ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р 8.745 — 2011/ISO/TR 14999-2:2005

Государственная система обеспечения единства измерений

ОПТИКА И ФОТОНИКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Часть 2

Измерения и методика оценки результатов

ISO/TR 14999-2:2005
Optics and photonics — Interferometric measurement of optical elements and optical systems — Part 2: Measurement and evaluation techniques
(IDT)

Издание официальное

Москва
Стандартинформ
2014

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

Цели и принципы стандартизации в Российской Федерации установлены Федеральным законом от 27 декабря 2002 г. № 184-ФЗ «О техническом регулировании», а правила применения национальных стандартов Российской Федерации — ГОСТ Р 1.0—2004 «Стандартизация в Российской Федерации. Основные положения»

Сведения о стандарте

1 ПОДГОТОВЛЕН Федеральным государственным унитарным предприятием «Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы» (ФГУП «ВНИИМС») на основе собственного аутентичного перевода на русский язык международного документа, указанного в пункте 4

2 ВНЕСЕН ТК 53 «Основные нормы и правила по обеспечению единства измерений» Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 13 декабря 2011 г. № 1068-ст

4 Настоящий стандарт идентичен международному документу ИСО/ТО 14999-2:2005 «Оптика и фотоника. Интерферометрическое измерение оптических элементов и систем. Часть 2. Методы измерения и оценки» (ISO/TR 14999-2:2005 «Optics and photonics — Interferometric measurement of optical elements and optical systems — Part 2: Measurement and evaluation techniques»)

5 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодно издаваемом информационном указателе «Национальные стандарты», а текст изменений и поправок — в ежемесячно издаваемых указателях «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ежемесячно издаваемом указателе «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет

© Стандартинформ, 2014

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии

Содержание

1 Область применения . . . 1
2 Объекты измерений . . . 1
2.1 Поверхности . . . 1
2.2 Оптические элементы, работающие на пропускание . . . 2
2.3 Оптические системы . . . 3
2.4 Косвенное измерение характеристик оптических элементов . . . 3
3 Основные аспекты аппаратного обеспечения интерферометра и соблюдения условий выполнения эксперимента . . . 4
3.1 Общие сведения . . . 4
3.2 Принципы конструирования и влияния на качество измерений . . . 4
3.3 Условия выполнения измерений . . . 13
4 Способы оценки оптической разности хода . . . 15
4.1 Общие сведения . . . 15
4.2 Визуальный анализ интерферограмм . . . 15
4.3 Ручная обработка и измерение по интерферограммам . . . 19
4.4 Фазовые измерения с использованием временнóй несущей . . . 21
4.5 Фазовые измерения с использованием пространственной несущей . . . 25
4.6 Исключение фазовых неоднозначностей . . . 27
4.7 Регистрация волновых фронтов; системы координат, определение систем координат . . . 28
4.8 Полиномиальные и другие способы отображения волновых фронтов . . . 29
5 Протоколы испытаний и калибровочные сертификаты . . . 32
5.1 Общие сведения . . . 32
5.2 Содержание протоколов испытаний и калибровочных сертификатов . . . 32
5.3 Протоколы испытаний . . . 32
5.4 Калибровочные сертификаты . . . 32
5.5 Мнения и рекомендации . . . 33
5.6 Электронная передача результатов . . . 33
5.7 Формат протоколов и сертификатов . . . 33
5.8 Модернизация (уточнения, дополнения) протоколов испытаний и калибровочных сертификатов 33
6 Формат данных . . . 33
Приложение А (справочное) Ортогональные полиномы . . . 34
Приложение В (справочное) Ортогональные функции на «нетривиальных поверхностях» . . . 45
Библиография . . . 47

Введение

Вторая часть ИСО 14999 посвящена методам оценки качества оптических элементов и систем, имеющим отношение к производимым ими (элементами и системами) искажениям (деформациям) волнового фронта. Эти искажения (погрешности) распределены по шкале пространственных частот, однако в этой части ИСО 14999 рассматриваются деформации (искажения, погрешности) волнового фронта только в низко- и среднечастотном диапазонах спектра пространственных частот. Высокочастотный участок спектра может быть измерен только с помощью микроскопа, с использованием результатов измерений рассеянного света или вообще неоптических способов зондирования поверхности.

Подобное рассмотрение может быть выполнено применительно к любому спектральному диапазону излучения, используемого для зондирования поверхности. В ИСО 14999 для наглядности рассмотрен случай использования видимого излучения. В ряде случаев при измерениях шероховатости поверхности применяются CO_2-лазеры с длиной волны 10,6 мкм (после шлифования изделия) или эксимерные лазеры с длинами волн 193 или 248 нм при контроле микролитографической оптики. Однако в стандарте они упоминаются изредка и не детализируются. Об остальных участках оптического спектра речь в ИСО 14999 не идет.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственная система обеспечения единства измерений

ОПТИКА И ФОТОНИКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Часть 2

Измерения и методика оценки результатов

State system for ensuring the uniformity of measurements. Optics and photonics. Interferometric measurements of optical elements and systems. Part 2. Measurements and evaluation techniques

Дата введения — 2013—03—01

1 Область применения

Настоящий стандарт распространяется на фундаментальные описания объектов, измеряемых с помощью интерферометрии, аппаратные аспекты построения различных схем интерферометров и методики анализа интерферограмм, рекомендации по содержанию и формам протоколов измерений и свидетельств о калибровке (калибровочных сертификатов).

2 Объекты измерений

2.1 Поверхности

2.1.1 Зеркала: граничные поверхности оптических элементов в режиме пропускания

Главная задача интерферометрии — измерение формы поверхности. Измерения могут быть выполнены двумя способами — в отраженном или проходящем свете. Суть интерференционного измерения сводится к определению разности двух длин оптических путей $\int n \cdot d$, один из которых обычно называется опорным, а другой — измеряемым (или предметным). Результирующая волновая аберрация ΔW, обусловленная сдвигом d при измерении в отраженном свете, равна $\Delta W = 2nd$, а при измерении в проходящем свете — $\Delta W = (n_2 - n_1)d$.

2.1.2 Коэффициент отражения

Френелевское отражение от границы, разделяющей две среды с показателями преломления n_1 и n_2, описывается формулой

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2. \quad (1)$$

Для большинства марок оптических стекол значение R составляет от 4 % до 6 %; поэтому среднее значение 5 % считается вполне приемлемой оценкой.

Это отражение приводит к световым потерям распространяющегося волнового фронта на каждой граничной поверхности. С другой стороны, именно этот эффект отражения часто используется при измерениях. Для получения максимальной видности или контраста интерференционной картины оба интерферирующих пучка должны иметь примерно одинаковую интенсивность. Изменение коэффициента отражения светоделителя внутри интерферометра изменяет только количество световой энергии в интерференционной картине, но не влияет на отношение интенсивностей интерферирующих пучков, поскольку свет в обоих плечах проходит сквозь и отражается светоделителем только единожды. Если оптические пути в двух плечах интерферометра разделены (как, например, в интерферометре Маха—Цендера или Тваймана—Грина), то возможна регулировка интенсивности пучка в каждом из плечей.

Издание официальное

Основная трудность возникает в интерферометре Физо. Если опорная поверхность обладает высоким коэффициентом отражения, то в результате возникает многолучевая интерференция с узкими интерференционными полосами, как в интерферометре Фабри—Перо (ИФП). В случае необходимости получения синусоидальных интерференционных полос (например, при измерениях методом интерферометрии фазового сдвига) опорная поверхность должна обладать низким коэффициентом отражения, а между опорной и измеряемой поверхностями необходимо ввести нейтральный светофильтр, не искажающий волновое поле.

2.1.3 Шероховатость

Для выполнения интерференционных измерений шероховатость поверхности не должна превышать определенного порога, составляющего часть длины волны, а в случае измерения в режиме пропускания — разности показателей преломления граничащих сред.

2.1.4 Топология участков волнового фронта

При разрывах поверхности волнового фронта в процессе интерференционных измерений программное обеспечение, обрабатывающее интерферограммы, может давать ошибки. Они значительно возрастают при анализе статической интерферограммы, поскольку результат сильно зависит от точности определения местоположения соседних точек при установлении факта непрерывности и топологии интерференционных полос (метод скелетизации). При этом измерения методом фазового сдвига могут быть столь же неэффективны, как и поточечная обработка и оценка волновых аберраций. Подобные же трудности могут возникнуть в случае сложного рельефа поверхности.

2.1.5 Непрерывность поверхности и ее градиент

Если изменение фазы волнового фронта превышает π, то результат измерения определяется с точностью $\pm n \cdot 2\pi$, поэтому невозможно однозначно измерить произвольную форму поверхности. Получаемый результат измерений обычно корректен, если волновая аберрация между двумя пространственно разрешимыми точками $< \pi$.

Градиентом измеряемой поверхности относительно опорной поверхности считается градиент измеренной волновой аберрации, обусловливающий увеличение пространственной плотности или близость взаимного расположения интерференционных полос. Интерферограмма может быть использована для расчетов, если расстояние между полосами меньше удвоенного расстояния между пространственно разрешаемыми точками. Если это условие не может быть выполнено путем юстировки или настройки измерительной установки, то в ряде случаев потребуется использование компенсирующих оптических элементов. Затруднения, вызванные неоднозначностью получаемых результатов, могут быть устранены методами многоволновой интерферометрии.

