tau}+E(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}. \quad (4.16)$$

Функции для описания $G(t,\tau)$, $L(t,\tau)$ и $E(\tau)$ выбираются на основании обработки опытных данных. Выражение, наиболее широко применяющееся для меры ползучести стареющего тела, имеет вид

$$C(t,\tau))=\Theta(\tau)f(t-\tau), \quad (4.17)$$

где

$$f(t-\tau)=1-e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad (4.18)$$

$$\Theta(\tau)=C_0+\frac{A}{\tau+\tau} \text{ или } \Theta(\tau)=C_0+Ae^{-\gamma_1\tau}. \quad (4.19)$$

В формуле (4.17) функция $\Theta(\tau)$ отражает процесс старения; второй сомножитель — развитие деформаций ползучести в зависимости от продолжительности действия нагрузки. Функции $\Theta(\tau)$, $f(t-\tau)$ и $C(t,\tau)$ обладают следующими свойствами

$$\tau \to \infty, \quad \theta(\tau) \to C_0$$

$$t \to \tau, \quad f(t-\tau) \to 0, \quad C(t,\tau) \to 0,$$

$$t \to \infty, \quad f(t-\tau) \to 1, \quad C(t,\tau) \to \theta(\tau). \qquad (4.20)$$

Коэффициенты, входящие в формулы (4.17), 4.18) и (4.19), подбираются из условия наилучшего описания семейства экспериментальных кривых ползучести с помощью зависимости (4.17).

Формула (4.17) основана на так называемом «аффинном» подобии кривых ползучести (см. рис. 8а), т. е. на наличии прямой пропорциональности между всеми соответствующими ординатами при одинаковых $t-\tau$ различных кривых. Установлено, что для бетона выражение (4.17) может применяться в случаях, когда $\tau_1 \geqslant 20$ суток, т. е. при рассмотрении влияния воздействий, прикладываемых после завершения наиболее интенсивного периода старения, в частности, при воздействиях, характерных для эксплуатационной стадии.

Обработка многочисленных экспериментальных данных методом математической статистики позволила составить рекомендации по расчетному определению величин как полных относительных деформаций ползучести бетона при сжатии, так и коэффициентов γ_1, γ, C_0 и A^*. В частности, предложена формула

$$C(t,\tau)=C(\infty,28)(0{,}50+0{,}70e^{-0{,}012\tau})[1-e^{-0{,}006(t-\tau)}],$$

где $C(\infty,28)$ — предельная мера ползучести, определяемая на основании имеющихся рекомендаций с учетом влияния свойств и соотношений исходных материалов, условий изготовления и эксплуатации элементов бетонных и железобетонных конструкций. В частности, для обычного тяжелого бетона марки 300, принятого в качестве эталонного (среднего) бетона (см. приложение 1)

$$C(\infty,28)=6\cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}, \quad \varphi(\infty,28)=6\cdot 10^{-6}\cdot 3{,}15\cdot 10^5=1{,}89.$$

Эти формулы позволяют построить кривые, достаточно хорошо соответствующие экспериментальным при выполнении следующих условий:

---

* Улицкий И. И. Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов Киев, 1963; Прокопович И. Е., Застава М. М. О расчетном определении предельных длительных деформаций тяжелого бетона. Бетон и железобетон, № 5, 1972.

а — рассматривается достаточно больший период времени действия нагрузок;

б — величина, обратная гидравлическому радиусу поперечного сечения элемента, равна или меньше 0,20.

В случаях рассмотрения начала процесса формирования напряженно-деформированного состояния в бетонных и железобетонных элементах при $\tau_1 < 20$ суток, т. е. при решении задач технологического плана (термонапряженное состояние бетонных массивов при экзотермическом разогреве, влияние термообработки на напряженное состояние железобетонных изделий и т. д.) применение формулы (4.17) может привести к заметным погрешностям. Связано это с отсутствием аффинного подобия кривых ползучести бетона, загруженного в раннем возрасте. Выражения для аппроксимации $C(t, \tau)$ при $\tau_1 < 20$ суток и особенности решения технологических задач описаны в тринадцатом параграфе Методических указаний.

Теория ползучести, основанная на физических зависимостях типа (4.17), (4.18) и (4.19), носит название наследственной теории старения (НТС), или теории упруго-ползучего тела. Эта теория достаточно полно учитывает основные явления, происходящие при длительном деформировании стареющих строительных материалов: ползучесть и старение, упругое последействие, восстановление напряжений, релаксацию (табл. 1).

Полные деформации тел, не обладающих старением, и тел в достаточно старом возрасте описывает так называемая теория упругой наследственности (ТУН)*, являющаяся частным случаем НТС. В этой теории величина деформаций ползучести является функцией только продолжительности действия нагрузки $t-\tau$, а модуль упруго-мгновенных деформаций не зависит от τ, т. е. $E(\tau) = E = \text{const}$.

$$\delta(t,\tau) = \delta(t-\tau) = \frac{1}{E} + C(t-\tau); \quad \frac{\partial \delta(t-\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau}. \qquad (4.21)$$

Основная зависимость напряжения-деформации (4.8) принимает вид

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau, \qquad (4.22)$$

т. е. $\varepsilon^*(t)$ является функцией одной переменной $t-\tau$.

* См. монографию А. Р. Ржаницына, упоминавшуюся на стр 8.

Таблица 1.

Теория \ Воздействия	σ	ε	σ	σ, ε
Теория упругой наследственности	$\delta(t-\tau)$	$G_\delta(t)$	$\delta(t-\tau)$	ε, σ
Наследственная теория старения	$\delta(t-\tau)$	$G_\delta(t)$	$\delta(t,\tau)$	ε, σ
Теория старения	$\delta(t-\tau)$	$G_\delta(t)$	$\delta(t-\tau)$	ε, σ

Выражение для меры ползучести в ТУН записывается так:

$$C(t-\tau)=C_0 f(t-\tau),$$

в частности

$$C(t-\tau)=C_0[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]. \qquad (4.23)$$

Очевидно, что в этом выражении C_0 является предельной величиной меры ползучести, а предельная характеристика ползучести определяется как произведение $\varphi=C_0E$.

Вследствие рассмотрения нестареющего материала и принятия принципа наложения ТУН постулирует полную обратимость деформаций ползучести. В таблице 1 показан характер кривых деформаций ползучести и упругого последействия, построенных на основе ТУН, для трех вариантов изменения нагрузки во времени. При $\sigma<R_д$ теория упругой наследственности достаточно хорошо описывает ползучесть древесины, находящейся в условиях постоянных влажности и температуры. Следовательно, ТУН может использоваться и при расчетах элементов деревянных конструкций.

Эта теория может применяться и для приближенного расчета конструкций, выполненных из не слишком интенсивно стареющих материалов. В этом случае влияние возраста материала к моменту загружения τ_1 на деформативные характеристики может быть учтено путем принятия

$$E=E(\tau_1); \quad C_0=\Theta(\tau_1). \qquad (4.24)$$

В свое время, специально для расчета бетонных и железобетонных сооружений, была создана теория ползучести, названная теорией старения (ТС)*. Эта теория основана на гипотезе о «параллельности» кривых ползучести (см. табл. 1). Выражение для меры ползучести в соответствии с «параллельностью» кривых записывается так ($\tau_1=0$)

$$C(t,\tau)=\frac{1}{E(0)}[\varphi(t)-\varphi(\tau)], \qquad (4.25)$$

где $\varphi(t)$ и $\varphi(\tau)$ — характеристики ползучести.

Вследствие гипотезы о «параллельности» эта теория постулирует:

а — неограниченное уменьшение ползучести по мере увеличения возраста к моменту приложения нагрузки, т. е. по мере старения при $\tau\to\infty$, $C(t,\tau)\to 0$;

б — полную необратимость деформации ползучести.

---

* См. монографию И И Улицкого. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. К., 1967.

С учетом сказанного, основная физическая зависимость ТС, применительно к форме (4.7), записывается так:

$$\varepsilon^*(t)=\frac{\sigma(0)}{E(0)}[1+\varphi(t)]+\int_0^t\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}\times\frac{1}{E(0)}\left[\frac{E(0)}{E(\tau)}+\varphi(t)-\varphi(\tau)\right]d\tau. \quad (4.26)$$

Простейшими выражениями для $\varphi(t)$ и $\varphi(\tau)$ являются

$$\varphi(t)=\varphi[1-e^{-\gamma\tau}]; \quad \varphi(\tau)=\varphi[1-e^{-\gamma\tau}]. \quad (4.27)$$

Одним из достоинств ТС является возможность, в ряде случаев, получения расчетных формул, содержащих непосредственно $\varphi(t)$ без предварительного фиксирования выражения для аналитического описания этой функции (см. табл. 2 п. 2).

Нетрудно заметить, что основные физические зависимости как ТУН, так и ТС являются частными случаями более общей зависимости НТС. Например, если в (4.19) положить $A=0$, то формула (4.17) превратится в (4.23); если $C_0=0$, то вторая формула (4.19) и формула (4.17) при $\gamma_1=\gamma$ приводят к выражению (4.25), соответствующему случаю представления характеристики ползучести в виде (4.27).

4. ВЫРАЖЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Зависимость между деформациями и напряжениями в линейной теории обычно записывается так:

$$\sigma^*(t)=E(t)\left[\varepsilon^*(t)+\int_{\tau_1}^t\varepsilon^*(\tau)R(t,\tau)d\tau.\right] \quad (4.28)$$

Функция $R(t, \tau)$, стоящая под знаком интеграла и описывающая деформативные свойства тела, может быть построена путем обработки данных, полученных при опытном изучении процесса релаксации*. Если, считая известной функцию $\varepsilon^*(t)$, рассматривать зависимость (4.8) как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\sigma^*(t)$, то (4.28) является решением этого уравнения. Следовательно, решение уравнения (4.8) в форме (4.28) позволяет разыскать функцию $R(t, \tau)$. Очевидно, что вид функции $R(t, \tau)$ связан с характе-

* См. книгу С. В. Александровского, упомянутую на стр. 8.

ром зависимостей, принятых для аппроксимации $\delta(t, \tau)$, $E(\tau)$ и наоборот. В силу всего сказанного $R(t, \tau)$ называют резольвентой ядра $\frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau}$ интегрального уравнения (4.8) Построим резольвенту для нестареющего материала. В этом случае в соответствии с (4.28)

$$\sigma^*(t)=E[\varepsilon^*(t)+\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon^*(\tau)R(t-\tau)d\tau]. \qquad (4.29)$$

В силу

$$E(\tau)=E=\text{Const} \qquad (4.30)$$

и (4.23) получим выражение для ядра

$$\frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau}=-\gamma E C_0 e^{-\gamma(t-\tau)}. \qquad (4.31)$$

При этом зависимость (4.22) может быть представлена в виде такого интегрального уравнения

$$\sigma^*(t)+\gamma\varphi\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(t)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=E\varepsilon^*(t), \quad \varphi=EC_0. \qquad (4.32)$$

Очевидно, что решение уравнения (4.32) позволяет построить резольвенту ядра (4.31).

Продифференцировав по t левую и правую части (4.32), придем к такому интегральному уравнению (точками показаны производные по (t).

$$\sigma^*(t)+\gamma\varphi\sigma^*(t)-\gamma^2\varphi\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=E\varepsilon^*(t). \qquad (4.33)$$

Сложив интегральное уравнение (4.32), предварительно умноженное на γ, с интегральным уравнением (4.33), получим дифференциальное уравнение первой степени с постоянными коэффициентами

$$\sigma^*(t)+r\sigma^*(t)=E[\varepsilon^*(t)+\gamma\varepsilon^*(t)], \quad r=\gamma(1+\varphi) \qquad (4.34)$$

Это уравнение должно решаться при начальных условиях

$$\sigma^*(\tau_1)=E\varepsilon^*(\tau_1), \qquad (4.35)$$

следующих из (4.32), если принять $t=\tau_1$. В соответствии с правилом, известным из курса высшей математики, решение

Таблица 2

Некоторые выражения, применяемые для описания мер ползучести, ядер и резольвент

№ п/п	Теория	Мера ползучести	Ядро	Резольвента
1	ТУН	$C_0[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$	$-\gamma\varphi e^{-\gamma(t-\tau)}$	$-\gamma\varphi e^{-r(t-\tau)}, \quad r=\gamma(1+\varphi)$
2	ТС	$A(t)-A(\tau)$	$\frac{\partial A(\tau)}{\partial\tau}E$	$-\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-[\varphi(t)-\varphi(\tau)]},$ $\varphi(t)=A(t)E, \quad \varphi(\tau)=A(\tau)E$
3	НТС	$\Theta(\tau)[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$ $E(\tau)\neq\text{const}$	$\left\{\frac{d}{d\tau}\frac{1}{E(\tau)}+\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau}[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]-\gamma\Theta(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}\right\}E(\tau)$	$-\frac{1}{E(t)}\left\{\frac{dE(\tau)}{d\tau}+\gamma[E^2(\tau)\Theta(\tau)-\frac{d}{d\tau}[E(\tau)\Theta(\tau)e^{\eta(\tau)}]\times\int_\tau^t e^{-\eta(z)}E(z)dz\right\},$ $\eta(\tau)=\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}[1+\Theta(\tau)E(\tau)]\,d\tau$
4	НТС	$\Theta(\tau)\,[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$ $E(\tau)=E=\text{const}$	$\left\{\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau}[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]-\gamma\Theta(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}\right\}E$	$-\gamma E\left\{\Theta(\tau)-\frac{d}{d\tau}[\Theta(\tau)\,e^{-\eta(\tau)}]\times\int_\tau^t e^{-\eta(z)}dz\right\}$ $\eta(\tau)=\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}[1+E\Theta(\tau)]d\tau$

Примечания: 1. При записи выражений ТС принято $\tau_1=0$.

2. Вывод формул для резольвенты НТС (п. 3 и 4) наиболее подробно изложен в книге М. М. Манукяна. Кручение тел с учетом ползучести, Ереван, 1973.

дифференциального уравнения (4.34), при начальных условиях (4.35), можно записать так

$$\sigma^*(t)=e^{-\int_{\tau_1}^{t} r d\tau}\{\sigma^*(\tau_2)+E\int_{\tau_1}^{t}[\varepsilon^*(\tau)+\gamma\varepsilon^*(\tau)]e^{\int_{\tau_1}^{\tau} r d\tau}d\tau\}. \qquad (4.36)$$

Интегрирование по частям слагаемого в подинтегральном выражении, содержащего $\varepsilon^*(t)$, приводит к зависимости

$$\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon^*(\tau)e^{-r(\tau-\tau_1)}d\tau=e^{-r\tau_1}[\varepsilon^*(t)e^{-rt}-\varepsilon^*(\tau_1)e^{r\tau_1}-r\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)e^{r\tau}d\tau].$$

Подстановка в (4.36) этого выражения, после выполнения элементарных выкладок, приводит к формуле

$$\sigma^*(t)=E[\varepsilon^*(t)-\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon^*(\tau)\gamma\varphi e^{-r(t-\tau)}d\tau]. \qquad (4.37)$$

Сопоставление правых частей (4.29) и (4.37) дает возможность записать выражение для резольвенты ядра (4.31)

$$R(t-\tau)=-\gamma\varphi e^{-r(t-\tau)}. \qquad (4.38)$$

Аналогично можно получить резольвенты более сложных ядер ТУН, а также ядер ТС и НТС. Эти выражения для некоторых частных случаев приведены в таблице 2.

5. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Характер влияния линейной ползучести на напряженное и деформированное состояния однородных и изотропных элементов различен в случаях действия внешних сил и наличия вынужденных деформаций (изменение температуры, усадка, неравномерная осадка опор и т. д.). Ранее рассмотрим действие внешней силы.

Пусть к стержню, изображенному на рис. 9а и обладающему как упругими свойствами, так и ползучестью, в момент τ_1 приложены переменные во времени сжимающие силы $P(t)$. При решении с точностью до принципа Сен-Венана нормальные напряжения в стержне определяются из условий равновесия и для любого момента времени $t \geqslant \tau_1$ равны

$$\sigma^*(t)=P(t)/F. \qquad (4.39)$$

Если бы к этому же стержню в момент времени t были приложены силы $P(t)$, то в стержне мгновенно возникли бы напряжения

$$\sigma(t)=P(t)/F. \tag{4.40}$$

Эти напряжения (а также соответствующие деформации и перемещения) принято называть упруго-мгновенными или напряжениями (деформациями и перемещениями) упруго-мгновенной задачи. Из сопоставления (4.39) и (4.40) следует равенство

$$\sigma^*(t)=\sigma(t). \tag{4.41}$$

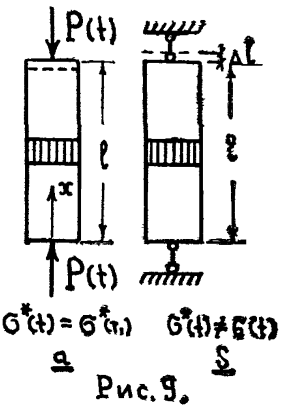


Рис. 9.

Таким образом, ползучесть не влияет на напряженное состояние, вызванное внешними силами.

Поскольку геометрические зависимости, т. е. зависимости между деформациями и перемещениями, не связаны с деформативными свойствами тела, то справедлива формула

$$\varepsilon^*_x=\frac{\partial U^*}{\partial x},$$

из которой, применительно к рассматриваемому случаю, следует

$$U^*(t)=\int\varepsilon^*_x(t)dx. \tag{4.42}$$

Если в эту формулу подставить значение $\varepsilon^*_x(t)$ согласно (4.8), то после простейших преобразований получим

$$U^*(t)=U(t)-\int_{\tau_1}^{t}U(\tau)\,E(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{4.43}$$

где $U_i(t)$ — упруго-мгновенные перемещения.

Для стержня, изображенного на рис. 9а,

$$U(l,t)=\frac{P(t)l}{FE(t)}. \tag{4.44}$$

При $P(t)=P=\text{Const}$

формулы (4.44) и (4.43), с учетом (4.4), приводят к зависимости

$$U^*(t)=U(\tau_1)[1+\varphi(t,\tau_1)], \tag{4.45}$$

где $U(\tau_1)$ — упругое перемещение в момент приложения нагрузки, $t=\tau_1$, $\varphi(t, \tau_1)$ — характеристика ползучести (4.5).

Далее будем изучать напряженное состояние при вынужденных деформациях. Речь идет о стержне с абсолютно жесткими связями, препятствующими изменению его длины (рис. 9б). Вынужденные деформации $\varepsilon_0(t)$ такого стержня, например, изменение температуры на величину $V(t)$ [$\varepsilon_0(t)=\alpha V(t)$, где α — коэффициент линейного температурного расширения], приведут к возникновению напряжений $\sigma^*(t)$. Эти напряжения вызовут деформации, определяемые согласно (4.8) формулой

$$\varepsilon^*(t)=\frac{\sigma^*(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\,\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{4.46}$$

Поскольку на стержень положены связи, препятствующие продольным перемещениям, то суммарная деформация должна удовлетворять условию

$$\varepsilon^*(t)-\varepsilon_0(t)=0, \tag{4.47}$$

которое приводит к уравнению

$$\sigma^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=E(t)\varepsilon_0(t), \tag{4.48}$$

позволяющему разыскать $\sigma^*(t)$.

Как уже упоминалось (стр. 17), уравнение, в котором неизвестное, в данном случае $\sigma^*(t)$, расположено под знаком интеграла, называется интегральным; если левая часть такого уравнения состоит из суммы неизвестного и интеграла, то это интегральное уравнение второго рода; теория интегральных уравнений, у которых $t\geqslant\tau_1$, разработана Вольтерра. Следовательно, (4.48) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

В силу аналогии уравнения (4.48) и зависимости (4.8), его решение строится с помощью формулы (4.28)

$$\sigma^*(t)=E(t)\,[\varepsilon_0(t)+\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_0(\tau)R(t,\tau)d\tau]. \qquad (4.49)$$

Из (4.48) при $\tau_1=t$ можно получить решение упруго-мгновенной задачи

$$\sigma(t)=E(t)\varepsilon_0(t) \qquad (4.50)$$

и записать

$$\sigma^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma(t). \qquad (4.51)$$

Таким образом, напряжения, вызванные вынужденными деформациями в стержне, обладающем ползучестью, связаны с упруго-мгновенными напряжениями посредством интегрального уравнения (4.51).

При стационарных вынужденных деформациях

$$\sigma(t)=\varepsilon_0(\tau_1)E(t). \qquad (4.52)$$

Условие

$$t>\tau, \qquad \frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}<0, \qquad (4.53)$$

в силу монотонности изменения $E(t)$, позволяет получить из (4.51) неравенство

$$\sigma^*(t)\leqslant\sigma(t)\ . \qquad (4.54)$$

Это неравенство показывает, что напряжения, вызванные стационарными вынужденными деформациями в стержне, жестко закрепленном по концам, всегда меньше упруго-мгновенных напряжений. Такое уменьшение напряжений и называется релаксацией.

6. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

С учетом линейности деформирования материала, а также формул (4.8) и (4.10) при рассмотрении плоской задачи линейной теории ползучести применительно к обобщенному плоскому напряженному состоянию принимаются такие физические зависимости:

$$\varepsilon^*_x(t)=\frac{\sigma^*_x(t)-\nu_1(t)\sigma_y^*(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma^*_x(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}-\sigma^*_y(\tau)\frac{\partial\delta_1(t,\tau_1)}{\partial\tau}\right]d\tau+\varepsilon_{x0}(t)$$

$$\varepsilon^*_y(t)=\frac{\sigma^*_y(t)-\nu_1(t)\sigma^*_x(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma^*_y(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}-\sigma^*_x(\tau)\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau+\varepsilon_{y0}(t)$$

$$\gamma^*_{xy}=2\left\{\frac{[1+\nu_1(t)]\tau^*_{xy}(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\tau_{xy}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)]d\tau\right\}\ ^*, \qquad (4,55)$$

где: $\varepsilon_{x0}(t)$, $\varepsilon_{y0}(t)$ —вынужденные деформации (эти деформации в общем случае являются функциями геометрических координат x и y и времени t).

Поскольку геометрические условия совместности деформаций и условия равновесия не связаны с деформативными свойствами тела, можно пользоваться соответствующими зависимостями теории упругости.

Будем полагать, что напряженное состояние вызвано действием внешних сил, приложенных к контуру, или вынужденными деформациями. Подставив (4.55) в уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x{}^*(t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y{}^*(t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}{}^*(t)}{\partial x\partial y}, \qquad (4.56)$$

после введения функций напряжений $[\varphi^*(t)=\varphi^*(x, y, t)]$

$$\sigma_x{}^*(t)=\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial y^2};\quad \sigma_y{}^*(t)=\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial x^2};\quad \tau_{xy}{}^*(t)=-\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial x\partial y} \qquad (4.57)$$

и выполнения преобразований, совершенно аналогичных преобразованиям при выводе бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости, придем к такому интегродифференциальному уравнению.

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\nabla^2\nabla^2\varphi^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=E(t)\Omega(t), \qquad (4.58)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};\qquad \Omega(t)=\frac{\partial^2\varepsilon_{x0}(t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{y0}(t)}{\partial x^2}.$$

При напряженном состоянии, вызванном изменением температуры, равномерным по толщине диска и равным $\nu(x, y, t)$,

$$\varepsilon_{x0}(t)=\alpha\vartheta(t),\quad \varepsilon_{y0}(t)=\alpha\vartheta(t),$$

* В зависимостях (4.55), а также в зависимостях и уравнениях, относящихся к обобщенному плоскому напряженному состоянию и написанных далее, напряжения и деформации для сокращения показаны как функции времени t; фактически они зависят и от геометрических координат x и y.

функция $\Omega(t)$ принимает вид

$$\Omega(t)=\alpha\nabla^2\vartheta(t),$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения. В случае изучения влияния усадочных деформации

$$\Omega(t)=\nabla^2\varepsilon_{y0}(t).$$

Если напряженное состояние вызвано только внешними контурными силами, то $\varepsilon_{x0}(t)=0$, $\varepsilon_{y0}(t)=0$, $\Omega(t)=0$ и уравнение (4.58) принимает вид

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\nabla^2\nabla^2\varphi^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=0. \qquad (4.59)$$

Относительно функции $\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t)$ это однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода. В соответствующем разделе математического анализа доказано, что такие уравнения не имеют решений, отличных от тождественного нулю, т. е.

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t)=0. \qquad (4.60)$$

Это уравнение полностью совпадает с соответствующим уравнением теории упругости. Следовательно, функция напряжений в рассматриваемом случае $\varphi^*(t)$ и функция напряжений упруго-мгновенной задачи $\varphi(t)$ должны удовлетворять одному и тому же дифференциальному уравнению (4.60). Но функция напряжений зависит еще и от условий на контуре, записываемых в виде некоторых дополнительных уравнений. Идентичность таких дополнительных уравнений при решении задачи с учетом ползучести и решении упруго-мгновенной задачи свидетельствует об отсутствии зависимости условий на контуре от ползучести. Поэтому для диска с условиями на контуре, не зависящими от ползучести, при плоском обобщенном напряженном состоянии, вызванном внешними силами, справедливы равенства

$$\sigma^*_x(t)=\sigma_x(t),\quad \sigma^*_y(t)=\sigma_y(t),\quad \tau^*_{xy}(t)=\tau_{xy}(t). \qquad (4.61)$$

Условия на контуре не зависят от ползучести в следующих случаях:

1) когда они заданы в напряжениях, т. е. когда они записываются как уравнения равновесия элементарной трехгранной призмы

$$\overline{X}(t)=\sigma_x^*(t)\sin\alpha+\tau_{xy}^*(t)\cos\alpha,\quad \overline{Y}(t)=\sigma^*{}_y(t)\cos\alpha+\tau^*{}_{xy}(t)\sin\alpha, \tag{4.62}$$

совершенно аналогичные соответствующим условиям упругомгновенной задачи (α — угол наклона касательной к контуру по отношению к оси x; $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — проекции внешней нагрузки на координатные оси).

2) если на контур наложены абсолютно жесткие связи, т. е. если

$$U^*{}_k(t)=0,\quad V^*{}_k(t)=0 \tag{4.63}$$

и выполняется условие

$$\nu_2^*(t,\tau)=\nu_1(t)=\nu'=\text{const}, \tag{4.64}$$

приводящее к равенству [см. (4.13)]

$$\delta_1(t,\tau)=\frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)}+\nu_2(t,\tau)C(t,\tau)=\nu\delta(t,\tau). \tag{4.65}$$

Утверждение о независимости условий (4.63) от ползучести доказывается следующим образом. Приняв во внимание уравнения Коши

$$\varepsilon_{xk}^*(t)=\frac{\partial U^*{}_k(t)}{\partial x},\quad \varepsilon_{yk}^*(t)=\frac{\partial V_k^*(t)}{\partial y}, \tag{4.66}$$

а также (4.55) и (4.65), записываем формулы для определения перемещений с учетом ползучести

$$\begin{aligned} U_k^*(t)&=\frac{1}{E(t)}\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx- \\ &-\int_{\tau_1}^{t}\int[\sigma_{xk}^*(\tau)-\nu\sigma_{yk}^*(\tau)]dx\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\varepsilon_{x0}{}^k(t), \\ V_k^*(t)&=\frac{1}{E(t)}\int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma^*{}_x(t)]dy- \\ &-\int_{\tau_1}^{t}\int[\sigma_{yk}^*(\tau)-\nu\sigma_{xk}^*(\tau)]dy\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\varepsilon_{y0}{}^k(t). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Индекс «к» указывает, что речь идет о значениях на контуре.

В рассматриваемом случае, при $\varepsilon_{x0}{}^k(t)=0;\quad \varepsilon_{y0}{}^k(t)=0$, эти формулы позволяют представить условия (4.63) в виде такой системы уравнений:

$$\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\int[\sigma^*_{xk}(\tau)-\nu\sigma_{yk}^*(\tau)]dx\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=0$$

(4 68)

$$\int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma_{xk}^*(t)]dy-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\int[\sigma_{yk}^*(\tau)-\nu\sigma_{xk}^*(\tau)]dy\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=0.$$

Нетрудно заметить, что относительно функций

$$\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx,\quad \int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma_{xk}^*(t)]dy$$

эти уравнения являются однородными интегральными уравнениями Вольтерра II рода. А как уже указывалось, такие уравнения не имеют решений, отличных от тождественного нулю. Поэтому условия на контуре, записанные с учетом ползучести (4.68), принимают вид

$$\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx=0,\quad \int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma_{xk}^*(t)]dy=0. \qquad (4.69)$$

Эти условия полностью совпадают с условиями упруго-мгновенной задачи, следующими из (4.68) при $\tau_1=t$.

Для определения перемещений точек тела, вызванных внешними силами, при контурных условиях, не зависящих от ползучести, можно получить формулы, аналогичные (4.43)

$$U^*(t)=U(t)-\int_{\tau_1}^{t}U(\tau)E(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau,$$

$$V^*(t)=V(t)-\int_{\tau_1}^{t}V^*(\tau)E(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \qquad (4\,70)$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — перемещения упруго-мгновенной задачи

$$U(t)=\frac{1}{E(t)}\int[\sigma_x(t)-\nu\sigma_y(t)]dx,$$

$$V(t)=\frac{1}{E(t)}\int[\sigma_y(t)-\nu\sigma_x(t)]dy. \qquad (4.71)$$

При действии контурных сил, постоянных во времени,

$$U(t)=\int\frac{\sigma_x(\tau_1)-\nu\sigma_y(\tau_1)}{E(t)}dx,\quad V(t)=\int\frac{\sigma_y(\tau_1)-\nu\sigma_x(\tau_1)}{E(t)}dy \qquad (4.72)$$

и согласно (4.70)

$$U^*(t)=U(\tau_1)[1+E(\tau_1)C(t,\tau_1)], \qquad V^*(t)=V(\tau_1)[1+E(\tau_1)C(t,\tau_1)]. \tag{4.73}$$

В силу (4.4) и (4.5), последние зависимости можно выразить через характеристику ползучести

$$U^*(t)=U(\tau_1)[1+\varphi(t,\tau_1)], \quad V^*((t)=V(\tau_1)[1+\varphi(t,\tau_1)], \tag{4.74}$$

где $U(\tau_1)$ и $V(\tau_1)$—перемещения в момент приложения нагрузки, т. е. упругие перемещения.

При выполнении практических расчетов, т е при проверках элементов сооружений по второму предельному состоянию, проектировщика интересует максимальное перемещение, развивавшееся в течение всего периода процесса, т. е. при $t=\infty$. В соответствии с (4.74)

$$U^*(\infty)=U(\tau_1)[1+\varphi(\infty,\tau_1)], \quad V^*(\infty)=V(\tau_1)[1+\varphi(\infty,\tau_1)].$$

Поскольку линейная теория ползучести основана на принципе наложения, то перемещения от суммы кратковременно и длительно действующих нагрузок могут подсчитываться по формулам

$$U^*(\infty)=U_k(\tau_1)+U^*_q(\infty), \quad V^*(\infty)=V_k(\tau_1)+V_q^*(\infty),$$

где $U_k(\tau_1)$ и $V_k(\tau_1)$—перемещения от кратковременных нагрузок, $V_q^*(\infty)$ и $U_q^*(\infty)$ — перемещения от длительных нагрузок.

Далее переходим к изучению напряженно-деформированного состояния диска, вызванного вынужденными деформациями.