2.1.6 Жесткость зеркал, расчеты характеристик элементов ограниченных размеров

Во время проведения измерений крепление оптического элемента (например, зеркала) должно быть не жестче, чем при нормальной его эксплуатации. Иногда бывает трудно заметить деформацию оптического элемента в процессе измерений. Для выявления нежелательного влияния крепления следует провести контрольные измерения с использованием двух различных способов фиксации.

При возникновении любых сомнений рекомендуется проводить расчеты характеристик элементов ограниченных размеров.

2.1.7 Температурная однородность поверхности зеркал

В процессе выполнения измерений объект должен иметь равномерно распределенную температуру. Неоднородность температуры может привести к деформациям по причине высокого коэффициента температурного расширения материалов и весьма малой их теплопроводности. Термостабилизация наступает в течение временного интервала от нескольких минут до нескольких часов.

2.1.8 Примеры объектов измерений

Объектами интерферометрии могут служить оптические пластины, окна, необработанные стекла, выпуклые и вогнутые зеркала, линзы, призмы и оптические системы.

2.2 Оптические элементы, работающие на пропускание

2.2.1 Одно- или двухпроходная интерферометрия

Измерения характеристик оптических элементов, работающих на пропускание, в зависимости от применяемой измерительной установки могут выполняться при одном или двух проходах светового пучка. Двухпроходный вариант приводит к удвоению чувствительности, но при этом может сказаться влияние отраженного света. Кроме того, отраженный пучок может не попасть в тот же участок поверхности оптического элемента, что и при первом проходе излучения.

2.2.2 Окна (аберрации волнового фронта при пропускании)

Отклонение формы поверхности окон от номинала обычно не играет серьезной роли. Вместе с тем неоднородность материала окна влияет на измеряемый волновой фронт прошедшего излучения. В зависимости от назначения определенная часть мощности излучения может быть отведена для оценки отклонений от допустимых значений вне зависимости от остальных волновых аберраций. Кроме того, интерферометром может быть измерена допустимая клиновидность окна. Однако обычно измерения погрешностей угловых величин выполняются другими средствами измерений.

2.2.3 Призмы (аберрации волнового фронта и угловая погрешность)

Как и применительно к окнам, волновые аберрации и погрешности углов призм могут быть получены с помощью различных средств измерений. Однако если допустимые угловые отклонения находятся в пределах измеряемых возможностей интерферометрии и участки поверхности призмы доступны для измерений, то лучше воспользоваться методами и средствами интерферометрии. В этом случае в качестве опорной поверхности применяется шаблон или же зафиксированная в пространстве вспомогательная поверхность.

2.2.4 Влияние температуры на показатель преломления

Поскольку не только сам объект деформируется при изменении температуры, но и меняется его показатель преломления, следует особенно внимательно следить за соблюдением режима температурной стабилизации объекта.

2.3 Оптические системы

2.3.1 Одно- или двухпроходная интерферометрия

Интерференционные измерения оптической системы, состоящей из отдельных элементов, аналогичны измерениям отдельных оптических элементов (см. 2.2.1). Однако важно, чтобы оптическая схема не изменялась при дальнейшей эксплуатации. Для этих измерений используется более сложная измерительная установка как в однопроходном, так и в двухпроходном варианте. При контроле систем с большой длиной оптического пути в двухпроходном варианте и при наличии значительных аберраций необходимо принимать во внимание, что путь прямого распространения света может существенно отличаться от пути его обратного распространения.

2.3.2 Наблюдения сквозь выходной зрачок

Интерференционные измерения можно проводить при наблюдении сквозь выходной зрачок оптической системы.

2.3.3 Хроматические аберрации

Если измерения характеристик оптической системы выполняются на длинах волн, отличных от их рабочих длин волн, то следует произвести расчет хроматических аберраций. В ряде случаев волновые аберрации могут быть просто скорректированы из соотношения этих длин волн. Однако для некоторых типов оптических систем это оказывается невозможным и измерения обязательно следует проводить только на рабочей длине волны.

2.4 Косвенное измерение характеристик оптических элементов

2.4.1 Измерение на отличной от рабочей длине волны

Обычно измерения характеристик окон выполняются на рабочих длинах волн, или проводится соответствующая коррекция. Однако неоднородность оптических материалов может в определенной степени сказываться на выборе диапазона длин волн. Наличие хроматических аберраций не позволяет дать универсальные рекомендации.

2.4.2 Измерение при измененной оптической длине пути

Обычно стараются, чтобы измерительная установка была настроена на рабочую оптическую длину пути. Однако в некоторых случаях приходится проводить исследования оптического элемента в схеме, отличной от рабочей. В этом случае трудно обнаружить корреляцию между измеренной волновой аберрацией и ее допустимыми значениями, т. е. невозможно оценить, как поведет себя оптический элемент в рабочих условиях.

2.4.3 Пределы допусков

Иногда соотношение результатов интерференционных измерений и допустимых отклонений не очень ясны для данного объекта измерений. В таком случае необходима полностью укомплектованная измерительная установка, а измерения должны быть выполнены в полном объеме.

3 Основные аспекты аппаратного обеспечения интерферометра и соблюдения условий выполнения эксперимента

3.1 Общие сведения

Целью настоящего раздела является ознакомление пользователя интерферометром с возможными источниками погрешностей. Известно, что два разных оператора, использующих одну и ту же аппаратуру в одной и той же лаборатории, необязательно получат идентичные результаты измерений. Опытный пользователь может получить весьма точный результат, а другой, менее опытный, — результат со значительными погрешностями. Следует помнить о том, что хорошая сходимость получаемых результатов не может служить гарантией их точности из-за влияния источников систематических погрешностей.

Важно знать эти источники, чтобы избежать погрешностей. К числу таких источников относятся, например:

- недостаточное умение в пользовании интерференционной установкой (например, искажение изображения измеряемой поверхности на мониторе, воспроизводящем изображение с камеры);
- использование неподходящих зажимов для крепления объекта — чрезмерные усилия могут привести к изгибу поверхности;
- влияние силы тяжести на контролируемый объект;
- вибрации измерительной установки, влияющие на результаты измерений фазы;
- некорректное применение аппроксимирующих полиномов для данной формы апертуры (например, в случае частичного перекрытия круглой апертуры) и сопутствующее вычитание членов в формуле погрешности, характеризующих ее наклон, неточность фокусировки, искусственность гипотезы об ортогональности;
- наличие стабильных слоев воздуха различной температуры в полости интерферометра, порождающих астигматизм;
- неустойчивость (зеркальность) или другие подобные отклонения диаграммы погрешностей калибровки по отношению к правильной ориентации, форме или увеличению измеренного поля;
- влияние разности температур между периодами калибровки прибора и выполнения измерений;
- использование объектов с неравномерным температурным распределением и обладающих заметным коэффициентом теплового расширения.

Здесь приведены всего несколько примеров, хотя источников типичных систематических погрешностей значительно больше.

Путь их минимизации сводится к умелому планированию и организации эксперимента с учетом требуемой точности результатов, достигаемой оптическими и механическими средствами.

Поэтому рекомендуется повторить эксперимент по меньшей мере трижды и сравнить результаты; при этом каждый раз необходимо демонтировать и затем заново собрать часть измерительной установки, а также произвести ее юстировку и заново настроить интерферометр. Желательно даже повторить всю процедуру на следующий день и с другим оператором.

Все условия проведения измерений и отчеты должны быть задокументированы, а окончательные результаты в упорядоченном виде занесены в память компьютера. Кроме того, все операции по обработке данных эксперимента (например, вычитание результатов наклона или использование функций Цернике высшего порядка, количество усреднений, операции фильтрации данных с целью их «сглаживания») также должны быть задокументированы наряду со сведениями об установке.

Эта информация представляет собой часть результата эксперимента и при ее отсутствии результат измерений можно считать бесполезным, не подлежащим использованию для подтверждения качества проведенных измерений.

3.2 Принципы конструирования и влияния на качество измерений

3.2.1 Общие сведения

При измерении с помощью интерферометра деформации волнового фронта обусловленной объектом, он становится частью оптической системы прибора. Помимо соблюдения условия автоколлимации следует

также обеспечить формирование изображения измеряемой поверхности на чувствительной площадке приемника излучения. К источнику излучения предъявляются жесткие требования по пространственной и временной когерентности излучения, что достигается применением лазера, по сравнению с другими источниками излучения не только обладающего очень высокой интенсивностью, но и являющегося эталонным излучателем.