При напряженном состоянии, вызванном только вынужденными деформациями, т е. в случае $\varepsilon_{x0}(\tau)\neq 0$, $\varepsilon_{y0}(\tau)\neq 0$, функция напряжений упруго-мгновенной задачи ($\tau_1=t$), согласно (4.58), разыскивается из дифференциального уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\varphi(t)=E(t)\Omega(t). \tag{4.75}$$

Исключив $\Omega(t)$ с помощью (4.75) из (4 58), получим уравнение

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\nabla^2\nabla^2\varphi^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\nabla^2\nabla^2\varphi(t), \tag{4.76}$$

связывающее функцию напряжений, вычисляемую с учетом

полных деформаций, $\varphi^*(t)$ с функцией напряжений упруго-мгновенной задачи $\varphi(t)$.

Из (4.76) следует интегральное уравнение

$$\varphi^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\varphi^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\varphi(t)+\bar{\varphi}(t), \qquad (4.77)$$

где $\bar{\varphi}(t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\bar{\varphi}(t)=0. \qquad (4.78)$$

Возможность перехода от (4.76) к (4.77) становится очевидной, если к (4.77) применить оператор $\nabla^2\nabla^2$. Но интегральное уравнение (4.77), без $\varphi(t)$, не содержит произвольных функций, необходимых для учета на контуре специфики влияния ползучести; функция $\varphi(t)$ позволяет ввести в решение эту специфику.

При условиях на контуре, не зависящих от ползучести, функция $\varphi(t)$ полностью описывает состояние контура. Следовательно, функция $\varphi(t)$ должна на контуре принимать нулевое значение. В силу сказанного и однородности (4.78)

$$\bar{\varphi}(t)=0 \qquad (4.79)$$

Поэтому при условиях на контуре, не зависящих от ползучести, функция напряжений $\varphi^*(t)$ связана с функцией напряжений упруго-мгновенной задачи $\varphi(t)$ с помощью интегрального уравнения

$$\varphi^*(\tau)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\varphi^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\varphi(\tau). \qquad (4.80)$$

Напряжения $\sigma_x^*(t)$, $\sigma_y^*(t)$, $\tau_{xy}^*(t)$ определяются через $\varphi^*(t)$ по формулам (4.57).

Из сказанного следует, что в диске с условиями на контуре, не зависящими от ползучести, при обобщенном плоском состоянии, вызванном вынужденными деформациями, напряжения, определяемые с учетом ползучести,—$\sigma_l^*(t)[\sigma_x^*(t),\sigma_y^*(t),\tau_{xy}^*(t)]$ связаны с напряжениями упруго-мгновенной задачи $\sigma_l(t)[\sigma_x(t),\sigma_y(t),\tau_{xy}(t)]$ с помощью интегрального уравнения

$$\sigma_l^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma_l^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma_l(t). \qquad (4.81)$$

Полезно заметить, что это уравнение совершенно аналогично уравнению (4.51), описывающему напряженное состояние стержня при наличии вынужденных деформаций.

Необходимо рассмотреть, в каких случаях, при наличии вынужденных деформаций, условия на контуре не зависят от ползучести.

Условия на контуре не зависят от ползучести и при напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями, если они представлены в виде (4.62) или (4.63). Это утверждение для (4.62) очевидно; для (4.63), т. е. для случая

$$\varepsilon^k{}_{x0}(t)\neq 0, \quad \varepsilon^k{}_{y0}(t)\neq 0, \tag{4.82}$$

требует обоснования.

Приравняв к нулям правые части (4.67) и выразив с помощью полученных уравнений, при $\tau_1=t$, вынужденные деформации через напряжения упруго-мгновенной задачи, представим условия на контуре (4.63) в виде

$$\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\int[\sigma_{xk}^*(\tau)-\nu\sigma_{yk}^*(\tau)]\,dx\,\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau=$$
$$=\int[\sigma_{xk}(t)-\nu\sigma_{yk}(t)]dx,$$
$$\int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma_{xk}^*(t)]dy-E(t)\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_{yk}^*(\tau)-\nu\sigma^*{}_{xk}(\tau)]\,dy\,\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau= \tag{4.83}$$
$$=\int[\sigma_{yk}(t)-\nu\sigma_{xk}(t)]dy.$$

Каждое из этих уравнений относительно функций

$$\int[\sigma_{xk}^*(t)-\nu\sigma_{yk}^*(t)]dx, \quad \int[\sigma_{yk}^*(t)-\nu\sigma_{xk}^*(t)]dy$$

является неоднородным интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Структура этих уравнений такова, что если напряжения $\sigma_x^*(t)$ и $\sigma_y^*(t)$ удовлетворяют уравнению (4.81), то они удовлетворяют и (4.83). Поскольку в (4.81) вся информация об условиях на контуре содержится в решении упруго-мгновенной задачи $\sigma_l(t)$, то можно считать, что и в данном случае ползучесть не оказывает влияния на условия на контуре.

Если вынужденные деформации линейны по геометрическим координатам x и y, то $\Omega(t)=0$ и функция напряжений определяется из дифференциального уравнения (4.60). В-

этом случае отсутствие связей на контуре может быть записано, как отсутствие контурных усилий, т. е. в силу (4.62) и (4.57) в виде уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial y^2}\sin\alpha-\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial x\partial y}\cos\alpha=0,\quad \frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial x^2}\cos\alpha-\frac{\partial^2\varphi^*(t)}{\partial x\partial y}=0.$$

Поскольку уравнение (4.60) и контурные условия однородны, то функция напряжений $\varphi^*(t)$ тождественно равна нулю; следовательно, равны нулю и напряжения.

Как было выявлено ранее, в случае наличия на контуре жестких связей должны выполняться условия, представленные в виде уравнений (4.83). При $\varepsilon^k_{x0}(t)\neq 0$, $\varepsilon^k_{y0}(t)\neq 0$ напряжения упруго-мгновенной задачи $\sigma_{xk}(t)$ и $\sigma_{yk}(t)$, входящие в правые части этих уравнений отличны от нуля и в силу (4.67) ($\tau_1=t$) могут быть определены из таких зависимостей

$$\int[\sigma_{xk}(t)-\nu\sigma_{yk}(t)]dx+E(t)\varepsilon_{x0}{}^k(t)=0,$$
$$\int[\sigma_{yk}(t)-\nu\sigma_{xk}(t)]\,dy+E(t)\varepsilon_{y0}{}^k(t)=0.$$

Из этого следует, что уравнения (4.83) неоднородны и функция напряжений $\varphi(t)^*$, а также соответствующие напряжения, — отличны от нуля. И поскольку уравнения (4.83) удовлетворяются, если удовлетворяются уравнения (4.81), то влияние ползучести на напряженное состояние не имеет никаких особенностей. Этот результат показывает, что в дисках, обладающих ползучестью, как и в упругих дисках, вынужденные деформации, линейно изменяющиеся по геометрическим координатам x и y, вызывают напряженное состояние только при наличии связей, препятствующих свободному деформированию. Если эти связи абсолютно жестки, это влияние ползучести учитывается с помощью интегрального уравнения (4.81). Иначе обстоит дело в случаях, когда на контур или его часть наложены податливые связи. Условия на контуре, записанные с помощью (4.67), получают дополнительные слагаемые, учитывающие характеристики деформативности связей. Иными словами, уравнения, описывающие условия на контуре, отличаются от уравнения состояния и ползучесть оказывает дополнительное влияние через условия на контуре. Это обстоятельство приходится учитывать при решениях различного рода контактных задач, например, задач о напряженно-деформированном состоянии массивного бетонного блока, лежащего на основании из скалы или ранее уложенного бетона.

7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОДНОРОДНОГО ТЕЛА. СИСТЕМЫ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Результаты выкладок, примерно аналогичных приведенным в предыдущем параграфе, позволили установить для изотропного и однородного тела произвольной формы общие положения о влиянии линейной ползучести. Эти положения относятся к случаю, когда справедливы равенства

$$\nu_2^*(t,\ \tau)=\nu_1(\tau)=\nu=\text{const} \tag{4.64}$$

и условия на поверхности тела не зависят от ползучести (теоремы Н. Х. Арутюняна*).

1. Если напряженное состояние тела вызвано внешними силами, то система напряжений с учетом ползучести и изменения во времени модуля упруго-мгновенных деформаций $\sigma_x^*(t)$ и $\tau_{yz}^*(t)$ тождественно совпадает с системой напряжений упруго-мгновенной задачи $\sigma_x(t)$, ... $\tau_{yz}(t)$, т. е.

$$\sigma^*_x(t)=\sigma_x(t),\ \ldots\ \tau^*_{yz}(t)=\tau_{yz}(t). \tag{4.84}$$

2. Если напряженное состояние в теле вызвано факторами, связанными с вынужденными деформациями, как например, температурными воздействиями, неравномерными осадками опор, усадкой и т. д., то напряжения в этом теле $\sigma_x^*(t)$, ... $\tau_{yz}^*(t)$ с учетом ползучести и изменения во времени модуля упруго-мгновенных деформаций, связаны с соответствующими напряжениями упруго-мгновенной задачи $\sigma_x(t)$, ... $\tau_{yz}(t)$ такими интегральными уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\sigma_x^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma_x(t)\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad (4.85)\\
&\tau_{yz}^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\tau_{yz}^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\tau_{yz}(t),
\end{aligned}$$

Исследование величин погрешностей, возможных в силу (4.64) при выполнении расчетов строительных конструкций, в

* См. монографию Н. Х. Арутюняна, упоминающуюся на стр 8.

частности бетонных конструкций, показало, что соответствующие расхождения при воздействиях эксплуатационного уровня не превышают 5%.

Очевидно, что условие (4.64) вообще отпадает во всех случаях, когда коэффициент поперечного расширения не участвует в формировании напряженного состояния. Это имеет место при обобщенном плоском напряженном состоянии, если условия на контуре заданы в напряжениях (см. предыдущий параграф), в оболочках некоторых типов и стержневых системах с жесткими опорными связями.

Положения 1 и 2, сформулированные выше, справедливы не только для отдельных тел, но и для систем, образованных из тел, обладающих одинаковыми характеристиками деформативности и связанных между собой жесткими связями. Такие системы называются системами, составленными из однородных элементов. В однородных и изотропных телах и системах, составленных из однородных элементов, при длительном действии внешних сил линейная ползучесть не влияет на напряженное состояние, но вызывает нарастание перемещений. При вынужденных деформациях ползучесть приводит к изменению всех напряжений и внутренних усилий по одному и тому же закону.

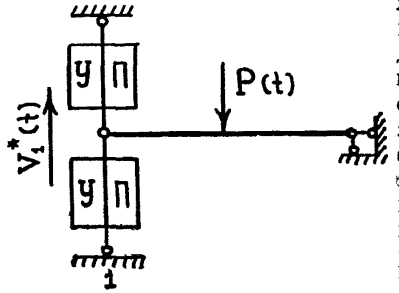


Рис.10.

Перераспределения внутренних усилий во времени и в том и в другом случае нет. Все сказанное о влиянии ползучести на напряженное и деформированное состояния изотропных и однородных тел и систем, составленных из однородных элементов, удобно проиллюстрировать с помощью схематической модели с одной связью, обладающей упругими свойствами и ползучестью (рис. 10). При действии внешних сил ползучесть связи 1 влияет только на перемещения. При наличии вынужденных деформаций в связи 1 затухание напряжений или усилий в ней описывается интегральным уравнением вида (4.85).

Из всего сказанного в этом параграфе применительно к расчету стержневых статически неопределимых систем (балки, рамы, арки) **можно сделать следующие выводы:**

1. Поскольку внутренние усилия $M^*(t)$, $Q^*(t)$, $N^*(t)$ являются величинами интегральными относительно напряжений, то:

а — при действии внешних сил

$$M^*(t)=M(t) \tag{4.86}$$

б — при наличии вынужденных деформаций

$$M^*(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t} M^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=M(t), \tag{4.87}$$

где $M(t)$ — изгибающие моменты упруго-мгновенной задачи. Такие же зависимости справедливы для $Q^*(t)$ и $N^*(t)$.

2. При действии внешних сил, вследствие (4.86), перемещения в условиях длительного действия нагрузки определяются через усилия упруго-мгновенной задачи, совершенно так же, как в пятом параграфе определялись перемещения сжатого стержня. Поэтому любое перемещение стержневой системы, в частности прогиб $f^*(t)$ при нагрузке, постоянной во времени, может вычисляться с помощью формулы [см. (4.45)]

$$f^*(t)=f(\tau_1)[1+\varphi(t,\tau)],$$

где $f(\tau_1)$ — упругий прогиб в момент $t=\tau_1$.

8. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пример 1. Определить прогибы f_k и f_q деревянной балки перекрытия при кратковременном и длительном действии равномерно распределенной нагрузки q.

Данные для расчета. Расчетный пролет $l_p=6{,}0$ мт, поперечное сечение балки $h\times b=26\times 18$ см, характеристики древесины $E=1{,}6\cdot 10^5$, $\varphi=1$, $q=360$ кг/м.

$$f_k=\frac{5ql_p^4}{384\,EI}=\frac{5\cdot 3{,}6\cdot 6^4\cdot 100^4\cdot 12}{384\cdot 1{,}6\cdot 10^5\cdot 18\cdot 26^3}=1{,}43 \text{ см}.$$

$$f_q=f_k(1+\varphi)=f_k(1+1)=2f_k=2{,}86 \text{ см}.$$

Пример 2. Определить полный ($t=\infty$) прогиб железобетонной предварительно напряженной балки первой категории трещиностойкости, имеющей поперечное сечение согласно рис. 11а, изготовленной с натяжением на бетон *. Предварительное обжатие производится после достижения бетоном проектной марочной прочности в возрасте $\tau_1=28$ суток. Балка шарнирно оперта по концам и имеет расчетный пролет $l_р=41{,}2$ м; размеры поперечного сечения и геометрические характеристики, необходимые для расчета, показаны на рис. 11. Собственный вес балки $q_с=2{,}0$ т/м; постоянная эксплуатационная нагрузка $q_э=0{,}96$ т/м приложена при $\tau_2=90$ суток. Бетон марки 400, $E=3{,}5\cdot10^5$ кг/см², $C(28, \infty)=5{,}0\cdot10^{-6}$ см²/кг, $C(90, \infty)=3{,}75\cdot10^{-6}$ см²/кг. Арматура—из 14 пучков высокопрочной холоднотянутой проволоки общей площадью $F_н=66$ см²; напряжения в арматуре $\sigma_н=9029$ кг/см².

Если не учитывать относительно небольшого влияния арматуры на жесткость балки, а также потерь предварительного напряжения, происходящего после обжатия бетона, то прогиб балки может быть вычислен, исходя из расчетной схемы, показанной на рис. 11**. Сила, обжимающая балку, $N_н$, приложена на уровне центра тяжести арматуры и равна

$$N_н=F_н\sigma_н=66\times9029=594 \text{ т}.$$

Момент от этих сил, относительно центра тяжести бетонного сечения

$$M_н=N_н y_б=594\times1=594 \text{ тм}.$$

Сначала определяем вертикальные перемещения среднего сечения балки, создающиеся при приложении нагрузки и передаче усилий предварительного обжатия на бетон.

Прогиб от собственного веса балки

$$f_{кс}=\frac{5q_с l^4}{384\,EI}=\frac{5{,}20\cdot41{,}2^4\cdot10^8}{384\cdot3{,}5\cdot10^5\cdot47{,}1\cdot10^6}=4{,}52 \text{ см}.$$

Прогиб от постоянной эксплуатационной нагрузки

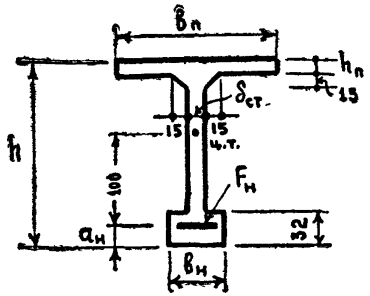
$$f_{кэ}=\frac{5q_э l^4}{384\,EI}=\frac{5\cdot9{,}6\cdot41{,}2^4\cdot10^8}{384\cdot3{,}5\cdot10^5\cdot47{,}1\cdot10^6}=2{,}17 \text{ см}.$$

* Типовой проект серии 3—503—12, инв. № 384/31, вып. 2, ГПИ Союздорпроект М., 1968.