Одним из важнейших следствий высокой когерентности лазерного излучения является то обстоятельство, что дефекты поверхности всех видов (загрязнения подложек, оптические клеи и покрытия, крошечные царапины, пузыри, отверстия, частицы пыли, микрошероховатость поверхности), попадающиеся на пути излучения, «накапливаются» и накладываются друг на друга в виде амплитудных и фазовых искажений волнового фронта, отчетливо видных на интерферограмме. Чем дальше дефекты расположены от плоскости изображений (светочувствительной площадки приемника), тем сильнее сказываются вносимые ими фазовые искажения из-за дифракции Френеля и изменения пространственной частоты. Очень узкий дефект, расположенный на поверхности вблизи изображения источника света, может сильно растянуться в плоскости приемника. Характеристики оптических элементов и систем, используемых в интерферометре, должны быть значительно более жесткими и строго нормированными, чем в обычных оптических приборах, и должны зависеть от местоположения элемента или системы в оптической схеме. К поверхностям, расположенным в непосредственной близости к изображению источника, где диаметр пучка лучей мал, предъявляются особенно высокие требования к качеству.

Таким образом, чем большей точности измерений необходимо достичь, тем жестче должны быть требования, предъявляемые ко всем компонентам измерительной установки.

В ИСО/ТО 14999-1 отмечалась важность получения изображения измеряемого волнового фронта в плоскости приемника излучения. Если же местоположение волнового фронта внутри прибора меняется при перестройке измерительной установки, то должна быть возможность перефокусировки приемника. В некоторых приборах обеспечена возможность изменения увеличения изображения измеряемого волнового фронта при его переносе на чувствительную площадку приемника.

В ряде приборов изменение увеличения выполняется ступенчато, а в других — плавно в пределах определенного диапазона. С другой стороны, необходимо обеспечивать хорошую оптическую корректировку волнового фронта в процессе изменения его формы с учетом сохранения требуемой оптической передаточной функции (амплитудно-фазовой характеристики) при формировании измеряемого волнового фронта в плоскости приемника излучения.

Все перечисленные требования и возможности приводят к неизбежному усложнению оптической схемы установки и увеличению числа оптических поверхностей. Задача проектировщика оптического прибора состоит в том, чтобы найти компромисс между степенью коррекции аберраций (обеспечения малых погрешностей волнового фронта в области низких пространственных частот) и уровнем шума (т. е. с теми же погрешностями, но в области высоких пространственных частот). Шум увеличивается при введении в оптический тракт очередной дополнительной поверхности, необходимой для коррекции аберраций. Поскольку сложность оптической установки возрастает по мере универсализации выполняемых ею функций, целесообразнее и легче создавать высококачественные однофункциональные приборы.

Удорожание продукции и искажения изображений на интерферограммах вынуждают производителей минимизировать количество оптических элементов и стремиться к достижению лучшей коррекции аберраций волнового фронта. Это позволяет модифицировать и агрегатировать оптические приборы. Если, например, образцовая сфера, предназначенная для испытания сферических поверхностей, не юстируется должным образом, будучи вмонтированной в оптический прибор, то измеряемый волновой фронт может содержать кому и астигматизм. К погрешностям измерений волнового фронта приводят и расфокусировка системы при калибровке и при выполнении измерений. С другой стороны, оптический прибор с высокой степенью коррекции аберраций может оказаться за счет увеличения числа поверхностей и возрастания уровня когерентного шума менее «устойчивым» при возникновении погрешностей высоких порядков.

Следовательно, при проектировании лазерного интерферометра должен быть достигнут компромисс между качеством волнового фронта с одной стороны и возможностями корректировки волнового фронта, компоновкой прибора — числом и местоположением оптических поверхностей — с другой.

3.2.2 Инструментальные погрешности интерферометра и принцип совмещенного оптического пути

Трудность выполнения прецизионных измерений может привести к ошибочному выводу о невозможности получения надежного результата измерений. Инструментальная погрешность прибора не должна превышать ожидаемой погрешности измеряемой характеристики или свойства объекта. В качестве приме-

ра положим, что измерению подлежит хорошо отполированная сферическая поверхность линзы. В состав интерферометра входят 12 поверхностей линз и 10 поверхностей плоских пластин. Следовательно, необходимо изготовить 22 поверхности, каждая из которых в 22 раза качественнее поверхности измеряемого объекта, чтобы инструментальная погрешность интерферометра в целом была практически идентичной ожидаемой погрешности результата измерений. С учетом статистического характера погрешностей соотношение инструментальной погрешности и погрешности результата измерений можно считать допустимым (4—5):1. Но даже при таком допущении невозможно изготовить столь качественный оптический прибор. Это заключение верно и вместе с тем неверно. В соответствии с основным принципом интерференции эти погрешности присущи обеим волнам (предметной и опорной) и, следовательно, компенсируют друг друга. Наиболее ярко этот принцип взаимокомпенсации погрешностей демонстрирует интерферометр Физо, где все поверхности, кроме последней, находящейся перед измеряемой поверхностью, и воздушного промежутка между ними, являются общими для обеих волн. Измеряемой интерферометром Физо величиной служит разность оптических длин путей между двумя противоположными поверхностями («распределение оптической толщины» воздушного зазора, включая распределение показателя преломления воздуха). Казалось бы, заключение неверно, однако оно верно для сверхмалых погрешностей. Обе волны не могут точно пройти по одному и тому же пути, поэтому принцип общего (совмещенного) пути с взаимной компенсацией общих погрешностей всегда нарушаем, если принимается во внимание шум в области высоких пространственных частот. Поэтому, хотя интерферометры Физо более помехоустойчивы в области низких пространственных частот, они не защищены от влияния когерентного шума.

Для контроля восприимчивости интерферометра к погрешностям за счет неточности юстировки, равно как и к влиянию аппаратного (инструментального) высокочастотного шума, полезными оказываются два следующих контрольных измерения.

a) Это простое измерение должно быть повторено при различных ориентациях интерференционных полос и при наибольшем числе полос, при котором возможно измерение данным интерферометром. Таким способом определяется способность прибора противостоять различным разъюстировкам.

Процедура такова:

1) Разместить опорное пробное стекло (оптический калибр) перед выходным окном прибора и произвести юстировку с целью получения 25 полос с наклоном.

2) Выполнить измерение и зарегистрировать результат.

3) Продолжить юстировку до полного отсутствия полос и выполнить другое измерение.

4) Вычесть полученные данные одно из другого и для результирующей разности вычислить члены полинома Цернике; помимо прочих погрешностей, сформированный наклон волнового фронта относительно оптической оси позволяет видеть аберрации волнового фронта, распространяющиеся вдоль под небольшим углом к предметному волновому фронту.

b) Это контрольное измерение выявляет инструментальный высокочастотный шум и, следовательно, возможность обнаружения небольших погрешностей, обычно распространяющихся вдоль с малой амплитудой.

Процедура такова:

1) Взять результаты разности измерений на оси и при наклоне 25 полос.

2) Вычесть первые 36 членов полинома Цернике. Оставшаяся картина поверхности отображает главным образом когерентный шум интерферометра.

3) Когда выбросы на границе измеренного участка поверхности удалены, среднеквадратичное значение служит качественной характеристикой шума прибора. Этот шум должен быть некоррелированным, если эксперимент повторяется при различных ориентациях полос, и сокращается в корень квадратный из числа измерений, но при условии, что результаты экспериментов при разных ориентациях полос усреднены и вычислена разность результатов не двух, а усредненных результатов всех выполненных экспериментов.

Наряду с двумя вышеописанными экспериментами рекомендованы два других простых способа оценки качества юстировки интерферометра.

Проверку степени коллимированности плоской волны, выходящей из оптической системы излучателя, можно осуществить с помощью толстой (> 30 мм) плоскопараллельной пластины из высококачественного стекла путем ее размещения в пучке под начальным углом 45° и проецирования поперечно сдвинутой интерферограммы на экран. Если пластина не обладает клиновидностью, то на экране не будут видны интерференционные полосы, но они будут наблюдаться, если волновой фронт деформируется интерферометром в сходящуюся или расходящуюся волну.

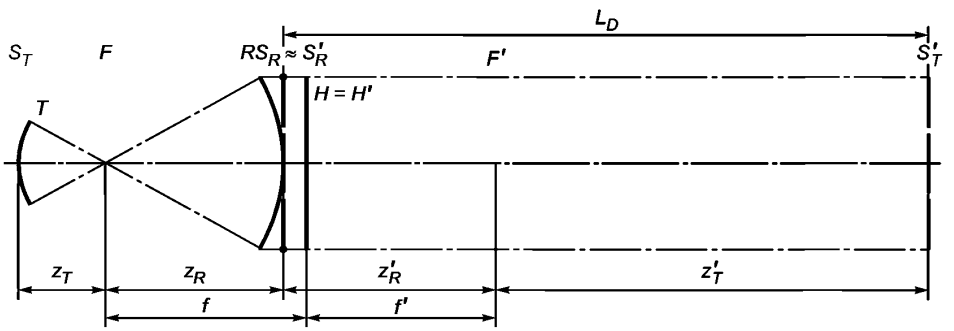
Эффективность юстировки с помощью визирного перекрестья или другого приспособления аналогичного назначения может быть проверена уголково-кубическим зеркалом или призмой из высококачественного стекла. Отраженный пучок должен точно попадать в центр юстировочного устройства. Таким же способом можно отъюстировать опорную поверхность перпендикулярно пучку. Наклоняя эту поверхность, добиваются того, чтобы полосы, образующиеся в результате интерференции опорной волны, отраженной трипель-зеркалом (три поверхности под углами 90° друг к другу), были предельно широкими.

3.2.3 Оптическая компенсация погрешностей

Полезным свойством двухлучевой интерференции является ее особенность, связанная с устранением погрешностей, порождаемых отдельными частями интерферометра. Если два интерферирующих пучка претерпевают одни и те же возмущения, проходя по своим оптическим путям, то порождаемые при этом погрешности волновых фронтов идентичны и компенсируют друг друга, что отчетливо демонстрирует разность волновых фронтов. Следовательно, два волновых фронта должны распространяться почти по одному и тому же пути, тем самым, обеспечивая «оптическую компенсацию» имеющих место погрешностей. Легче всего этого достичь в интерферометре Физо, где предметная и опорная поверхности расположены друг напротив друга без оптического элемента между ними. Эта компенсация не является полной, если имеются расхождения между оптическими длинами путей, когда один пучок наклонен по отношению к другому.

Другим источником отклонения от полной симметрии служат условия формирования изображений обеих упомянутых поверхностей на чувствительной площадке приемника излучения. В интерферометре Физо эти поверхности не могут быть одновременно изображены в плоскости приемника. Как правило, опорная поверхность больше по размерам, чем это необходимо, поэтому размеры интерферограммы зависят от апертуры, определяемой размерами испытуемой поверхности. В этом случае, когда размеры опорной поверхности превышают диаметр апертуры испытуемой поверхности, не возникает погрешностей первого порядка, порождаемых дифракцией Френеля. Тем не менее влияние остаточных погрешностей сказывается, но оно столь мало, что обычно практически неразличимо. Существует другой источник погрешности более высокого порядка при измерениях сферических поверхностей, связанный с использованием опорной пропускающей «сферы» Физо (образцовая линза).

На рисунке 1 представлена оптическая схема.



L_D — дефокусировка; T — измеряемая поверхность; R — опорная поверхность.

Рисунок 1 — Изображения S'_R и S'_T вершин опорной (референтной) S_R и измеряемой S_T поверхностей друг относительно друга

Здесь предполагается, что поверхность R (являющаяся последней в пропускающей «сфере») и поверхность T — обе вогнутые. Вершины этих поверхностей обозначены соответственно S_R и S_T. Полость Физо считается выполненной корректно, когда эти поверхности имеют общий центр кривизны. Если образцовая линза рассчитана и изготовлена правильно, то этот центр совпадает с фокусом F сферической волны, падающей на поверхность R. На рисунке 1 представлен и далее рассматривается именно этот случай. Обе поверхности изображаются пропускающей «сферой», характеризуемой главной плоскостью $H = H'$ и фокальными точками F и F', в различных сечениях на оптической оси. Размеры изображений согласованы, но аксиальное расстояние между ними L_D («расфокусировка») показано на рисунке 1. Теперь положим, что

имеют место как аберрации волнового фронта, освещающего «сферу», так и дополнительные аберрации, присущие самой «сфере». Пропускающая «сфера» должна изображать находящийся в бесконечности объект в фокальной точке F без дополнительных аберраций, равно как и измеряемую поверхность T изображать в поверхность T', а опорную поверхность R — в поверхность R', причем без добавления различных фазовых задержек в эти изображения.

Как отмечалось в ИСО/ТО 14999-1:2005, подраздел 2.11, только идеальные плоские волны не изменяют своей формы по мере распространения. Если предположить, что два волновых фронта, расположенных в сечениях S_R' и S_T', имеют одинаковую форму, например одинаковые аберрации, то очевидно, что, пройдя расстояние L_D до поверхности приемника излучения, где им предстоит интерферировать, они будут отличаться друг от друга. Этот эффект тем более заметен, чем больше разница между L_D и диаметром волнового фронта. В соответствии с правилом «большого пальца руки» радиус измеряемой поверхности должен быть не менее 10 % фокусного расстояния пропускающей «сферы», а сама «сфера» при двойном прохождении пучка не должна вносить погрешность, превышающую $\lambda/2$. При выполнении прецизионных измерений эти ограничения должны быть еще более строгими.

Важно помнить, что любая погрешность волнового фронта, уже имеющаяся в нем при прохождении через пропускающую «сферу», становится видимой благодаря эффекту дефокусировки изображения. Решение этой проблемы в интерферометре Физо сводится к предельно возможному уменьшению L_D путем применения пропускающей «сферы» с наименьшим допустимым воздушным зазором. Влияние этого источника погрешности может быть минимизировано путем калибровки.

3.2.4 Математическая компенсация погрешностей

Большим преимуществом описанной в предыдущем подразделе оптической компенсации является ее осуществление в реальном времени, т. е. в ходе эксперимента. Однако больший успех достигается при выполнении двух независимых измерений даже при условии предварительного применения оптической компенсации погрешностей (например, в интерферометрах Физо, Тваймана—Грина и др.).

Первый эксперимент проводится с применением эталонного калибра или фотошаблона («calibration master»), а второй — с измеряемой поверхностью. Результирующие распределения погрешностей заносятся в память компьютера.

Положим, что перед измерениями изменились только калибр и измеряемая поверхность, т. е. результат измерений должен продемонстрировать лишь это расхождение между ними. Все остальные погрешности должны быть исключены путем «математической компенсации инструментальных погрешностей» измерительной установки. Следовательно, калибр играет роль опорного волнового фронта, но в то же время погрешности высокого порядка типа «расфокусировки» L_D, обсужденные ранее при рассмотрении рисунка 1, также исключены благодаря высокой степени «симметрии», сравнимой с таковой для нормального опыта Физо.

Недостаток рассматриваемого метода заключается, во-первых, в том, что необходимость выполнения двух измерений приводит к увеличению случайных погрешностей в $\sqrt{2}$ раз, а во-вторых, невозможно одновременное выполнение этих двух измерений. Для того чтобы рассматриваемый способ математической компенсации погрешностей был эффективным, необходимо убедиться в том, что измерительная установка откалибрована и результаты калибровки остаются действительными.

Поэтому настоятельно рекомендуется проводить калибровку до или после выполнения измерений, а лучше всего и до, и после.

«Математическая компенсация» обладает рядом несомненных преимуществ по сравнению с «оптической компенсацией»:

- эталонный калибр и измеряемый объект могут иметь тот же радиус кривизны (например, характеристики изображения на чувствительной поверхности приемника излучения идентичны в обоих случаях);

- эталонный калибр может быть сделан значительно более толстым, чем пропускающая «сфера» обычного размера; если он более стабилен, чем измеряемый объект, то это может оказаться полезным в некоторых ситуациях, например, «изгиб» измеряемого объекта в оправе проявится в результате измерений; в других случаях имеется возможность выполнить эталонный калибр для проведения калибровки, имеющий заранее известное распределение погрешностей;

- широкие возможности предоставляются при формировании оптической схемы измерительной установки; особенно полезно опорную поверхность не делать последней в пропускающей «сфере», а ее плоский вариант располагать перед линзой; таким образом можно имитировать «наклон» в оптической схеме, причем без возникновения нескомпенсированных погрешностей. Эта особенность важна и более детально будет истолкована в дальнейшем.

3.2.5 Контраст как функция интенсивности излучения в предметном и опорном плечах: способы выравнивания интенсивности

Хорошо известна (см. ИСО/ТО 14999-1:2005, подраздел 3.2.1) формула для интенсивности $I(x)$ двухлучевой интерференции

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)\,I_2(x)}\,|\gamma|\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\Delta I_{OPD}(x)\right], \quad (2)$$

где x — вектор, описывающий пространственные координаты либо на чувствительной площадке приемника излучения, либо на измеряемой поверхности; ΔI_{OPD} — полная (суммарная) «оптическая разность хода» двух интерферирующих пучков; $|\gamma|$ — модуль комплексной степени когерентности; при использовании в качестве излучателя лазера близок к единице; $I_1(x)$, $I_2(x)$ — интенсивности интерферирующих волновых фронтов при их раздельном измерении.

Видность V полос описывается формулой

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2}\,|\gamma|. \quad (3)$$

При $|\gamma| = 1$ видность становится функцией отношения двух интенсивностей:

$$\eta = \frac{I_2}{I_1} \text{ при } I_2 \le I_1, \quad (4)$$

т. е.

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1 + \frac{I_2}{I_1}} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} \text{ для } 0 \le \eta \le 1. \quad (5)$$

На рисунке 2 изображена зависимость $V = V(\eta)$, а в таблице 1 приведены численные значения.