** Решение задачи с учетом влияния перераспределения усилий между арматурой и бетоном см. в книге И. Е. Прокоповича, упоминавшейся на странице 8.

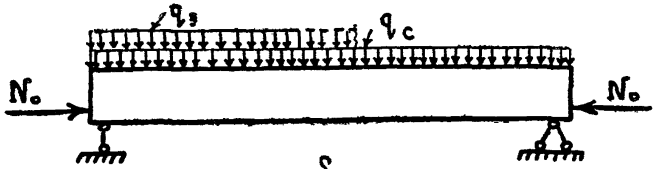
Выгиб от сил предварительного напряжения

$$f_{кв} = \frac{M_н l^2}{8\,EI} = \frac{594 \cdot 10^5 \cdot 41{,}2^2 \cdot 10^4}{8 \cdot 3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 47{,}1 \cdot 10^6} = 7{,}65 \text{ см}.$$



$h = 210$, $h_п = 15$,
$\beta_п = 180$, $\beta_н = 60$,
$\delta_{ст} = 18$, $a_н = 25$.
все размеры даны в см.
$J = 47{,}1 \cdot 10^6$ см^4

а



б

Рис. 11.

Перемещения при длительных воздействиях вычисляются по формуле, содержащей величину характеристики ползучести $\varphi(t, \tau_1)$.

В рассматриваемом случае при $t = \infty$

$$\varphi(\infty,28) = EC(\infty,28) = 3{,}50 \cdot 10^5 \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-6} = 1{,}75,$$

$$\varphi(\infty,90) = EC(\infty,90) = 3{,}50 \cdot 10^5 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-6} = 1{,}31.$$

Поэтому с учетом возраста бетона к моменту приложения длительных воздействий

$$f_{дс}=f_{кс}[1+\varphi(\infty,28)]=4{,}52[1+1{,}75]=12{,}4 \text{ см},$$

$$f_{дэ}=f_{кэ}[1+\varphi(\infty,90)]=2{,}17[1+1{,}31]=5{,}01 \text{ см},$$

$$f_{дв}=f_{кв}[1+\varphi(\infty,28)]=7{,}65\times 2{,}75=21 \text{ см}.$$

С учетом направлений составляющих перемещений полный прогиб

$$f_q=f_{qc}+f_{qэ}-f_{qв}=12{,}4+5{,}01-21{,}0=-3{,}59 \text{ см}.$$

Этот результат показывает, что от собственного веса, постоянной эксплуатационной нагрузки и сил предварительного напряжения среднее сечение балки переместится вверх, т. е. балка получит выгиб. При анализе полученного вывода нужно иметь в виду, что балка входит в пролетное строение моста под автомобильную дорогу и работает еще на значительные временные нагрузки.

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И УСИЛИЙ, ВЫЗВАННЫХ ВЫНУЖДЕННЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ, ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ЗАКОНАМ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

Если напряженное состояние однородного и изотропного тела вызвано вынужденными деформациями, а условия на контуре не зависят от ползучести, то решение упруго-мгновенной задачи всегда может быть представлено в виде таких произведений

$$\sigma_x(x,y,z,t)=E(t)\,T_x(x,y,z,t)\ldots\tau_{yz}(x,y,z,t)=E(t)\,T_{yz}(x,y,z,t). \tag{4.88}$$

Например, термонапряженное состояние длинной полосы при приращении температур, постоянном вдоль оси x, переменном по оси y (рис. 12), описывается так:

$$\sigma_x(y,t)=E(t)\alpha[n_1(t)+2n_2(t)y-\vartheta(y,t)],\quad \sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=0,$$

$$n_1=F(t)/2h,\qquad n_2=3S(t)/4h^3, \tag{4.89}$$

причем $F(t)$ и $S(t)$ — площадь и статический момент относительно оси x эпюры изменения температур за рассматриваемый промежуток времени. Сопоставление (4.88) с (4.50) показывает, что в общем решении задачи теории ползучести $T_x(t)$, ... $T_{yz}(t)$ играют ту же роль, что $\varepsilon_0(t)$ в задаче о

сжатом или растянутом стержне. Следовательно, решение, скажем, первого интегрального уравнения (4.85) можно записать так:

$$\sigma_x^*(t)=E(t)[T_x(t)+\int_{\tau_1}^{t}T_x(t)R(t,\tau)d\tau]. \qquad (4.90)$$

Выражения для определения внутренних усилий упруго-мгновенной задачи в стержневой системе, составленной из однородных элементов, тоже имеют вид

$$M(t)=E(t)T_M(t), \quad Q(t)=E(t)T_Q(t), \quad N(t)=E(t)T_N(t). \qquad (4.91)$$

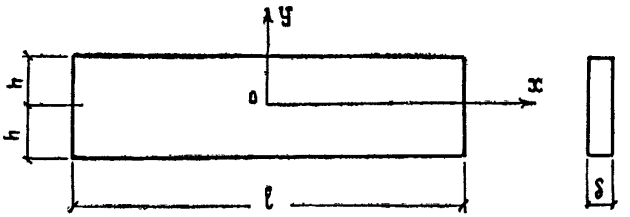


Рис. 12.

Поэтому решение интегрального уравнения (4.87) удобно представлять так:

$$M^*(t)=E(t)[T_M(t)+\int_{\tau_1}^{t}T_M(\tau)R(t,\tau)d\tau]. \qquad (4.92)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае влияние линейной ползучести на напряженные состояния сжатого или растянутого стержня, статически неопределимых стержневых систем и трехмерного тела произвольной формы, при условии (4.64), — совершенно одинаково. Разумеется, это следует из полной идентичности интегральных уравнений (4.51), (4.85) и (4.87). С практической точки зрения важнейшим является случай стационарных вынужденных деформаций

$$T_x(x,y,z,t)=T_x(x,y,z,\tau_1)\ldots T_{yz}(x,y,z,t)=T_{yz}(x,y,z,\tau_1). \qquad (4.93)$$

Согласно (4.90)

$$\sigma_x^*(t)=E(t)T_x(\tau_1)[1+\int_{\tau_1}^{t}R(t,\tau_1)d\tau]. \qquad (4.94)$$

В соответствии с определением (4.88), произведение, стоящее перед квадратными скобками, является решением упруго-мгновенной задачи; сумма, стоящая в квадратных скобках, связанная через резольвенту с характеристиками деформативности материала (см. табл. 2), называется коэффициентном затухания напряжений и обозначается как $H(t, \tau_1)$.

Формулу (4.94) можно переписать так:

$$\sigma^*_x(t)=\sigma_x(t)H(t,\tau_1),\quad \sigma_x(t)=E(t)T_x(\tau_1),\quad H(t,\tau_1)=1+\int_{\tau_1}^{t}R(t,\tau)\,d\tau. \tag{4.95}$$

Совершенно аналогично:

$$M^*(t)=M(t)H(t,\tau_1),\quad M(t)=E(t)T_M(\tau_1). \tag{4.96}$$

Поэтому все сказанное далее в этом параграфе о влиянии ползучести на напряжения справедливо и для усилий.

Если материал не обладает свойством старения, то

$$\sigma^*_x(t)=\sigma H(t-\tau_1),\quad \sigma=ET(\tau_1),\quad H(t-\tau_1)=1+\int_{\tau_1}^{t}R(t-\tau)\,d\tau. \tag{4.97}$$

Приняв резольвенту в форме (4.38), получим

$$H(t-\tau_1)=1-\gamma\varphi\int_{\tau_1}^{t}e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau,$$

что после простых преобразований приведет к формуле

$$H(t-\tau_1)=\frac{1+\varphi e^{-\gamma(t-\tau_1)}}{1+\varphi}, \tag{4.98}$$

причем

$$H(0)=1,\quad H(\infty)=\frac{1}{1+\varphi}. \tag{4.99}$$

Второе из этих равенств, совместно в (4.97), позволяет записать:

$$\sigma^*_x(\infty)=\frac{ET(\tau_1)}{1+\varphi}=E_д T(\tau_1),\quad E_д=\frac{E}{1+\varphi},$$

где $E_д$ — модуль деформаций (модуль полных деформаций, длительный модуль), определяемый через полные деформации.

Таблица 3

Формулы для вычисления коэффициентов затухания $H(t, \tau_1)E(\tau)=E=\text{Const}$

№ п/п.	Теория	Мера ползучести	Коэффициент затухания	Обозначения в формулах для коэффициента затухания
1	ТУН	$C_0[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$	$\frac{1+\varphi e^{-r(t-\tau_1)}}{1+\varphi}$	$\varphi=EC_0,\quad r=(1+\varphi)$
2	ТС	$A(t)-A(\tau)$	$e^{-\varphi(t)}$	$\varphi(t)=EA(t)$
3	НТС	$(C_0+Ae^{-\gamma_1 t})\times$ $\times[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$	$H(\infty)+\frac{a+c}{1+c}F(t-\tau_1)\times$ $\times K(t-\tau_1)$ $H(\infty)=1-\frac{a+c}{1+c}F(0)$	$F(t-\tau_1)=1-\frac{ae^{-\gamma_1(t-\tau_1)}}{1+c+\gamma_1/\gamma}+$ $+\frac{a^2e^{-2\gamma_1(t-\tau_1)}}{(1+c+\gamma_1/\gamma)(1+c+2\gamma_1/\gamma)}+\ldots$ $K(t-\tau_1)=e^{-\left\{r(t-\tau_1)(t-\tau_1)-a\frac{\gamma}{\gamma_1}\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}\right]\right\}}$ $c=EC_0,\quad a=EAe^{-\gamma_1\tau_1},\quad r=\gamma(1+c)$

Таблица 4

Таблица коэффициентов затухания напряжений $H(\infty,\tau_i)$ для бетонных элементов

$\varphi(\infty,28)$ / τ_i—сутки	0,5	1	1,5	1,89	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	0,629	0,420	0,294	0,228	0,213	0,159	0,122	0,094	0,075	0,060	0,049
45	0,659	0,460	0,336	0,270	0,254	0,198	0,158	0,129	0,107	0,090	0,077
65	0,687	0,500	0,380	0,313	0,298	0,240	0,198	0,166	0,142	0,122	0,107
90	0,715	0,540	0,424	0,359	0,343	0,285	0,241	0,207	0,180	0,159	0,142
120	0,740	0,578	0,466	0,402	0,386	0,328	0,283	0,248	0,220	0,197	0,178
135	0,750	0,591	0,482	0,419	0,404	0,345	0,300	0,265	0,236	0,212	0,193
180	0,771	0,622	0,518	0,457	0,442	0,384	0,339	0,303	0,273	0,249	0,228
230	0,784	0,642	0,542	0,482	0,468	0,411	0,366	0,329	0,299	0,274	0,253
300	0,793	0,656	0,558	0,500	0,486	0,430	0,385	0,349	0,318	0,293	0,271
400	0,798	0,663	0,567	0,510	0,496	0,440	0,395	0,359	0,328	0,303	0,281
1500	0,800	0,666	0,571	0,514	0,500	0,444	0,400	0,364	0,333	0,308	0,286
2000	0,800	0,666	0,571	0,514	0,500	0,444	0,400	0,364	0,333	0,308	0,286

Примечания. 1. При пользовании этой таблицей необходимо помнить, что коэффициенты $H(\infty, \tau_i)$ вычислены в зависимости от величин $\varphi(\infty, 28)$, при введении стационарных вынужденных деформаций при возрастах бетона $\tau_i = 28, 45, 65, \ldots$ суток.

2. $\varphi(\infty, 28) = 1{,}89$ соответствует эталонному (среднему) бетону (см. стр. 13 и Приложение 1).

Следовательно, напряжения с учетом ползучести в теле, не обладающем старением и находящемся в условиях стационарных вынужденных деформаций, при $t=\infty$ можно вычислить по формулам упруго-мгновенной задачи предварительной заменой E на $E_д$.

В таблице 3 записаны формулы для вычисления коэффициентов затухания $H(t, \tau)$, соответствующие некоторым из выражений, применяемых для описания меры ползучести.

Как видно из таблицы, формулы, полученные на основе ТУН и ТС, достаточно просты, на основе НТС—значительно сложнее. Для облегчения выполнения практических расчетов в таблице 4 приведены величины коэффициентов затухания напряжений в бетонных элементах, вычисленные по формуле, имеющей в таблице 3 порядковый номер 3. При составлении таблицы 4 принималось $\tau_1=28$ суток, $E(\tau)=E(28)=E=$ =Const, а также в соответствии с формулой, приведенной на стр. 13, $\gamma_1=0{,}012$ 1/сутки, $\gamma=0{,}006$ 1/сутки, $C_0=0{,}50$ $C(\infty, 28)$ см²/кг, $A=0{,}70$ $C(\infty, 28)$ см²/кг, чему соответствовало

$$c=0{,}50\varphi(\infty,28), \qquad a=0{,}50\varphi(\infty,28).$$

Рассмотрим случай вынужденных деформаций, развивающихся по закону

$$T_x(x,y,z,t)=T_x(x,y,z)[1-e^{-\beta(t-\tau_1)}]=T_x[1-e^{-\beta(t-\tau_1)}]. \quad (4.100)$$

Если решать задачу на основе ТУН и принять резольвенту по (4.38), то с помощью (4.90) получим

$$\sigma_x^*(t)=ET_x\{1-e^{-\beta(t-\tau_1)}-\gamma\varphi\int_{\tau_1}^{t}[1-e^{-\beta(\tau-\tau_1)}]e^{-r(t-\tau)}\}d\tau.$$

Это выражение можно переписать в виде, аналогичном первой формуле (4.95)

$$\sigma^*(t)=\sigma(t)H_\beta(t,\tau_1), \quad (4.101)$$

где $\sigma(t)$ — решение упруго-мгновенной задачи. Согласно (4.88) и (4.100)

$$H_\beta(t,\tau_1)=1-\frac{\gamma\varphi}{1-e^{-\beta(t-\tau_1)}}\int_{\tau_1}^{t}[1-e^{-\beta(\tau-\tau_1)}]e^{-r(t-\tau)}d\tau,$$

т. е.

$$\sigma_x(t)=ET_x[1-e^{-\beta(t-\tau_1)}].$$

Вычисление интеграла приводит к формуле

$$H_\beta(t,\tau_1)=1-\frac{\varphi}{1-e^{-\beta(t-\tau_1)}}\left\{\frac{1-e^{-r(t-\tau_1)}}{1+\varphi}-\frac{e^{-\beta(t-\tau_1)}-e^{-r(t-\tau_1)}}{1+\varphi-\beta/\gamma}\right\}. \tag{4.102}$$

Состояние, установившееся после окончания процесса ползучести, когда $t=\infty$, характеризуется такими величинами

$$\sigma_x(\infty)=ET_x,\quad H_\beta(\infty)=\frac{1}{1+\varphi}.$$

Равенство этого коэффициента и коэффициента $H(\infty)$, определяемого согласно (4.99), связано с отсутствием старения, т. е. с независимостью влияния ползучести от времени приложения воздействий.

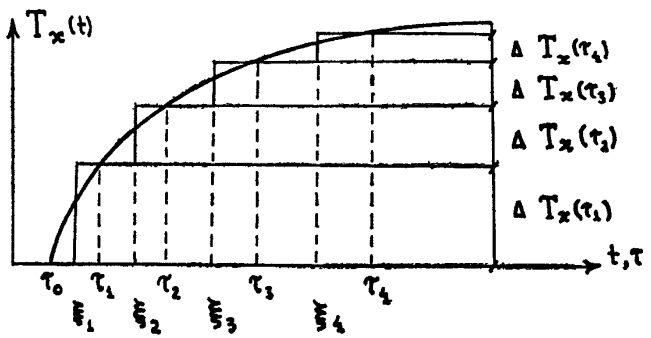


Рис. 13.

Решение задачи при переменных вынужденных деформациях с помощью НТС требует весьма громоздких выкладок. При выполнении практических расчетов, на основании принципа наложения, монотонно возрастающие или монотонно затухающие вынужденные деформации, а следовательно, и функции $T_x(x, y, z, t)$, можно заменить суммой деформаций, как это показано на рис. 13.

Каждая из составляющих деформаций состоит из нестационарного участка относительно малой протяженности и стационарного участка. Напряжения можно приближенно вычислять, как сумму напряжений от стационарных деформа-

ций. Фактическое формирование напряжений в промежутках времени $\tau_0 - \tau_1$, $\tau_1 - \tau_2$, . . ., $\tau_{i-1} - \tau_i$ учитывается с помощью коэффициентов затухания в предположении, что стационарные вынужденные деформации $\Delta T_x(\tau_1)$, $\Delta T_x(\tau_2)$, ..., $\Delta T_x(\tau_i)$ начинаются в моменты $\xi_1 = 0{,}5(\tau_0 + \tau_1)$, $\xi_2 = 0{,}5(\tau_1 + \tau_2)$, ..., $\xi_i = 0{,}5(\tau_{i-1} + \tau_i)$. Это означает, что криволинейный закон изменения вынужденных деформаций заменяется ступенчатым, как показано на рис. 13.

С учетом всего сказанного

$$\sigma^*(t) = \Delta\sigma(\tau_1)H(t,\xi_1) + \Delta\sigma(\tau_2)H(t,\xi_2) + \ldots + \Delta\sigma(\tau_i)H(t,\xi_i), \quad (4.103)$$

где

$$\Delta\sigma(\tau_1) = \Delta T_x(\tau_1)E, \ \Delta\sigma(\tau_2) = \Delta T_x(\tau_2)E, \ldots, \ \Delta\sigma(\tau_i) = \Delta T_x(\tau_i)E. \quad (4.104)$$

При расчете бетонных элементов, если $\tau_1 \geqslant 28$ суток и $t = \infty$, величины $H(\infty, \xi_i)$ могут приниматься согласно табл. 4. По приведенным в настоящем параграфе формулам можно рассчитывать не только бетонные, но и железобетонные элементы и конструкции, имеющие обычные коэффициенты армирования и работающие без трещин. Связано это с тем, что при оговоренных условиях различие в армировании отдельных зон приводит к относительно незначительной неоднородности, в силу чего и оказывается применимой теория расчета систем, составленных из однородных элементов.

10. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ СТЕРЖНЕВЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Пример 3. Определить изгибающие моменты $M^*(t)$ в железобетонной раме, изображенной на рис. 14а, вызванные изменением температуры ригеля; изменение температуры по высоте сечения ригеля линейное. Рама выполнена из бетона марки 500, $E = 3{,}8 \cdot 10^5$ кг/см^2, $\varphi(\infty, \infty) = \varphi = 1{,}08$; размеры поперечных сечений: ригеля $1{,}7 \times 0{,}6$ м, стойки $\left(\frac{x}{12{,}1} + 1\right)$ 0,6 м; моменты инерции: сечений $I_p = 0{,}245$ м^4, $I_c = 0{,}282 \cdot 10^{-4}(x + 12{,}1)^3$ м^4, $\gamma = 0{,}0145$ т/м^3.

Расчет выполнить для следующих вариантов:

а — после весьма длительного срока эксплуатации температура нижней грани ригеля резко повышается на 30°С;

б — температура нижней грани ригеля через 28 суток после укладки бетона резко повышается на 30°С;

в — в дополнение к каждому из условий п. п. «а» и «б», после весьма длительного срока эксплуатации происходит резкое понижение температуры на 30°С;

г — после весьма длительной эксплуатации температура нижней грани ригеля равномерно на протяжении 100 суток увеличивается на 30°С

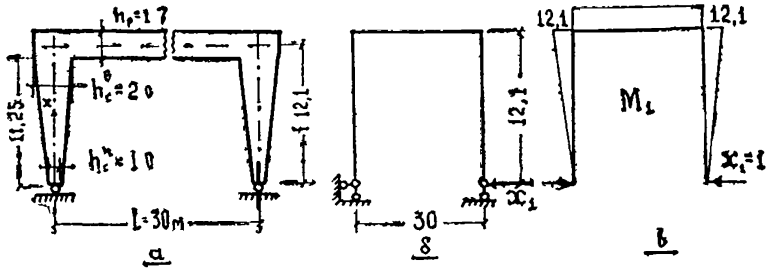


Рис.14.

При выполнении расчетов допускается учитывать резкое изменение температуры как мгновенное и считать, что после весьма длительного срока эксплуатации старение бетона практически завершено.

Предполагается, что рама работает без трещин; влияние арматуры на деформации рамы не учитывается.

Внутренние усилия для вариантов изменения температуры «а», «б» и «в» подсчитываются с помощью формулы, следуемой из (4.96) при $E(\tau)=E=\text{Const}$, $T(\tau)=T=\text{Const}$.

$$M^*(t)=MH(t,\ \tau)$$

В этой формуле через M обозначена величина изгибающего момента, возникающего в раме в момент изменения температуры $t=\tau_1$, т. е. решение упруго-мгновенной задачи.

Решение упруго-мгновенной задачи. Основная система метода сил показана на рис. 14б. Формула для определения лишнего неизвестного

$$x_1=-\Delta_{1v}/\delta_{11},$$

где

$$\delta_{11}=\Sigma\int\frac{M_1^2}{EI}dx,\quad \Delta_{1v}=\Sigma\int N_1\alpha\vartheta dx+\Sigma\int M_1\frac{\alpha\vartheta'}{h_p}dx,$$

причем M_1 и N_1 — изгибающие моменты и нормальные силы в основной системе от силы $x_1=1$, α—коэффициент линейного

температурного расширения, ϑ — среднее по высоте сечения стержня изменение температуры, ϑ_1 — разность изменения температуры на нижней и верхней гранях ригеля.

Для рассматриваемой рамы эпюра изгибающих моментов M_1 изображена на рис. 14в; нормальная сила в ригеле $N_1=1$, в стойке $N_1=0$; $\alpha=10^{-5}$, $\vartheta=15°C$, $\vartheta^1=30°C$.

С учетом всего сказанного можно записать

$$\delta_{11}=\frac{30\cdot 12{,}1^3}{EI_p}+2\int_0^{12{,}1}\frac{M_1^2\,dx}{EI_c}=\frac{30\cdot 12{,}1^3}{0{,}245E}+\frac{2\cdot 10^4}{0{,}282E}\int_0^{12{,}1}\frac{x^2dx}{(x+12.1)^3}=$$

$$=\frac{10^4}{E}\left[1{,}785+7{,}040\left|\ln(x+12{,}1)+\frac{24{,}2}{x+12{,}1}-\frac{12{,}1^2}{2\,(x^2+12{,}1)^2}\right|_0^{12{,}1}\right]=$$

$$=\frac{10^4}{E}(1{,}785+0{,}483)=2{,}263\cdot 10^4/E\ \text{1/м},$$

$$\Delta_{1v}=-1\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 30-12{,}1\frac{10^{-5}\cdot 30}{1{,}7}30=-6{,}82\cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$x_1=E\frac{6{,}82\cdot 10^{-2}}{2{,}263\cdot 10^4}=3{,}04\cdot 10^{-6}E=11{,}55\ \text{т}.$$

Эпюра изгибающих моментов в упругой задаче строится по формуле

$$M=x_1M_1$$

Величина изгибающего момента в ригеле

$$M=11{,}55\,(-12{,}1)=-139{,}7\ \text{тм}.$$

Расчеты на длительные воздействия. Вариант «а». Поскольку к моменту изменения температуры можно считать, что бетон старый, то согласно (4.99) [$\varphi=\varphi(\infty,\infty)$]

$$H(\infty)=\frac{1}{1+\varphi}=\frac{1}{1+1.08}=0{,}481$$

и

$$M^*(\infty)=MH(\infty)=-139{,}7\cdot 0{,}481=-67{,}8\ \text{тм}.$$

Вариант «б». В данном случае изменение температуры происходит в возрасте бетона $\tau_1=28$ суток и необходимо учитывать старение бетона. Сделаем это с помощью таблицы 3, дающей величины $H(\infty, 28)$ в зависимости от $\varphi(\infty, 28)$. Если считать, что старение бетона происходит в соответствии с формулой, записанной на стр. 13, то

$$\varphi(\infty, 28)=2\varphi=2\cdot 1{,}08=2{,}16.$$

По интерполяции находим $H(\infty, 28)=0{,}196$

$$M^*(\infty)=-139{,}7\cdot 0{,}196=-27{,}8 \text{ тм}.$$

Вариант «в». Уменьшение температуры нижней грани ригеля вызывает внутренние усилия противоположного знака (по сравнению с полученными ранее), следовательно, в момент понижения температуры в ригеле возникнет изгибающий момент $M=139{,}7$ тм. Суммарные изгибающие моменты при этом окажутся равными при разогреве по вариантам

$$\text{«а»} - M^*=-67{,}8+139{,}7=71{,}9 \text{ тм},$$

$$\text{«б»} - M^*=-27{,}8+139{,}7=111{,}9 \text{ тм}.$$

После затухания усилий, возникших при охлаждении

$$\text{«а»}\ M^*(\infty)=-67{,}8+67{,}8=0$$

$$\text{«б»}\ M^*(\infty)=-27{,}8+67{,}8=40{,}0 \text{ тм}$$

Следовательно, при варианте «б» после охлаждения и полного проявления влияния ползучести в раме остается изгибающий момент. Вызвано это тем, что затухание усилий, возникших при разогреве, происходит в стареющем бетоне, а возникших при охлаждении — в бетоне старом.

Вариант «г». Расчет выполняем применительно к формуле (4.103).

$$M^*(t)=\sum_{i=1}^{i-k}\Delta M_i H(t, \xi_i),$$

где к — количество условных мгновенных изменений температуры. Если полагать, что к=4 (см. рис. 13.), то $\Delta M_i = -139{,}7\cdot 0{,}25=-34{,}95$ тм и расчетная формула принимает вид

$$M^*(t)=-34{,}95\sum_{i=1}^{i-k}H(t,\xi_i),\quad k\leqslant 4.$$

Зависимость для подсчета коэффициентов затухания, согласно (4.98), (4.104) и рис. 15а

$$H(t, \xi_i)=\frac{1+1{,}08e^{-0{,}054(t-\xi_i)}}{1+1{,}08},$$

причем

$$\xi_i=12{,}5,\ 37{,}5,\ 62{,}5,\ 87{,}5 \text{ суток};$$

иными словами, начало отсчета времени t принимается не в момент начала повышения температуры, а смещается на 12,5 суток (рис. 13 .).

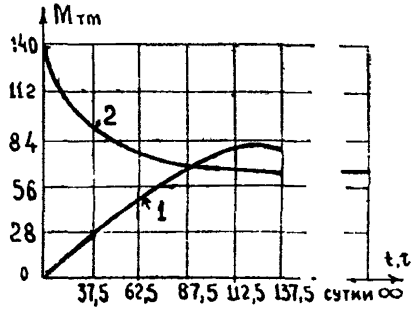


Рис.15

Результаты расчета представлены в таблице 5.

Таблица 5

Величины изгибающих моментов в раме при варианте изменения температуры «г» ($\tau_1=0$)

t сутки	37,5	62,5	87,5	112,5	137,5
$H(t)$	0,727	0,598	0,536	0,503	0,493
$-1,95H$ тм	25,95	20,90	18,73	17,56	17,22
$M^*(t)$ тм	—25,95	—45,85	—65,58	—83,14	—74,41

Соответствующая кривая (1) и также кривая, построенная в предположении мгновенного изменения температуры (2), показаны на рис. 15 . Из этих данных отчетливо видно, что экстремальный изгибающий момент, формирующийся при медленном изменении температуры $M^*(112{,}5)=83{,}14$ тм, в силу проявления деформаций ползучести бетона по абсолютной величине значительно меньше изгибающего момента, возникающего при мгновенном изменении температуры $M=-139{,}7$ тм.

* * *

Для создания представления о значимости изгибающих моментов при рассмотренных вариантах температурных режимов для ригеля рамы подсчитана, без учета влияния предварительного обжатия, величина момента трещинообразования

$$M_т = WR_р^н = \frac{0{,}245}{0{,}85}1{,}75 \cdot 177{,}5 = 89{,}6 \text{ тм}.$$

При учете влияния предварительного обжатия момент трещинообразования естественно увеличится.

Пример 4. Вычислить изгибающие моменты, вызванные осадкой средней опоры в неразрезной двухпролетной железобетонной балке, являющейся пролетным строением моста. Поперечное сечение балки изображено на рис. 16а, расчетная схема — на рис. 16б. Балка выполнена с применением бетона марки 400. Осадка начинается примерно через год после окончания бетонирования, т. е. тогда, когда бетон может считаться старым. Развитие осадки во времени, в соответствии с данными наблюдений, представлено зависимостью

$y_2(t)=10(1-e^{-0{,}013t})$см, $y_2(\infty)=10$ см, $\beta=0{,}013$ 1/сутки.

При записи этого выражения начало отсчета времени совмещено с моментом начала осадки [$t=0$, $y_2=0$].

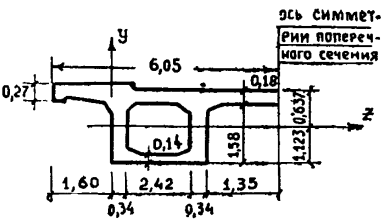


Рис. 16 а

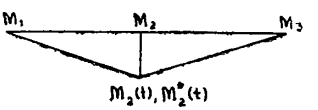


Рис 16 б

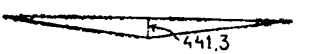


Рис. 16 в

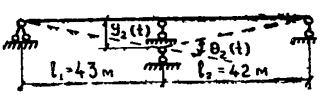


Рис. 16 д

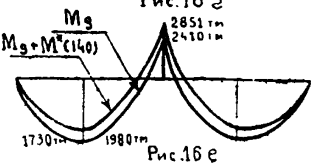


Рис. 16 е

Характеристики деформативности бетона $E=3{,}5\cdot10^5$ кг/см², $\varphi(\infty,\infty)=\varphi=1{,}4$, $\gamma=0{,}006$; характеристики поперечного сечения балки $I_z=1{,}51$ м⁴. $F=5{,}29$ м²; собственный вес одного погонного метра $q=5{,}29\cdot2{,}4=12{,}7$ т.

Предполагается, что балка работает без трещин; влияние арматуры на деформации балки не учитывается.

Изгибающие моменты подсчитываются с помощью формулы

$$M^*(t)=M(t)H_\beta(t,\tau_1),$$

соответствующей (4.101).

Решение упруго-мгновенной задачи

Для рассматриваемого случая уравнение трех моментов имеет вид (рис. 16б)

$$2M_2(t)\,(l_1+l_2) = -6EI\Theta_2(t)$$

$$\Theta_2(t) = -y_2(t)\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) = -\,y_2(t)\frac{l_1+l_2}{l_1 l_2}.$$

$$M_2(t) = \frac{3EIy_2(t)}{l_1 l_2} = \frac{3{,}35\cdot 10^5\cdot 1{,}51\cdot 0{,}1}{43\cdot 42}\left[1-e^{-0{,}013\,t}\right] = 878{,}2\left[1-e^{-0{,}013\,t}\right]\text{тм}$$

$$M_2(\infty) = 878{,}7 \text{ тм}.$$

На рис. 16в показана эпюра изгибающих моментов $M(t)$, на рис. 17 — изменение этих моментов во времени (кривая 1).