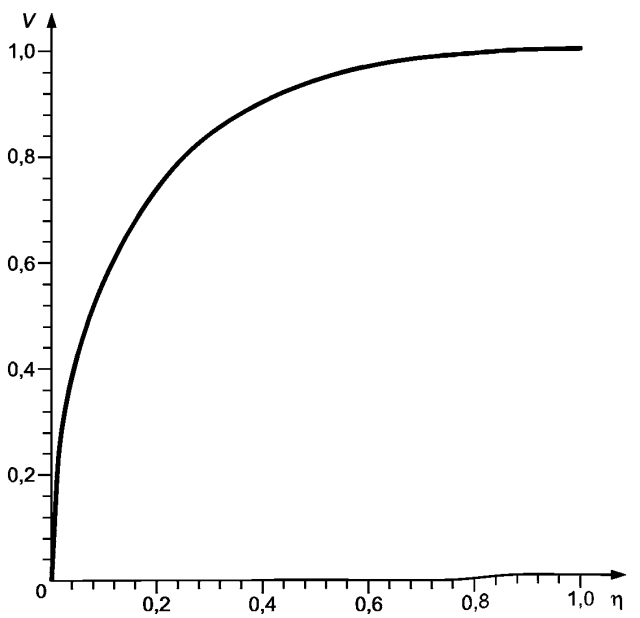


Рисунок 2 — Зависимость $V(\eta)$

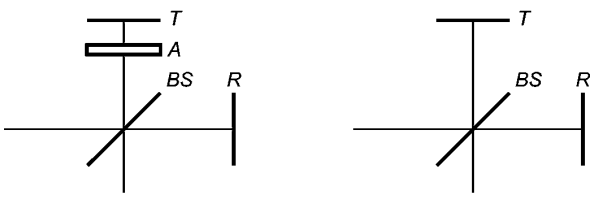
Таблица 1 — Интенсивности I_1 и I_2, их отношение η, видность V и число потерянных битов информации, когда интенсивности при двухлучевой интерференции неодинаковы

I_1	I_2	η	V	bit	I_1	I_2	η	V	bit
1	1	1,000	1,00	0,00	1	1,00	1,000	1,00	0,00
2	1	0,500	0,94	0,08	1	0,90	0,900	1,00	0,00
5	1	0,200	0,75	0,42	1	0,80	0,800	0,99	0,01
10	1	0,100	0,57	0,80	1	0,50	0,500	0,94	0,08
20	1	0,050	0,43	1,23	1	0,10	0,100	0,57	0,80
25	1	0,040	0,38	1,38	1	0,06	0,060	0,46	1,11
50	1	0,020	0,28	1,85	1	0,04	0,040	0,38	1,38
100	1	0,010	0,20	2,34	1	0,03	0,030	0,34	1,57
200	1	0,005	0,14	2,83	1	0,02	0,020	0,28	1,85
400	1	0,003	0,10	3,33	1	0,01	0,010	0,20	2,34

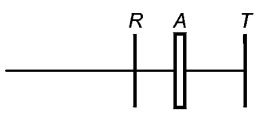
Из таблицы 1 следует, что видность уменьшается до 38 % оптимального значения, когда интенсивности различаются в 25 раз, т. е., например, когда обладающая высоким коэффициентом отражения измеряемая поверхность расположена напротив непокрытой опорной Физо-пластины. В случае, когда оценка распределения фазы выполнена средствами фазовых измерений, а интенсивности определены ПЗС-камерой, это эквивалентно деградации контраста на 1,38 бита.

Если камера в составе интерферометра 8-разрядная, что имеет место в большинстве систем, это может привести к неприемлемой потере точности измерений, в то время как применение 10- и 12-разрядных камер не приводит к потере точности. В любом случае этот эффект может быть компенсирован увеличением числа измерений с усреднением получаемых результатов, т. е. N (число измерений) = $1/V^2 = (1 + \eta)^2/4\eta$, что в данном примере означает примерно семь измерений.

Если эти меры не помогают, то необходимо выровнять интенсивности двух пучков, например, путем уменьшения коэффициента отражения поверхности с бóльшим коэффициентом отражения. Возможные способы достижения этого выравнивания обсуждаются далее для двух вариантов оптической схемы интерферометра Тваймана—Грина и для одного варианта интерферометра Физо. В схемах Тваймана—Грина предполагается, что светоделитель BS не обладает поглощением и что измеряемая T и опорная R поверхности имеют коэффициенты отражения соответственно ρ_T и ρ_R. Коэффициент поглощения ослабителя обозначен α_A, а $\eta = \rho_R/\rho_T$. Все три конфигурации представлены на рисунке 3.



a) Оптическая схема 1 b) Оптическая схема 2



c) Оптическая схема 3

Рисунок 3 — Оптические схемы с неодинаковыми коэффициентами отражения измеряемой T и референтной (опорной) R поверхностей

Коэффициенты ослабления, отражения и пропускания светоделителя описываются формулами:

a) Оптическая схема 1 $\alpha_A = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_T}} = \sqrt{\eta}$,

b) Оптическая схема 2 $\begin{cases} \rho_{BS} = \dfrac{\sqrt{\rho_T \rho_R} - \rho_R}{\rho_T - \rho_R} = \dfrac{\sqrt{\eta} - \eta}{1 - \eta} \\ \tau_{BS} = \dfrac{\rho_T - \sqrt{\rho_T \rho_R}}{\rho_T - \rho_R} = \dfrac{1 - \sqrt{\eta}}{1 - \eta} \\ \text{при } \eta = \dfrac{\rho_R}{\rho_T} \text{ и } \rho_T \geq \rho_R \end{cases}$,

c) Оптическая схема 3 $\alpha_A = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_T}} = \sqrt{\eta}$.

В оптической схеме интерферометра Физо коэффициент отражения опорной поверхности не должен быть больше 4 % во избежание влияния на интерферограмму многократных отражений.

В оптических схемах интерферометра Тваймана—Грина имеет место только двухлучевая интерференция, в то время как оптическая схема интерферометра Физо внутри полости может испытывать многолучевую интерференцию. Этим эффектом можно пренебречь при условии, что коэффициент отражения опорной поверхности (так называемого «пропускающего пробного стекла») не превышает 4 %. При сверхточных измерениях и использовании формулы для анализа результатов фазовых измерений необходимо принимать во внимание истинную форму интерференционных полос.

Плоскопараллельная пластина ослабителя в оптических схемах (рисунок 3) должна быть изготовлена из плавленого кварца или стекла BK7 с хорошим поглощающим покрытием. Из рисунка 3 следует, что ослабитель А является встроенной частью полости и влияние ее (двойное прохождение) на прошедший сквозь нее волновой фронт будет сказываться на результате измерений, порождая погрешности в дополнение к тем, что присущи измеряемой поверхности. Если возможно провести измерение с пустой «полостью», то легко определить влияние ослабителя на измеряемый волновой фронт и тем самым математически скорректировать получаемый результат.

3.2.6 Зависимость контраста от источника излучения

3.2.6.1 Общие сведения

В обобщенном виде интерферометр можно считать состоящим из:

- источника излучения;
- коллиматора;
- интерференционной части;
- фокусирующей оптической системы;
- приемника оптического излучения.

Свет, излучаемый источником, предназначен для формирования интерферограмм, а приемник — для сбора информации, т. е. их записи.

Контраст интерферограммы зависит от следующих параметров:

a) области спектра;

b) степени когерентности излучения;

c) поляризации света.

Источник излучения выбирается в соответствии с назначением прибора.

3.2.6.2 Область спектра

3.2.6.2.1 Излучатель и приемник

Пользователь обязан согласовать спектральный диапазон источника излучения со спектральной чувствительностью приемника, причем первый из них должен быть близок к максимуму второго.

Примечание — При визуальном наблюдении интерферограммы наиболее подходящими источниками считаются источник зеленого (ртутная лампа с фильтром) или желтого (натриевая спектральная лампа, которая обеспечивает близкую к нулю оптическую разность хода) света (оба соответствуют максимуму чувствительности глаза); для операторов с признаками дальтонизма не рекомендуется использовать лазерный диод с излучением красного цвета.

3.2.6.2.2 Факторы, влияющие на пропускание и отражение излучения

Свет проходит через коллиматор, интерференционную часть и фокусирующую оптическую систему, которые расположены между излучателем и приемником. При этом он отражается или проходит через оптические элементы схемы, что может привести к изменению исходного спектрального состава излучения.

Примечание — Например, позолоченное зеркало имеет слабый коэффициент отражения в сине-зеленой области спектра, отражательная способность увеличивается в желтой его части и особенно высока в красном и инфракрасном диапазонах длин волн. При покрытии серебром пик отражения приходится на желтый участок спектра, а при алюминиевом покрытии все видимое излучение отражается очень слабо.

Следовательно, выбору излучателя должно быть уделено особое внимание.

3.2.6.2.3 Требования контроля

Если исследуемый объект предназначен для использования на определенной длине волны, пользователь ограничен в выборе излучателя и приемника и должен использовать эту длину волны. В некоторых случаях возможны измерения на другой длине волны, но это должно быть отражено в протоколе измерений.

3.2.6.3 Временная когерентность

3.2.6.3.1 Прагматический подход

Пучок излучения следует рассматривать как последовательность (цуг) световых волн. Длительность цуга эквивалентна длине когерентности. Цуг распространяется от излучателя к приемнику. Достигая светоделителя, цуг делится на два цуга, один из которых проходит через опорное, а другой — через предметное плечи интерферометрической части. Пройдя каждый по своему оптическому пути, оба цуга достигают оптического элемента, используемого для реконструкции волнового цуга (в качестве такового иногда применяют светоделитель). Эти два цуга при равных оптических длинах путей обоих плечей полностью перекрываются; в случае различия длин один из цугов задерживается по отношению к другому.

Интерференционный контраст максимален при равных длинах плеч и убывает по мере увеличения их разности.

Примечание — Контраст при использовании в качестве излучателя гелий-неонового лазера уменьшается при разности оптических длин порядка нескольких сантиметров (длина когерентности обычно считается равной или близкой к длине лазера).

Контраст, наблюдаемый при использовании недорогого лазерного диода, весьма незначителен при разности хода в несколько сантиметров и периодически меняется. Это объясняется многолучевой эмиссией лазерного диода.

Контраст, наблюдаемый в свете натриевой спектральной лампы, осциллирует по мере изменения разности хода; период осцилляций соответствует разности хода 0,6 мм, что вызвано наличием натриевого дублета.

Контраст, наблюдаемый в свете ртутной спектральной лампы низкого давления, стремится к нулю, когда разность хода приближается к 1 см.

Когерентность излучения ртутной спектральной лампы высокого давления уменьшается достаточно быстро по мере возрастания температуры лампы и спадает почти мгновенно до уровня менее 1 мм. Тем не менее можно увеличить длину когерентности с помощью реостата в цепи источника ее питания, охлаждая лампу в процессе работы.

3.2.6.3.2 Влияние поверхности объекта

Пользователь должен ответить на вопрос: «Соответствует ли когерентность излучения источника шероховатости поверхности объекта?» При измерении дефектов поверхности этот вопрос, как правило, не возникает, поскольку характерный размер шероховатости (вершина — впадина) не превышает обычно нескольких микрометров. С другой стороны, важно согласовать форму волнового фронта с поверхностью объекта. Это означает, что пользователь должен адаптировать форму волнового фронта к форме объекта путем изменения разности хода в точках, меньших, чем длина когерентности источника.

Примечание — Например, наилучший способ измерения качества асферической поверхности заключается в том, чтобы придать волновому фронту радиус почти идеальной сферы, минимизирующей при своем падении на объект расстояния до его поверхности.

3.2.6.3.3 Влияние толщины объекта

При прохождении предметного пучка сквозь измеряемый объект имеют место два эффекта.

Во-первых, возникает задержка цуга при его прохождении по предметному плечу. Рассмотрим объект толщиной T с показателем преломления n. В предметное плечо вводится разность хода $2(n-1)T$. Она может быть компенсирована перемещением зеркала в опорном плече в направлении от светоделителя.

Во-вторых, объект следует рассматривать как толстую (в виде окна) плоскопараллельную пластину. Она является источником собственного изображения, формируемого зеркалом в опорном плече и перенесенного из его начального положения на расстояние $(n-1)T/n$ в направлении к светоделителю.

В итоге пользователь хочет удлинить опорное плечо, а образец сокращает длину предметного плеча. Таким образом, пользователь стремится расположить опорное зеркало в компромиссном положении, принимая во внимание когерентность излучения и видность интерференционных полос.

3.3 Условия выполнения измерений

3.3.1 Общие сведения

Идеальным считается интерферометр, правильные и точные результаты измерений которого не зависят от влияний окружающей среды: вибраций, температуры и ее градиентов, силы тяжести и распределения усилий в креплениях, удерживающих измеряемый образец. Такой идеальный интерферометр можно представить как фильтр, полностью блокирующий воздействия окружающей среды. В то же время он должен давать всю информацию о форме поверхности с высочайшей точностью в пределах субнанометровой шкалы, причем, при необходимости, в более чем миллионе измеряемых точек. Кроме того, такой идеальный прибор не должен искажать результаты измерений присущими ему инструментальными погрешностями или шумом.

Практически это невыполнимо, однако у разработчика имеется ряд возможностей ослабить влияние на интерферометр внешних воздействий. Кроме того, стабилизируя воздействующие факторы в лаборатории, можно получать результаты измерений с хорошей сходимостью, но не обязательно правильные. Поэтому значимость высококачественной (в смысле стабилизации внешних условий) лаборатории часто переоценивается. Однако при этом не следует забывать и о необходимости высокой квалификации оператора.

3.3.2 Влияние вибраций

При испытаниях и контроле оптических поверхностей (как, например, с использованием интерферометра Физо на рисунке 14 в ИСО/ТО 14999-1:2005) две интерферирующих волны отражаются от последней поверхности V и опорного зеркала M. Эти две отражающих поверхности должны быть смонтированы на опоре, обеспечивающей их стабильность. При этом зазор между ними должен сохраняться неизменным во время фазовых измерений с временной несущей, как описано в 4.4.

Основанием для выдвижения подобных требований является тот факт, что в случае дополнительного, вызванного вибрациями опоры изменения «интерферометрической полости» уравнение (8) (см. 4.4) оказывается неточным, поскольку $\varphi(t)$ содержит не только требуемый член, но и нежелательную компоненту, описывающую вибрации «полости». Этот «шумящий» член φ_N в простейшем случае описывается уравнением (6)

$$\varphi_N = 2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) a \cdot \sin \omega_N \cdot t, \tag{6}$$

где a — амплитуда вибраций, ω_N — доминирующая частота.

Если даже шум имеет сложный спектр колебаний, во многих случаях достаточно свести рассмотрение к самой низшей механической собственной частоте ω_N колебания с наиболее подходящей амплитудой a.

Задаваясь подходящим алгоритмом реконструкции фазы и частотой кадров камеры, возможно вычисление фазовых погрешностей при данной амплитуде a в предположении, что она достаточно мала (порядка $\lambda/10$) и что в основу положена линейная модель системы. Однако существуют значительные различия между алгоритмами реконструкции фазы.

К сожалению, во многих случаях не удается эффективно подавить вибрации и устранить их влияние. Тогда полезно изучить степень влияния вибраций на результаты измерений и принять меры к минимизации этих воздействий путем частичной модернизации измерительной установки. Например, возможно применение электронной стабилизации полости интерферометра с использованием высокоскоростной камеры, мощного лазера и «двухступенчатого» фазового алгоритма, а также эффективна обработка данных с использованием алгоритмов фазовых измерений, нечувствительных к нежелательным и неизвестным фазовым сдвигам между несколькими кадрами камеры.

В данном случае предпочтительны алгоритмы двух групп:

- алгоритмы измерения фазы с пространственной несущей частотой (см. 4.5);
- алгоритмы, не требующие априори известных фазовых шагов.

Последний подход особенно важен в случаях, когда уже заведомо гарантированы подходящие начальные значения фазовых шагов, впоследствии подвергающиеся уточнению путем итерационной оптимизации, т. е. когда виброизоляция достаточно совершенна, но остаточные ее влияния слишком сильны и мешают проведению качественных измерений интерферометром.

Выбираемые при этом фазовые шаги являются в данном случае дополнительными неизвестными, которые подлежат дальнейшему определению вместе со значениями фазы. Только значения фазы являются функциями пространственных координат и не зависят от времени, в то время как фазовый шаг между двумя соседними кадрами камеры является единственной зависящей от времени величиной.

При использовании интерферометра, чувствительного к фазовым изменениям, обусловленным вибрациями, важно знать, как проконтролировать степень влияния вибраций на результаты измерений. Для лучшего понимания описываемой далее процедуры полезно констатировать, что вызываемые вибрациями погрешности измерений $\Delta\varphi(x, y)$ описываются формулой

$$\Delta\varphi(x, y) = \varepsilon \cdot \sin [2\varphi(x, y)] + \text{... малые члены высших порядков}, \quad (7)$$

где ε — амплитуда синусоидальной функции, зависящая от следующих параметров:

- используемого алгоритма;
- амплитуды вибраций;
- отношения основной частоты ω_N к частоте кадров камеры ω_0, т. е. от ω_N/ω_0;
- времени экспозиции камеры.

Заключенный в квадратные скобки основной член в формуле погрешности, обусловленной вибрацией, содержит удвоенную измеряемую фазу, т. е. $2\varphi(x, y)$. Следовательно, для определения значимости ε для дальнейших вычислений или принятия решения об ее игнорировании полезна следующая процедура:

a) ввести в интерферограмму полосы путем наклона объекта;

b) компенсировать центральную часть интерферограммы и считать число «полос», остающихся после обработки результатов измерений фазового сдвига.

Если это число равно удвоенному числу ранее установленных полос в интерферограмме, то ε недостаточно мала.

3.3.3 Влияние силы тяжести и крепления образца

В большинстве практически важных случаев влияние этого эффекта успешно оценивается математически (например, [4]). Подобный анализ представляет собой довольно сложную процедуру, связанную с решением дифференциальных уравнений. Очевидно, что столь строгий математический анализ необходим лишь при получении сверхточных результатов измерений.