Решение с учетом влияния ползучести

При заданных характеристиках деформативности бетона $\gamma(1+\varphi)=0{,}0144$; $\beta/\gamma=2{,}166$; $1+\varphi=2{,}4$; $1+\varphi-\beta/\gamma=0{,}234$ и формула (4.102) принимает вид

$$H_\beta(t) = 1-\frac{1{,}4}{1-e^{-0{,}013\,t}}\left[\frac{1-e^{-0{,}0144t}}{2{,}4}-\frac{e^{-0{,}013\,t}-e^{-0{,}0144t}}{0{,}234}\right].$$

Таблица 6

Величины $M_2(t)$, $H_\beta(t)$ и $M_2^*(t)$, полученные при расчете неразрезной балки

t сутки	$M_2(t)$ тм	$H_\beta(t)$	$M_2^*(t)$ тм $\beta=0{,}013$	$M(\tau_1)$ тм.	$M_2^*(t)$ тм $\beta=\infty$
1	2	3	4	5	6
0	0	1	0		878,19
20	110,55	0,911	100,76		800,38
40	356,54	0,842	300,27		739,52
60	475,98	0,795	378,36		698,07
80	568,19	0,723	412,16		637,04
100	639,32	0,676	432,44	878,20	594,00
120	693,77	0,635	440,75		557,91
140	735,92	0,606	441,3		529,99
160	768,42	0,572	439,89		502,50
180	793,62	0,545	432,13		478,17
200	812,94	0,523	425,09		459,21
∞	878,20	0,417	365,94		365,94
Номера кривых на рис. 17.	1	—	2	—	3

Величины $H_\beta(t)$ для различных t приведены в таблице 6. В этой же таблице показаны $M_2^*(t)$, подсчитанные по формуле (4.101) с предварительной заменой $\sigma^*(t)$ и $\sigma(t)$ на $M^*(t)$ и $M(t)$. Для наглядного уяснения характера изменения $M_2(t)$ и $M_2^*(t)$ во времени на рис. 17 построены соответствующие кривые 1 и 2. Там же показано уменьшение $M_2^*(t)$ во времени для случая мгновенного проявления осадки опоры 2 (кривая 3) [$\beta\to\infty$, формулы (4.96) и (4.98)]. Как видно из результатов расчета при $\beta=0{,}013$, что соответствует проявлению 95% полной осадки в течение 230 дней, максимальная величина изгибающего момента над второй опорой составляет $M_2^*(140)=441{,}3$ тм, против $M_2(\infty)=878{,}2$ тм. Это уменьшение вызвано наличием ползучести бетона. Эпюра изгибающих моментов $M^*(140)$ изображена на рис. 16г.

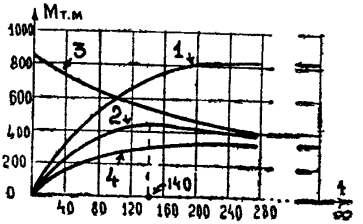


Рис. 17

Для суждения о значимости возникшего момента на рис. 16е приведена эпюра изгибающих моментов от собственного веса балки Mq и суммарная эпюра $Mq+M^*(140)$. Как видно из этих данных, при осадке опоры 2 на 10 см суммарный момент M_2 уменьшается на 448 тм, т. е. на 15,5%, пролетный — увеличится на 1980—1730=150 тм, т. е. на 14,5%. Это соответствует моменту времени максимального развития изгибающих моментов, вызванных осадкой опоры. После окончания процесса ползучести бетона опорный момент M_2^* уменьшится до 365,9 тм. Возникающие при мгновенной осадке опоры ($\beta=\infty$) изгибающий момент $M_2(0)=878{,}2$ тм тоже упадет до $M_2^*(\infty)=365{,}9$ тм (кривая 3 на рис. 17). Если же осадка опоры будет происходить со скоростью, равной скорости ползучести бетона ($\beta=\gamma$), то во времени $M_2^*(t)$ монотонно увеличивается и при $t\to\infty$ стремится к $M_2^*(\infty)=365{,}9$ тм (кривая 4 на рис. 17).

Приведенные данные показывают, что в рассматриваемых условиях величина максимального изгибающего момента за-

висит от скорости развития осадки опоры, что естественно связано с развитием деформаций ползучести. Осадка опоры с высокой скоростью приводит к возникновению большего изгибающего момента, чем осадка с меньшей скоростью.

11. ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ. КРИТЕРИИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ. РАСЧЕТ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

При изучении устойчивости формы упругих стержней и стержневых систем различают: а — потерю устойчивости 1-го рода, связанную с возможностью существования двух форм равновесия—устойчивой и неустойчивой; б — потерю устойчивости 2-го рода, связанную с возможностью неограниченного развития перемещений стержня или системы, обладающей начальными несовершенствами.

Поскольку ползучесть увеличивает деформации, а следовательно и перемещения, то естественно при изучении устойчивости стержней, выполненных из материалов, обладающих ползучестью, рассматривать потерю устойчивости второго рода. У прямолинейного стержня такая потеря устойчивости может иметь место только при наличии начальных несовершенств формы (начальная погибь) или состояния (внецентренное приложение сжимающей силы, отклонение от прямолинейной формы вследствие наличия дополнительного внешнего воздействия).

Будем рассматривать однородный и изотропный стержень с начальной погибью $y_0(z)$. Стержень выполнен из материала, обладающего линейной ползучестью, и имеет поперечное сечение, симметричное относительно одной из главных центральных осей.

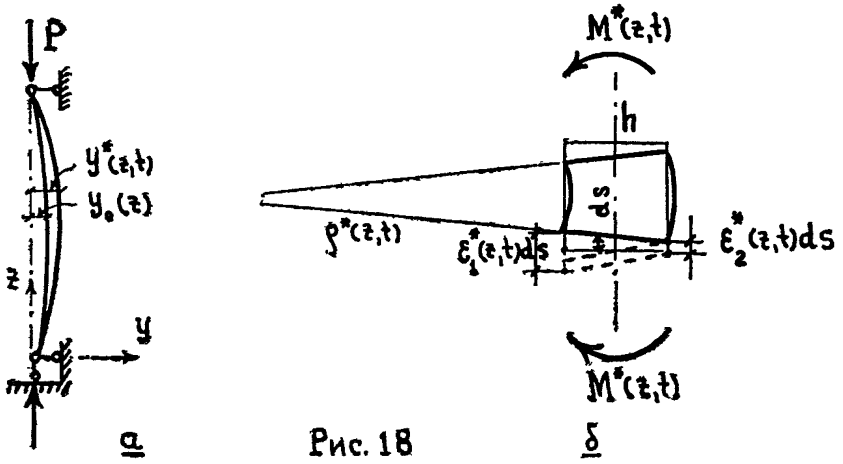
Внешние силовые воздействия заданы в виде сжимающей силы $P<P_э$. Под $P_э$, как обычно, понимается критическая сила для упругого стержня, т. е. сила, способная вызвать потерю устойчивости сразу же после окончания процесса ее формирования (последнее связано с рассмотрением статически приложенной силы). Изгиб стержня, а следовательно и потеря устойчивости, может происходить в плоскости ZOY; потеря устойчивости из этой плоскости исключена (рис. 18а).

О влиянии ползучести на устойчивость сжатого стержня см. книгу А. Р. Ржаницына (стр 8).

При записи уравнения устойчивости, в данном случае уравнения медленного движения, примем во внимание, что линейная ползучесть не влияет ни на зависимость между деформациями крайних волокон и кривизной, ни на зависимости между напряжениями и внешними нагрузками (см. положения, сформулированные в п. 7). В силу этого в условиях ползучести справедливы зависимости (рис. 18б)

$$\frac{1}{\rho^*(z,t)}=\frac{\varepsilon^*_1(z,t)-\varepsilon^*_2(z,t)}{h}=\frac{\partial^2 y^*(z,t)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 y_0(z)}{\partial z^2}, \qquad (4.105)$$

$$\sigma_1^*(z,t)=\frac{P}{F}+\frac{M^*(z,t)}{I}y_1, \quad \sigma_2^*(z,t)=\frac{P}{F}-\frac{M^*(z,t)}{I}y_2. \qquad (4.106)$$



а Рис. 18 б

Для вывода уравнения к зависимостям (4.105) и (4.106) необходимо добавить формулу, связывающую напряжения с деформациями, —

$$\varepsilon^*(t)=\frac{\sigma^*(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \qquad (4.46)$$

Исключив деформации из (4.105) с помощью последней формулы, получим

$$\frac{1}{\rho^*(z,t)}=\frac{1}{h}\left\{\frac{\sigma_1^*(z,\tau)-\sigma_2^*(z,\tau)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_1^*(z,\tau)-\sigma_2^*(z,\tau)]\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right\} \qquad (4.107)$$

и с учетом (4.106)

$$\frac{1}{\rho^*(z,t)}=\frac{1}{I}\left[\frac{M^*(z,t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}M^*(z,\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]. \qquad (4.108)$$

Заменив левую часть (4.108), согласно (4.105), придем к такому интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2}-\frac{1}{E}\left[\frac{M^*(z,t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}M^*(z,t)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]=\frac{\partial^2 y_0(z)}{\partial z^2}. \qquad (4.109)$$

При использовании этого уравнения необходимо иметь в виду особенности правила знаков кривизны и изгибающих моментов; для первых это правило связано с выбором направления координатных осей, для вторых — не связано. На рис. 18б, использованном при выводе (4.108), кривизна отрицательна, изгибающие моменты положительные. Следовательно, при рассмотрении задачи о действии сжимающей силы P, постоянной во времени, нужно принять

$$M^*(z,t)=-Py^*(z,t). \qquad (4.110)$$

Тогда из (4.109) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 y^*(z,t)}{\partial z^2}+\frac{P}{I}\left[\frac{y^*(z,t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}y^*(z,\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau=\frac{\partial^2 y_0(z)}{\partial z^2}, \qquad (4.111)$$

позволяющее разыскать величину прогиба в произвольный момент времени.

Если рассматривать стержень, шарнирно опертый по концам, и предположить, что начальная погибь описывается зависимостью

$$y_0(z)=f_0\sin\frac{\pi z}{l}, \qquad (4.112)$$

то естественно искать решение в форме

$$y^*(z,t)=f^*(t)\sin\frac{\pi z}{l}. \qquad (4.113)$$

После несложных преобразований из (4.111) можно выделить такое интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$f^*(t)-\frac{E(t)}{1-\xi(t)}\int_{\tau_1}^{t}f^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=f(t), \qquad (4.114)$$

где

$$\xi(t)=P_э(t)/P,\quad P_э=\pi^2E(t)I/l^2,\quad f(t)=f_0[1-P/P_э(t)]. \qquad (4.115)$$

Очевидно, что $P_э(t)$ и $f(t)$ являются, соответственно, критической (эйлеровой) силой и амплитудой прогиба упруго-мгновенной задачи, т. е. задачи, решенной в предположении, что нагрузка приложена в момент t, для которого определяется перемещение.

Если сжимающая сила P, как это обычно бывает, прикладывается только тогда, когда можно считать величину модуля упруго-мгновенных деформаций не зависящей от возраста материала

$$E(\tau)=E(\tau_1)=E=\text{Const}, \tag{4.116}$$

то уравнение (4.114) упрощается

$$f^*(t)-\frac{E}{1-\xi}\int_{\tau_1}^{t} f^*(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau=f, \tag{4.117}$$

причем

$$\xi=P_э/P,\quad P_э=\pi^2EI/l^2,\quad f=\frac{f_0}{1-P/P_э}. \tag{4.118}$$

При решении уравнения (4.117) уместно использовать такую аналогию. В случае (4.116) уравнение (4.51) при $\sigma(t)=\sigma(\tau_1)=\text{Const}$ принимает вид

$$\sigma^*(t)-E\int_{\tau_1}^{t}\sigma^*(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}d\tau=\sigma. \tag{4.119}$$

Очевидно, что уравнение (4.117), построенное относительно $f^*(t)$, отличается от уравнения (4.119), записанного относительно $\sigma^*(t)$, только множителем $1/(1-\xi)$, стоящим при E.

При стержне, выполненном из нестареющего материала, решение (4.119), в силу (4.97) и (4.98), записывается так:

$$\sigma(t)=\sigma\frac{1+\varphi e^{\gamma(t-\tau_1)}}{1+\varphi}. \tag{4.120}$$

Если учесть, что в ТУН $\varphi=EC_0$ и $r=\gamma(1+\varphi)$, то отмеченная аналогия позволяет записать решение уравнения (4.117) для стержня, выполненного из нестареющего материала

$$f^*(t)=f\frac{1+\frac{\varphi}{1-\xi}e^{-\gamma\left(1+\frac{\varphi}{1-\xi}\right)(t-\tau_1)}}{1+\varphi/(1-\xi)}$$

После несложных преобразований эта формула приводится к виду

$$f^*(t)=f\frac{\xi-\left[1+\varphi e^{-\gamma[\xi-(1+\varphi)](t-\tau_1)}\right](\xi-1)}{\xi-(1+\varphi)}. \qquad (4.121)$$

Скорость развития перемещений

$$f^*(t)=\frac{\gamma\varphi}{\xi-1}\,e^{-\gamma[\xi-(1+\varphi)](t-\tau_1)/\xi-1}.$$

Очевидно, что для момента приложения нагрузки $t=\tau_1$ из (4.121) следует

$$f^*(\tau_1)=f.$$

Формула (4.121) показывает, что при длительном действии нагрузки прогиб стержня, выполненного из упругого материала, обладающего ползучестью и имеющего начальную погибь, — увеличивается. Иными словами, прогиб такого стержня при длительном действии нагрузки складывается из упругого прогиба, образующегося в момент приложения нагрузки, и дополнительного прогиба, развивающегося во времени. На характер нарастания во времени амплитуды прогиба $f^*(t)$ существенное влияние оказывает знак разности $\xi-(1+\varphi)$, связанный с отношением между $P_э$ и $P(1+\varphi)$. Развитие прогибов во времени при

$$\xi>1+\varphi, \quad (1+\varphi)P<P_э \qquad (4.122)$$

имеет затухающий характер. Если

$$\xi<1+\varphi, \quad (1+\varphi)P>P_э, \qquad (4.123)$$

то при $t-\tau_1\to\infty$, $f^*(t)\to\infty$, т. е. величина прогиба неограниченно возрастает.

В случае

$$\xi=1+\varphi, \qquad P_э=(1+\varphi)P \qquad (4.124)$$

формула (4.121) приводит к неопределенности, раскрыв которую, найдем

$$f^*(t)=f[1+\gamma(t-\tau_1)], \quad \frac{df^*(t)}{dt}=f\gamma. \qquad (4.125)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.124), деформирование стержня происходит с постоянной скоростью, т. е. имеет установившийся характер. Развитие перемещений во времени в случаях (4. 122) (4.123) и (4.124) представлено на рисунке 19.

При неограниченно возрастающем времени действия сжимающей силы, согласно (4.125),

$$f^*(t)\to\infty, \qquad f^*(t)\to\text{const}. \tag{4.126}$$

Из сказанного ясно, что сила, соответствующая условию (4.124), является наименьшей из сил, вызывающих бесконечное нарастание прогиба. Условие (4.126) может служить критерием для определения понятия критической силы $P_{дл}$.

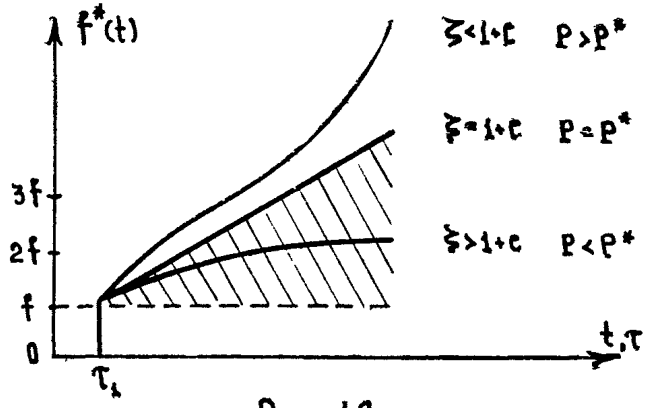


Рис. 19.

Из этого критерия следует такое определение понятия критической силы для стержня, выполненного из материала, обладающего линейной ползучестью: под критической при длительном действии нагрузки понимается минимальная сила, вызывающая неограниченное развитие прогиба *.

При таком определении критической силы $P_{дл}$ равенство (4.124) служит для вычисления ее величины, а именно

$$P_{дл}=\frac{P_э}{1+\varphi}.$$

С учетом второй формулы (4.118)

$$P_{дл}=\frac{\pi^2 E_{дл} I}{l^2}, \qquad E_д=\frac{E}{1+\varphi}.$$

---

* В этой формулировке, как и ранее, выражение «неограниченное развитие прогиба» нужно понимать как условное, поскольку при построении теории использовано выражение для кривизны (4.105), пригодное для малых деформаций, более правильно было бы говорить о тенденции к неограниченному развитию прогиба.