Несколько основных фактов и правил помогают избежать этих трудностей:

a) жесткость оптических материалов изменяется на порядок (см. таблицу 2). Оптическое стекло BK7 занимает по этому свойству среднее геометрическое место по отношению к экстремумам;

b) из механики известно, что прогиб двухопорной балки (с закрепленными концами) минимизирован, если точки опоры расположены на расстоянии одной пятой длины балки от ее концов (так называемые точки минимального отклонения отделены друг от друга расстоянием 0,55 длины балки). Это правило оказывается полезным, если горизонтально расположенная эталонная поверхность закреплена таким оптимальным способом;

c) таблица 2 демонстрирует несколько численных значений прогиба однородно нагруженных (сила тяжести) круглых пластин, закрепленных по окружности (наружному контуру). В случае A сравнению подлежат разные материалы; в случае B для одного и того же материала варьируется толщина в соответствии с известным правилом $D/d = 8$; в случае C представлена толщина, необходимая для получения при указываемом диаметре прогиба $\approx$ 33 нм.

Таблица 2 — Прогиб равномерно нагруженных круглых пластин

Случай	Материал	Диаметр *D*, мм	Толщина *d*, мм	Прогиб, нм
A	LF5	120	10	48,3
	SF59	120	10	108,6
	Saphir	120	10	10,5
	BK7	120	10	27,4
B	BK7	20	2,5	0,3
	BK7	60	7,5	3,0
	BK7	120	15	12,2
	BK7	200	25	33,9
	BK7	300	40	66,9
	BK7	400	50	135,4
C	BK7	400	100	33,9
	BK7	300	55	35,4
	BK7	200	25	33,9
	BK7	120	9	33,9
	BK7	60	2,3	32,4
	BK7	20	0,25	33,9

4 Способы оценки оптической разности хода

4.1 Общие сведения

Существуют различные способы выполнения интерференционных контрольных измерений. Здесь приводится обзор методов и источников систематических и случайных погрешностей, равно как и выполнения прецизионных измерений. Методики анализа интерферограмм делятся на две группы:

a) визуальные и ручные методики, дающие качественную информацию о форме измеряемого волнового фронта (поверхности) и предоставляющие простейшие характеристики (например, величину *PV*);

b) методики фазовых измерений, обеспечивающие получение полной количественной информации о волновом фронте (поверхности).

4.2 Визуальный анализ интерферограмм

4.2.1 Общие сведения

Интерферограмма формируется при взаимодействии измеряемого волнового фронта с опорным волновым фронтом. Форма и ориентация волнового фронта должна быть выбрана так, чтобы получать типовые, легко интерпретируемые интерферограммы (например, прямые полосы).

Сравнивая отклонения полученной интерферограммы от идеальной, можно обнаружить и классифицировать различные оптические аберрации волновых фронтов, равно как и типичные искажения как волновых фронтов, так и поверхностей. Кроме того, очень важно выделить информацию, касающуюся знака аберрации волнового фронта, т. е. либо это искажение является пиком или впадиной, либо измеряемая поверхность выпукла или вогнута относительно опорного волнового фронта. Эта информация о фазе не содержится в статической интерференционной картине или интерферограмме. Для получения ее необходимо найти и зарегистрировать местоположение нулевого порядка интерференционной картины, т. е. то место, где разность хода интерферирующих волновых фронтов равна нулю. Зная это место и внося определенным способом изменение оптической разности хода, можно предсказать знак отклонения волнового фронта (поверхности) путем наблюдения за направлением движения интерференционных полос:

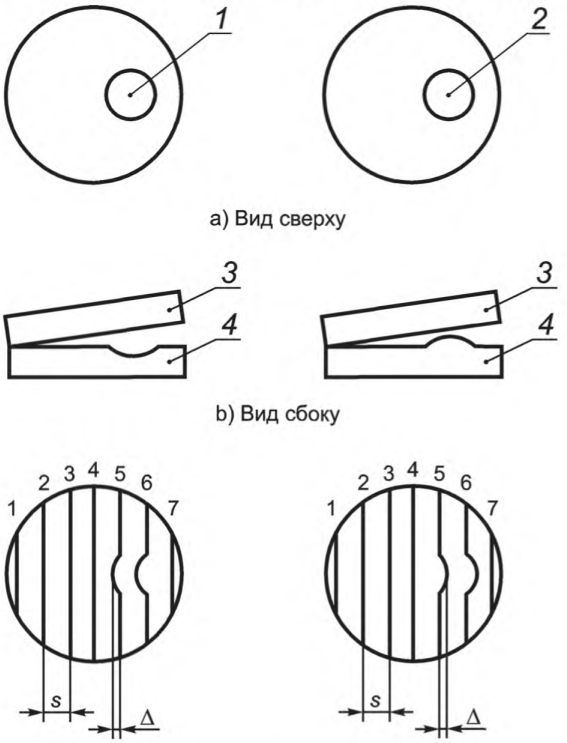
- если разность хода уменьшается, полосы движутся в направлении от местоположения нулевого порядка (для наклонных волновых фронтов — к утолщению воздушного клина);
- если разность хода увеличивается, полосы движутся в направлении к местоположению нулевого порядка (для наклонных волновых фронтов — к сужению воздушного клина);

- если угол наклона между волновыми фронтами увеличивается, расстояние между полосами уменьшается, и они сдвигаются в направлении к полосе нулевого порядка.

Возможно, интерферометр должен быть настроен так, чтобы имелся наклон, тогда разность хода содержит воздушный клин, и можно получить практически прямые полосы.

4.2.2 Пример 1 — Интерферометр Физо

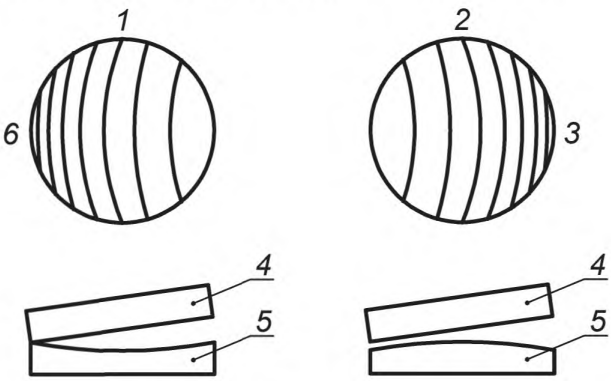
Вогнутость будет вынуждать полосы двигаться к сужению воздушного клина (рисунок 4).



1 — вогнутость; 2 — выпуклость; 3 — опорная поверхность; 4 — измеряемая поверхность; 5 – расстояние между полосами при наилучшей аппроксимации интерференционной картины; Δ — максимальное отклонение от наилучшей аппроксимации интерференционной картины

Рисунок 4 — Смещение полос в случаях вогнутости и выпуклости, соответственно

При вогнутой поверхности полосы у края интерференционной картины искривляются в сторону утолщения клина, а при выпуклой — к сужению воздушного клина (рисунок 5).



1 — вогнутая сфера; 2 — выпуклая сфера; 3 — утолщенная часть клина; 4 — опорная пластина; 5 — измеряемая поверхность; 6 — суженная часть клина

Рисунок 5 — Смещение полос в случае вогнутой и выпуклой поверхностей соответственно

На рисунке 5 полагается, что угол клина между двумя сравниваемыми волновыми фронтами больше, чем искривления волнового фронта, в результате чего не образуются замкнутые интерференционные полосы. На рисунках углы клина сильно преувеличены.

Если направление клина неизвестно, его можно определить в соответствии с таблицей 3.

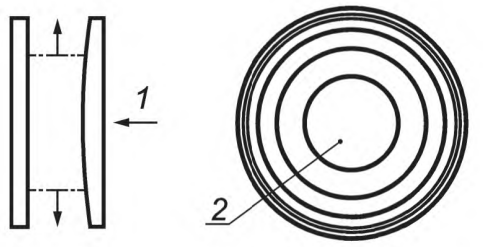
В общем случае, когда полосы не прямые и не круговые, нужно рассматривать и учитывать следующее обстоятельство. Во-первых, для случая прямых полос должно быть определено направление нулевого порядка. Во-вторых, для определения формы поверхности волнового фронта (вогнутая или выпуклая) следует уточнить направление кривизны полос относительно нулевого порядка. Это помогает обнаружению локальных искажений.

В случае сферических волновых фронтов или поверхностей знак оптической разности хода ΔI_{OPD} указывает на их выпуклость или вогнутость относительно опорного волнового фронта, что необходимо знать при изготовлении как оптических поверхностей, так и в целом оптических систем. Таблица 3 также содержит рекомендации по определению относительной кривизны измеряемой и опорной поверхности (волнового фронта) в интерферометре без воздушного клина (например, в пробном стекле). Если измеряемая поверхность более выпуклая, чем опорная поверхность, то уменьшение толщины воздушного зазора приводит к смещению полос наружу в направлении от нулевого порядка (рисунок 6, a). В этом случае радиус кривизны измеряемой поверхности больше радиуса опорной поверхности. Если, с другой стороны, измеряемая поверхность вогнута по отношению к опорной поверхности, уменьшение толщины воздушного зазора указывает на смещение полос внутрь, т. е. тоже в направлении от нулевого порядка, но радиус кривизны измеряемой поверхности при этом меньше радиуса кривизны опорной поверхности (рисунок 6, b).