Из уже сказанного ясно, что величина критической силы при длительном действии нагрузки, подсчитанная согласно формуле, приведенной на предыдущей странице, служит только верхней оценкой несущей способности стержня, выполненного из линейно-деформируемого материала и обладающего начальной погибью. Поскольку начальные несовершенства практически неизбежны, то стержень, нагруженный сжимающей силой $P<P_{дл}$, будет разрушаться вследствие исчерпания несущей способности материала, если в процессе деформирования перемещения, а следовательно и изгибающие моменты, достигнут определенных величин. Таким образом, для проверки несущей способности стержня необходим расчет по деформированной схеме, выполняемый с учетом влияния начальных несовершенств и длительного действия нагрузки на величину амплитуды прогиба $f^*(\infty)$ и изгибающего момента в среднем сечении

$$M^*(t)=Pf^*(\infty).$$

Поскольку такие расчеты предпринимаются для выявления величины силы $P<P_{дл}$, разрушающей стержень, то тем самым предполагается, что деформирование происходит в зоне, соответствующей (4.122) (на рис. 19 эта зона заштрихована). Для этой зоны, в силу (4.121), справедлива зависимость

$$f^*(\infty)=f\frac{\xi-1}{\xi-(1+\varphi)},$$

из которой следует формула

$$f^*(\infty)=\frac{f_0}{1-\dfrac{P}{P_{дл}}},$$

совершенно аналогичная третьей формуле (4.118), относящейся к решению упругой задачи.

12. РАСЧЕТ СЖАТОЙ СТОЙКИ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

Пример 5. Определить путем расчета по деформированной схеме несущую способность деревянной шарнирно опертой стойки, сжатой длительно действующей силой P. Поперечное сечение стойки 15×10 см, длина $l=500$ см; в направлении высоты поперечного сечения имеется начальная погибь с амплитудой $l/600=5/6$ см; дополнительные связи препятствуют изгибу в плоскости наименьшей жесткости. Стойка выполне-

на из сосны, имеющей такие физико-механические характеристики: $R_{вр}=400$ кг/см^2, $R_c=130$ кг/см^2, $R_{сд}=100$ кг/см^2 (длительное сопротивление при сжатии), $E_{вр}=1{,}6\cdot10^5$ кг/см^2, $E_{дл}=0{,}8\cdot10^5$ кг/см^2. Считается, что несущая способность стойки соответствует длительно действующей силе P, при которой максимальные напряжения в поперечном сечении равны $R_{сд}$. В соответствии с этим условием и известной формулой внецентренного сжатия, величина P разыскивается из такой зависимости:

$$\frac{P}{F}\left(1+\frac{6f^*(\infty)}{h}\right)=R_{сд}.$$

Исключив $f^*(\infty)$ из этой зависимости с помощью зависимости $f^*(\infty)=f/1-P/P_{дл}$ получим формулу.

$$\eta=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{FR_{сд}}{P_э}},$$

где

$$\eta=\frac{P}{P_{дл}},\quad P_{дл}=\frac{\pi^2E_{дл}I}{l^2},\quad a=1+\frac{FR_{сд}}{P_{дл}}+6\frac{f_0}{h}.$$

Подставив в эти формулы заданные величины, последовательно найдем

$$F=15\cdot10=150\text{ см}^2,\quad I=\frac{15^3\cdot10}{12}=2{,}81\cdot10^3\text{ см}^4,$$

$$P_{дл}=\frac{9{,}84\cdot2{,}81\cdot10^3\cdot0{,}80\cdot10^5}{500^2}=8840\text{кг},\quad a=1+\frac{150\cdot100}{8840}+6\frac{5}{6\cdot15}=3{,}03,$$

$$\eta=0{,}740,\quad P=0{,}740\cdot8840=6540\text{ кг}.$$

Действующие СНиП П—В.4—71 рекомендуют разыскивать силу P по формулам, полученным при рассмотрении явления потери устойчивости первого рода

$$P=0{,}80\varphi R_c,\quad \varphi=\frac{3100}{\lambda^2},\quad \lambda=\frac{l}{\rho}.$$

Необходимо иметь в виду, что в данном случае через φ обозначена не характеристика ползучести, как это принято в тексте настоящего пособия, а коэффициент уменьшения напряжений в сжатом стержне, исходя из требования устойчивости.

Для данного случая эти формулы дают $P=3540$ кг. Значительное отличие этой величины от величины, полученной при расчете по деформированной схеме, связано с допущением о

постоянстве отношения E/R, использованном при выводе формулы для φ. Если принять такую точку зрения и учесть, что величина $R_{сд}$ вычислена как 0,25 $R_{вр}$, то при выполнении расчета по деформированной схеме следует исходить из величины $E_{дл}=0{,}25$, $E_{кр}=0{,}4\cdot 10^5$. В этом случае получим $P_{дл}=4420$ кг, $\eta=0{,}885$, $P=3910$ кг.

13. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ В СЛУЧАЯХ РАННЕГО ФОРМИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В БЕТОНЕ

Как уже отмечалось в п. 3, при решении задач технологического плана (экзотермический разогрев и последующее охлаждение бетонных массивов, термонапряженное состояние железобетонных элементов в процессе тепловой обработки и т. д.), т. е. в случаях, когда начало формирования напряжений в бетоне совпадает с началом твердения цементного камня, применение формулы (4.17) может привести к заметным погрешностям и приходится пользоваться более сложными зависимостями. Наиболее проработанной и обоснованной для описания меры ползучести интенсивно стареющего бетона является формула*

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)-F(t)(e^{\gamma\tau}-A_2)-\Delta(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}, \qquad (4.127)$$

где

$$\varphi(\tau)=a_1+b_1e^{-\xi_1\tau}+c_1e^{\eta_1\tau}, \quad \Delta(\tau)=a_2+b_2e^{-\xi_2\tau}+c_2e^{-\eta_2\tau},$$

$$F(t)=\Psi(t)/e^{\gamma t}-A_2, \quad \Psi(t)=\varphi(\tau)-\Delta(\tau). \qquad (4.128)$$

Входящие в эти формулы постоянные коэффициенты γ, α, ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, A_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2, подбираются из условия наиболее полного описания семейства экспериментальных кривых ползучести.

При решении поставленной задачи весьма существенно влияние старения на величину модуля упруго-мгновенных деформаций, учитываемое с помощью одной из формул

$$E(\tau)=E(1-\beta e^{-\alpha\tau}), \quad E(\tau)=E(1-\beta_1e^{-\alpha_1\tau}-\beta_2e^{-\alpha_2\tau}). \qquad (4.129)$$

В случае использования выражений (4.127)—(4.129) построение решения уравнений (4.85) в аналогической форме весьма громоздко. Более рационально применение численного решения, позволяющего разыскать величины температурных

* См книгу С В Александровского, упомянутую на стр. 8

напряжений с учетом ползучести и старения в произвольные, наперед выбранные, моменты времени и сводящего расчет к операциям линейной алгебры, успешно реализуемым с помощью ЭВМ.

Для обоснования методики численного решения удобно представить рассматриваемое интегральное уравнение в операторной форме. В математическом анализе, наряду с дифференциальными операторами (оператор Лапласса и т. д.), применяются и интегральные операторы. Левую часть, например, первого из уравнений (4.85) условно можно записать так:

$$\left[1-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]\sigma^*.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, носит название интегрального оператора Вольтерра. Как и дифференциальный оператор, интегральный оператор преобразует функцию, в данном случае σ^*, в новую функцию. В сокращенном виде оператор Вольтерра записывается так

$$1-E(t)\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=1-EK.$$

С учетом сказанного, любое из уравнений (4.85) в операторной форме имеет вид

$$(1-EK)\bar{\sigma}^*=\bar{\sigma} \qquad (4.130)$$

Рассмотрим задачу построения вектора функции, стоящей в левой части уравнения, полагая, что $\bar{\sigma}^*$ известно во всем рассматриваемом промежутке времени

$$\xrightarrow{\qquad\qquad}(1-EK)\sigma^*=\left\|\begin{array}{l}(1-EK)\sigma_0^*\\(1-EK)\sigma_1^*\\\ldots\ldots\ldots\\(1-EK)\sigma_n^*\end{array}\right\|$$

Элементами этого вектора являются величины соответствующей функции при $\tau_1=t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Для моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ будем последовательно записывать значения интегральных частей, входящих в (4.130), в виде сумм, представляемых в сокращенном виде так:

$$\int_{\tau_1}^{t_1}=\int_{\tau_1}^{t_1}$$

$$\int_{\tau_1}^{t_2}=\int_{\tau_1}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{\tau_1}^{t_n}=\int_{\tau_1}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}+\ldots+\int_{t_{n-1}}^{t_n}$$

После подстановки в эти суммы подинтегральных выражений, интегрирования по частям и применения обобщенной теоремы о среднем получим:

$$E(t_1)\int_{\tau_1}^{t_1}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_1,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma^*(t_1)-E(t_1)\{\sigma^*(\tau_1)\delta(t_1,\tau_1)+$$

$$+[\sigma^*(t_1)-\sigma^*(\tau_1)]\delta(t_1,\xi)_{\tau_1}^{t_1}\}; \qquad (4.131)$$

$$E(t_2)\int_{\tau_1}^{t_2}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_2,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma^*(t_2)-E(t_2)\{\sigma^*(\tau_1)\delta(t_2,\tau_1)+$$

$$+[\sigma^*(t_1)-\sigma^*(\tau_1)]\delta(t_2,\xi)_{\tau_1}^{t_1}+[\sigma^*(t_2)-\sigma^*(t_1)]\delta(t_2,\xi)_{t_1}^{t_2}\};$$

. . . . . .

$$E(t_n)\int_{\tau_1}^{t_n}\sigma^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_n,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\sigma^*(t_n)-E(t_n)\{\sigma^*(\tau_1)\delta(t_n,\tau_1)+$$

$$+[\sigma^*(t_1)-\sigma^*(\tau_1)]\delta(t_n,\xi)_{\tau_1}^{t_1}+[\sigma^*(t_2)-\sigma^*(t_1)]\delta(t_n,\xi)_{t_1}^{t_2}+\ldots$$

$$\ldots+[\sigma^*(t_n)-\sigma^*(t_{n-1})]\delta(t_n,\xi)_{t_{n-1}}^{t_n}\}.$$

Через $\delta(t_n,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k}$ обозначена величина полной относительной деформации, средняя в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{d\sigma^*(\tau)}{d\tau}\delta(t_n,\tau)d\tau=[\sigma^*(t_k)-\sigma^*(t_{k-1})]\delta(t_n,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k}. \qquad (4.132)$$

Зависимости (4.131) позволяют вычислить элементы вектора $\overrightarrow{(1-EK)\delta^*}$ по следующим формулам, включающим значение σ^* при $t=\tau_1$:

$$(1-EK)\sigma^*(\tau_1)=\sigma(\tau_1)$$

$$(1-EK)\sigma^*(t_1)=E(t_1)[\delta(t_1,\tau_1)-\delta(t_1,\xi)^{t_1}_{\tau_1}]\sigma^*(\tau_1)+E(t_1)\delta(t_1,\xi)^{t_1}_{\tau_1}\sigma^*(t_1).$$

$$(1-EK)\sigma^*(t_2)=E(t_2)[\delta(t_2,\tau_1)-\delta(t_2,\xi)^{t_1}_{\tau_1}]\sigma^*(\tau_1)+$$
$$+E(t_2)[\delta(t_2,\xi)^{t_1}_{\tau_1}-\delta(t_2,\xi)^{t_2}_{t_1}]\sigma^*(t_1)+E(t_2)\delta(t_2,\xi)^{t_2}_{t_1}\sigma^*(t_2),$$

. . . . . .

$$(1-EK)\sigma^*(t_n)=E(t_n)[\delta(t_n,\tau_1)-\delta(t_n,\xi)^{t_1}_{\tau_1}]-\sigma^*(\tau_1)+$$
$$+E(t_n)[\delta(t_n,\xi)^{t_1}_{\tau_1}-\delta(t_n,\xi)^{t_2}_{t_1}]\sigma^*(t_1)+$$
$$+E(t_n)[\delta(t_n,\xi)^{t_2}_{t_1}-\delta(t_n,\xi)^{t_3}_{t_2}]\sigma^*(t_2)+\ldots+E(t_n)\delta(t_n,\xi)^{t_n}_{t_{n-1}}\sigma^*(t_n)$$

Эти формулы сокращенно можно переписать так:

$$(1-EK)\sigma^*(\tau_1)=\sigma^*(\tau_1)$$
$$(1-EK)\sigma^*(t_1)=\Delta_{10}\sigma^*(\tau_1)+\Delta_{11}\sigma^*(t_1) \qquad (4.133)$$
$$(1-EK)\sigma^*(t_2)=\Delta_{20}\sigma^*(\tau_1)+\Delta_{21}\sigma^*(t_1)+\Delta_{22}\sigma^*(t_2)$$

. . . . . .

$$(1-EK)\sigma^*(t_n)=\Delta_{n0}\sigma^*(\tau_1)+\Delta_{n1}\sigma^*(t_1)+\Delta_{n2}\sigma^*(t_2)+\ldots+\Delta_{nn}\sigma^*t(n),$$

где

$$\Delta_{i0}=E(t_1)[\delta(t_i,\tau_1)-\delta(t_i,\xi)^{t_i}_{\tau_1}], \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$\Delta_{ik}=E(t_i)[\delta(t_i,\xi)^{t_k}_{t_{k-1}}-\delta(t_i,\xi)^{t_{k+1}}_{t_k}], \quad \begin{matrix} i=1,2,\ \ldots,n,\ \kappa=1,2,\ \ldots,n-1. \\ t\neq k,\ t_0=\tau_1 \end{matrix} \qquad (4.134)$$

$$\Delta_{ik}=E(t_i)\delta(t,\xi)^{t_k}_{t_{k-1}}, \quad i=k,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Индекс i показывает возраст материала, соответствующий данному элементу вектора; индекс k—связан с возрастом материала в момент приложения нагрузки при построении кривой $\delta(t_i,\xi)$.

Учитывая (4.8), а также то, что в правых частях каждой строки (4.133) имеется общий множитель $E(t_i)$, можно заметить, что Δ_{i0} и Δ_{ik} представляют увеличенные в $E(t_i)$ раз деформации, на которые следует умножить напряжения

$\sigma^*(\tau_1)$, $\sigma^*(t_1)$, $\sigma^*(t_2)$, ..., $\sigma^*(t_i)$, чтобы в сумме получить полные деформации $\varepsilon^*(t_i)$, тоже увеличенные в $E(t_i)$ раз. Из (4.133) отчетливо видно, что вектор $\overrightarrow{(1-EK)\sigma_x^*}$ может быть вычислен, как произведение треугольной матрицы на вектор

$$\overrightarrow{(1-EK)\sigma^*} = \Delta\delta\vec{\sigma}^*, \tag{4.135}$$

причем

$$\Delta\delta = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & & & \\ \Delta_{20} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \Delta_{n0} & \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \Delta_{nn} \end{Vmatrix} \quad \vec{\sigma}^* = \begin{Vmatrix} \sigma^*(\tau_1) \\ \sigma^*(t_1) \\ \sigma^*(t_2) \\ \cdots \\ \sigma^*(t_n) \end{Vmatrix} \tag{4.136}$$

Элементы этой матрицы подсчитываются по (4.134).

Представление (4.135) позволяет свести решение интегрального уравнения (4.130), а следовательно любого из уравнений (4.85), к решению такого матричного уравнения

$$\Delta\delta\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}, \tag{4.137}$$

где элементы вектора $\vec{\sigma}$ являются решениями упругомгновенной задачи $\sigma(\tau_1)$, $\sigma(t_1)$, ..., $\sigma(t_n)$. Из (4.137) следует, что

$$\vec{\sigma}_x^* = \Delta\delta^{-1}\vec{\sigma}. \tag{4.138}$$

Таким образом, определение с учетом влияния ползучести и старения напряжений σ^* в наперед заданные моменты времени τ_1, t_1, ..., t_n сводится к построению матрицы $\Delta\delta$, вектора $\vec{\sigma}$, обращению этой матрицы и вычислению вектора $\vec{\sigma}^*$ по формуле (4.138).

Заметим, что матричное уравнение (4.137) получено вполне строго без введения каких-либо дополнительных допущений. При выполнении практических расчетов заранее неизвестны величины $\delta(t_n,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k}$, средние в смысле удовлетворения равенства (4.132), и приходится принимать приближенные значения этих величин, например:

$$\delta(t_n,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k} = \delta\left(t_n, \frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right). \tag{4.139}$$

Формулу (4.138) можно применять как для непосредственного расчета вектора напряжений с учетом ползучести, так и для вычисления вектора коэффициентов затухания напряжений. В соответствии с (4.138) напряжения с учетом ползучести в момент времени t_n определяются в виде суммы.

$$\sigma^*(t_n)=\eta_{n0}\sigma(\tau_1)+\eta_{n1}\sigma(t_1)+\ldots+\eta_{nn}\sigma(t_n), \qquad (4.140)$$

в которой η_{n0}, η_{n1}, ..., η_{nn}—элементы n-й строки матрицы $\Delta\sigma^{-1}$, $\sigma(\tau_1)$ $\sigma(t_1)$, ..., $\sigma(t_n)$—элементы вектора решений $\vec{\sigma}$, равные упруго-мгновенной задачи

$$\sigma(\tau_1)=E(\tau_1)T(\tau_1),\ \sigma(t_1)=E(t_1)T(t_1)\ \ldots\ \sigma(t_n)=E(t_n)T(t_n). \quad (4.141)$$

При вычислении коэффициентов затухания напряжений, например $H(t_i, \tau_1)$, рассматриваются стационарные вынужденные деформации, т. е. случай, когда

$$T(\tau_1)=T(t_1)=T(t_2)=\ldots\ldots=T(t_n)=\text{Const} \qquad (4.142)$$

Согласно всего сказанного, например,

$$H(t, \tau_1)=\frac{\sigma^*(t)}{\sigma(\tau_1)}=\eta_{n1}+\eta_{n1}\frac{E(t_1)}{E(\tau_1)}+\ldots+\eta_{nn}\frac{E(t_n)}{E(\tau_1)}, \qquad (4.143)$$

и из (4.138) следует формула

$$\vec{H}=\Delta\delta^{-1}\,\overrightarrow{E/E_0}. \qquad (4.144)$$

Элементами вектора $\vec{H}$ являются 1, $H(t_1, \tau_1)$, $H(t_2, \tau_1)$, ..., $H(t_n, \tau_n)$, вектора $\overrightarrow{E/E_0}$ — 1, $E(t_1)/E(\tau_1)$, ..., $E(t_n)/E(\tau_1)$.

14. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ВЫНУЖДЕННЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ В ИНТЕНСИВНО СТАРЕЮЩЕМ БЕТОННОМ ТЕЛЕ

Пример 6. Определение коэффициентов затухания напряжений в интенсивно стареющем бетонном теле, вызванных стационарными тепловыми потоками, начинающими действовать при $\tau_i=3{,}5$, 7,10, 5,14, 21, 28, 44 и 60 суток; напряжения определяются в эти же моменты времени.

Характеристики деформативности бетона, в соответствии с (4.127) и (4.129)*

* Характеристики получены при испытаниях пароизолированных крупных образцов из гидротехнического бетона реального состава. См. статью Е. А. Когана и Л. Д Соловьева в сб. «Ползучесть и усадка бетона», М., 1969.

$$\varphi(\tau)=(1{,}25+6{,}60e^{-0{,}219\tau}+4{,}83e^{-0{,}01\tau})\cdot 10^{-6}\ \text{см}^2/\text{кг},$$
$$\Delta(\tau)=(0{,}6+5{,}82e^{-0{,}246\tau}+1{,}458e^{-0{,}0095\tau})\cdot 10^{-6}\ \text{см}^2/\text{кг},$$
$$A_2=0{,}85,\quad \gamma=0{,}01\ ^1/\text{сутки},\quad \alpha=5\ ^1/\text{сутки},$$
$$E(\tau)=4{,}25(1-0{,}258e^{-0{,}0063\tau}-0{,}627e^{-0{,}197\tau})\cdot 10^{-6}\ \text{кг/см}^2,$$

коэффициент поперечной деформации $\nu=1/6$.

По формулам (4.134) и (4.3) подсчитываются элементы матрицы $\Delta\delta$, имеющей в данном случае порядок 8×8

$$\Delta\delta=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0{,}604 & 2{,}161 & & & & & & \\ 0{,}669 & 0{,}770 & 1{,}931 & & & & & \\ 0{,}698 & 0{,}789 & 0{,}455 & 1{,}804 & & & & \\ 0{,}716 & 0{,}791 & 0{,}437 & 0{,}446 & 1{,}773 & & & \\ 0{,}719 & 0{,}782 & 0{,}419 & 0{,}408 & 0{,}328 & 1{,}731 & & \\ 0{,}723 & 0{,}770 & 0{,}395 & 0{,}457 & 0{,}262 & 0{,}390 & 1{,}796 & \\ 0{,}731 & 0{,}769 & 0{,}384 & 0{,}332 & 0{,}227 & 0{,}320 & 0{,}424 & 1{,}708 \end{Vmatrix}$$

Обратная матрица $\Delta\sigma^{-1}$

$$\Delta\delta^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & \\ -0{,}279 & 0{,}461 & & & & & & \\ -0{,}235 & -0{,}184 & 0{,}518 & & & & & \\ -0{,}206 & -0{,}155 & -0{,}131 & 0{,}554 & & & & \\ -0{,}170 & -0{,}121 & -0{,}094 & -0{,}193 & 0{,}564 & & & \\ -0{,}152 & -0{,}104 & -0{,}077 & -0{,}104 & -0{,}107 & 0{,}578 & & \\ -0{,}133 & -0{,}086 & -0{,}057 & -0{,}067 & -0{,}059 & -0{,}125 & 0{,}557 & \\ -0{,}126 & -0{,}079 & -0{,}050 & -0{,}053 & -0{,}040 & -0{,}077 & -0{,}138 & 0{,}585 \end{Vmatrix}$$

Ниже показан вектор $\overrightarrow{E/E_0}$, а также вектор $\vec{H}$, вычисленный по формуле (4.144).

$$\overrightarrow{E/E_0}=\begin{Vmatrix} 1 \\ 1{,}374 \\ 1{,}569 \\ 1{,}672 \\ 1{,}765 \\ 1{,}805 \\ 1{,}859 \\ 1{,}902 \end{Vmatrix} \qquad \vec{H}=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0{,}356 \\ 0{,}324 \\ 0{,}303 \\ 0{,}277 \\ 0{,}264 \\ 0{,}250 \\ 0{,}245 \end{Vmatrix}$$

Величины элементов вектора $\vec{H}$ отчетливо показывают, что в случае начала проявления вынужденных деформаций в интенсивно стареющем бетоне (при $\tau_1=3{,}5$ суткам) весьма существенное затухание релаксации напряжений происходит на протяжении первых трех с половиной суток (т. е. от 3,5 до 7 суток). Это связано с большей скоростью развития деформаций ползучести при раннем загружении бетона.

Приложение

РЕКОМЕНДАЦИИ

по расчетному определению характеристик деформативности тяжелых бетонов

1. Рекомендации составлены на основе статистической обработки экспериментальных данных, опубликованных в советской и зарубежной специальной литературе. Рекомендации позволяют вычислять предельные величины мер ползучести бетонов $C(\infty)$, величины модуля упруго-мгновенных деформаций $E(\tau)$, а также выполнять аналитические описания семейства кривых ползучести, т е. строить функции $C(t, \tau)$.

2. Величины предельных мер ползучести бетонов подсчитываются по формуле

$$C(\infty)=C_э(\infty, 28)\ K_1, K_2, \ldots, K_{11}, \qquad (1.1)$$

где $C_э(\infty, 28)$ — предельная мера ползучести эталонного (среднего) бетона; $K_1, K_2, \ldots, K_{11}$ — коэффициенты, учитывающие отличие деформативности данного бетона от эталонного, являющееся следствием влияния ряда факторов. Эти факторы подразделяются на три группы, связанные с: свойствами и соотношениями исходных материалов (группа I), условиями приготовления и хранения бетона до загружения (группа II), условиями длительных испытаний, — условиями эксплуатации (группа III). Перечень факторов, входящих в каждую группу, обозначения и величины коэффициентов K в зависимости от уровней отдельных факторов, приведены в таблице 1.1. Коэффициенты $K=1$ относятся к уровням факторов, соответствующих эталонному бетону. Предельная мера ползучести эталонного бетона принимается равной $C_э(\infty, 28)=6\cdot10^{-6}$ см²/кг.

При определении величин $C(\infty)$ по формуле (1.1), с использованием коэффициентов таблицы 1, возможное рассеивание результатов характеризуется среднеквадратичным отклонением, равным 0,15.

3. Для бетонных призматических образцов, имеющих размеры поперечных сечений, при которых $r^{-1}\leqslant 0{,}2$ см$^{-1}$, и загружаемых в возрасте $\tau_1\geqslant 28$ суток, семейство кривых ползучести может быть описано с помощью формулы

$$C(t, \tau)=C(\infty, 28)\ \Theta(\tau)\ f(t-\tau), \qquad (1,2)$$

* Рекомендации составлены автором совместно с М. М. Заставой.

в которой $C(\infty, 28)$ определяется согласно (1.1), при $\tau_1=28$ суток, т. е. при $K_8=1$,

$$\theta(\tau)=0,5+0,7e^{-0,012\tau}, \quad f(t-\tau)=1-e^{-0,006(t-\tau)}. \qquad (1.3)$$

Вторая зависимость (1,3) приемлемо описывает развитие ползучести при большой продолжительности действия нагрузки $t-\tau$. В случаях $t-\tau\leqslant 300$ суток более точные результаты можно получить при использовании формул

$$f(t-\tau)=1-0,85e^{-0,006(t-\tau)},$$

$$f(t-\tau)=1-0,28e^{-0,0018(t-\tau)}-0,51e^{0,010(t-\tau)}. \qquad (1.4)$$

При записи формул (1.4) сделано допущение о мгновенном проявлении части быстронатекающей ползучести, в силу чего $f(0)\neq 0$.

4. Влияние возраста бетона τ на величину модуля упругомгновенных деформаций $E(\tau)$ при $\tau_1\geqslant 7$ суткам может учитываться с помощью формулы

$$E(\tau)=3,84\cdot 10^5(1-0,372e^{-0,026\tau}) \text{ кг/см}^2, \qquad (1.5)$$

построенной применительно к бетону марки 300[$E(28)=3,15\cdot 10^5$ кг/см^2].

5. В случае необходимости, характеристики деформаций ползучести бетона можно определить с помощью формулы

$$\varphi(t, \tau)=C(t, \tau)\ E(\tau), \qquad (1.6)$$

где $C(t, \tau)$ и $E(\tau)$ — согласно (1.2) и (1.5).

Таблица 11

Величины корректирующих коэффициентов для определения меры ползучести тяжелых бетонов

№ группы факторов	Факторы, обозначения коэффициентов	Наименования или уровни факторов и величины корректирующих коэффициентов							
I	Вид цемента	шлакопортландцемент	низкотермичный	портландцемент	пуццолановый цемент	сульфатостойкий	глиноземистый	ТБЦ	
	K_1	1,2	1,16	1	0,9	0,88	0,76	0,7	—
	Марка цемента	200	300	400	500	600	700	800	900
	K_2	1,42	1,13	1	0,96	0,92	0,89	0,87	0,87
	Порода крупного заполнителя K_3	песчаник	гравелистый песок	базальт	гранит	известняк	кварц	—	—
		2,2	1,1	1	1	0,89	0,91	—	—
	Водо-цементное отношение В/Ц K_4	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	
		0,23	0,43	0,7	1	1,4	1,92	2,55	
	Содержание цементного теста в % K_5	10	15	20	25	30	35	40	45
		0,5	0,85	1	1,25	1,5	1,7	1,95	2,15
II	Вид уплотнения K_6	Вибрированием 1				Вручную 1,3			
	Вид тепловой обработки K_7	Естественное твердение 1		Пропаривание 0,85		Автоклавная обработка 0,54			

Таблица 1.1 (продолжение)

II	Возраст бетона при загружении τ — в сутках	1	2	3	5	7	10	14	20	28	40	60	90	180	360 и более
	K_8	2,6 / —	1,8 / —	1,4 / —	1,3 / 1,2	1,25 / 1,15	1,2 / 1,1	1,15 / 1,05	1,09 / 1,02	1 / 1	0,86 / 0,85	0,77 / 0,77	0,70 / 0,70	0,61 / 0,61	0,55 / 0,55
	R_{28}	200		300		400		500		600	700		800		1000
	K_9	1,11		1		0,92		0,86		0,85	0,85		0,85		0,85
III	Влажность среды в %	40		50		60		70		80	90		100		вода
	K_{10}	1,19		1,15		1,11		1		0,86	0,7		0,54		0,48
	Характерист. размеров поперечного сечения образца r см$^{-1}$	0		0,1		0,2		0,3		0,4	0,5		0,6		0,7
	K_{11}	0,8 / 0,82		0,85 / 0,93		1 / 1		1,15 / 1,02		1,24 / 1,03	1,3 / 1,03		1,36 / 1,03		1,41 / 1,03

Примечания: 1. Уровни факторов, соответствующие эталонному бетону, характеризуются величинами корректирующих коэффициентов $K=1$.

2. Поправка на марку бетона носит относительный характер, т. к. при анализе влияния R_{28} на $C(\infty, \tau)$ величины меры ползучести приводились к одинаковым $p_т$, В/Ц и марке цемента.

3. В числителе записаны величины K_8 и K_{11} для бетонов естественного твердения, в знаменателе — для бетонов тепловой обработки.

4. Для изолированных и массивных конструкций, а также для бетонов тепловой обработки $K_{10}=1$.

5. r см$^{-1}$ — величина, обратная гидравлическому радиусу поперечного сечения образца (в сантиметрах).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 3
2. Сведения об особенностях деформирования строительных материалов при длительном действии нагрузки 4
3. Зависимости между напряжениями и деформациями линейной теории ползучести. Разновидности теорий ползучести . . 8
4 Выражение зависимости между деформациями и напряжениями с помощью резольвенты 17
5. Напряженное и деформированное состояния однородного изотропного стержня в условиях линейной ползучести . . 20
6. Плоская задача линейной теории ползучести 23
7. Общий случай напряженного и деформированного состояния однородного тела. Системы, составленные из однородных элементов 32
8. Примеры определения перемещений 34
9. Определение напряжений и усилий, вызванных вынужденными деформациями, изменяющимися во времени по различным законам. Коэффициенты затухания напряжения . . . 37
10. Примеры расчетов стержневых статически неопределимых систем на вынужденные деформации 44
11. Влияние ползучести на устойчивость сжатого стержня. Критерии потери устойчивости в условиях ползучести Расчет по деформированной схеме 52
12. Расчет сжатой стойки по деформированной схеме . . . 58
13. Учет влияния ползучести и старения в случаях раннего формирования напряжений в бетоне 60
14. Расчет напряжений, вызванных вынужденными деформациями в интенсивно стареющем бетонном теле 65

Приложение. Рекомендации по расчетному определению характеристик деформативности тяжелых бетонов 67

Подп. к печати 15. II. 1977 г. Формат бумаги 60×84/16. Объем 4,5 п. л.
Заказ № 3718. Тираж 500.

Одесская городская типография (цех № 2)
управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Одесского облисполкома,
Ленина, 49.

gost.e-ecolog.ru