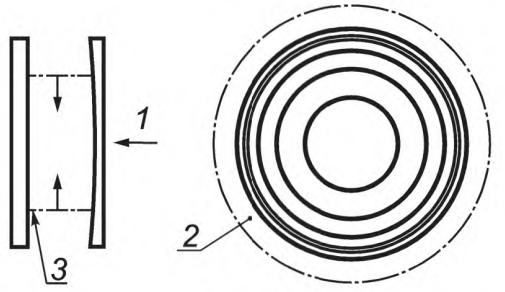
Во всех предыдущих рассуждениях «поверхность» может быть заменена «волновым фронтом».

Таблица 3 — Определение знака дефекта по интерферограмме Физо

a) Интерферограмма в полосах конечной ширины (с воздушным клином)
Направление клина известно Вогнутость: Искривление полос к сужению клина. Выпуклость: Искривление полос к расширению клина. Вогнутая сфера: Искривление полос к расширению клина. Выпуклая сфера: Искривление полос к сужению клина
Направление клина неизвестно - Нажать на край объекта для определения направления клина: - число полос увеличилось: было нажатие на тонкий конец клина; - число полос уменьшилось: было нажатие на толстый конец клина. - Нарушение однородности объекта путем сдавливания для уменьшения толщины воздушного зазора: - появились замкнутые полосы: полосы движутся к нижним зонам; - появились незамкнутые полосы: полосы движутся от верхних к нижним зонам. - Нарушение однородности объекта путем сдавливания для увеличения толщины воздушного зазора: - появились замкнутые полосы: полосы движутся к верхним точкам; - появились незамкнутые полосы: полосы движутся от нижних к верхним зонам
b) Интерферограмма на бесконечно широкой полосе (без воздушного клина), сравнение сферических поверхностей
Радиус измеряемого волнового фронта (поверхности) > радиуса опорной поверхности: - при уменьшении толщины воздушного зазора: полосы удаляются от нулевого порядка; - полосы искривляются в сторону нулевого порядка; - волновой фронт (поверхность) «выгибается» в направлении опорного фронта
Радиус измеряемого волнового фронта (поверхности) < радиуса опорной поверхности: - при уменьшении толщины воздушного зазора: полосы движутся внутрь от нулевого порядка; - полосы искривляются в сторону от нулевого порядка; - волновой фронт (поверхность) «выгибается» в направлении опорного фронта



a) Полосы движутся наружу



b) Полосы движутся внутрь

1 — надавливание; 2 — нулевой порядок; 3 — неизменное расстояние, соответствующее размеру полосы

Рисунок 6 — Движение полос

4.2.3 Пример 2 — Интерферометр Тваймана—Грина

В таблице 4 отображены несколько методик определения знака погрешности.

Таблица 4 — Определение знака дефекта на интерферограмме Тваймана—Грина

a) Надавить внутрь на опорное зеркало: 1) Замкнутые полосы: - испытуемая поверхность: полосы движутся к верхним точкам; - промежуточный эксперимент: точки движутся к тонким зонам. 2) Разомкнутые полосы: - испытуемая поверхность: полосы движутся от нижних к верхним зонам; - промежуточный эксперимент: полосы движутся от толстых к тонким зонам
b) Надавить наружу на опорное зеркало: результат, противоположный 1)
c) Надавить внутрь на опорное зеркало: результат, противоположный 1)
d) Надавить наружу на опорное зеркало: то же, что и 1)
e) Поместить нагретую проволоку в предметный пучок: 1) Замкнутые полосы: - испытуемая поверхность: вблизи проволоки полосы движутся к верхним зонам; - промежуточный эксперимент: вблизи проволоки полосы движутся к толстым зонам. 2) Разомкнутые полосы: - испытуемая поверхность: вблизи проволоки полосы движутся от верхних зон к нижним; - промежуточный эксперимент: вблизи проволоки полосы движутся от тонких к толстым зонам
f) Поместить нагретую проволоку в опорный пучок: 1) Замкнутые полосы: противоположно e1). 2) Разомкнутые полосы: противоположно e2)

Изменение расстояния без изменения относительного наклона волновых фронтов друг относительно друга практически невозможно.

При испытаниях оптических систем допускается визуальный анализ интерферограмм в простых случаях и при слабых аберрациях, что позволяет грубо оценить источники и природу этих аберраций. Несколько типичных случаев продемонстрированы на рисунках 7 и 8.



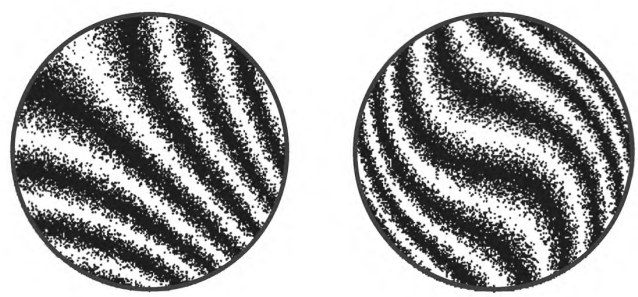
a) Простая расфокусировка b) Простой наклон c) Дефокусировка и наклон

Интерферограммы демонстрируют юстировку интерферометра

Рисунок 7 — Интерферограммы испытуемых объектов без заметных аберраций



a) Сферическая аберрация



b) Астигматизм c) Кома

Дополнительная иллюстрация зависимости интерференционных картин от аберраций

Рисунок 8 — Интерферограммы контролируемых систем при наличии небольших аберраций

4.3 Ручная обработка и измерение по интерферограммам

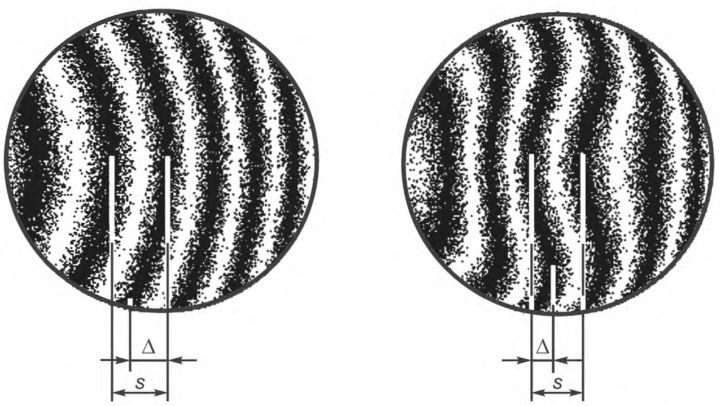
Для измерения параметров волнового фронта по интерференционной картине необходимо количественно оценить ее отклонение от максимально приближенного к идеальному изображения, характерного для некоего «идеального» волнового фронта, подлежащего измерению. В зависимости от типа такого тео-

ретического волнового фронта в интерферограмме можно обнаружить некоторые типы искажений, т. е. искривление волнового фронта, нерегулярность расположения полос и нерегулярность осевой симметрии (см. ИСО 10110-5:2007).

В идеальном случае аппроксимация должна быть выполнена методом наименьших квадратов.

Практически, по возможности, следует работать с прямыми полосами (обладающими минимальным изгибом), что облегчит ручную обработку интерферограмм и избавит от необходимости использования линейки или специального параллелограмма. Если это невозможно (например, при использовании защитных очков), то центральную полосу следует сравнивать не с прямой линией, а с ломаной, соединяющей два конца и центр центральной полосы.

Отклонение от идеальной картины, обозначаемое искажением или дефектом, обычно находится между соседними полосами идеальной интерферограммы (см. рисунок 9).



S — расстояние между интерференционными полосами практически идеальной интерферограммы;
Δ — максимальное отклонение полосы от идеальной картины

Рисунок 9 — Ручная обработка интерферограмм

Количественно отклонение оценивается отношением Δ/S. Это соответствует максимальному расстоянию между измеряемым и опорным волновыми фронтами за вычетом минимального расстояния между фронтами.

В том месте, где фронты пересекаются, минимальное расстояние между ними становится отрицательным; при вычислении расстояния между пиком и впадиной следует учитывать знак. Если один из фронтов отображает теоретически плоский фронт, то расстояние «пик—впадина» именуется «деформацией типа пик—впадина».

Искажение в единицах длины волны равно произведению Δ/S и «масштабного коэффициента интерферограммы»:

Искажение = $(\Delta/S) \cdot$ «масштабный коэффициент интерферограммы» $\cdot \lambda$.

Например, при оценке качества поверхности зеркала при нормальном падении света в интерферометрах Физо или Тваймана—Грина «масштабный коэффициент интерферограммы» равен 1/2: расстояние между полосами = $(\lambda/2)$.

В таблице 5 приведены значения «масштабного коэффициента интерферограммы» для некоторых оптических схем интерферометров.

Отклонение формы поверхности может быть описано «шагом полос интерференционной картины» — этот термин имеет отношение не к поперечному расстоянию между полосами, а к тому, что число полос, различаемых в интерференционной картине, соответствует числу полуволн, укладывающемуся в отклонение формы поверхности.

О качестве распространившегося волнового фронта сквозь оптический элемент судят по деформации плоского волнового фронта, дважды прошедшего сквозь оптический элемент. Эта деформация измеряется вдоль направления распространения, т. е. перпендикулярно плоскости волнового фронта. Единицей измерения служит шаг полос интерференционной картины при двухкратном прохождении света, равный длине волны.

Таблица 5 — Масштабные коэффициенты интерферограмм

Измеряемый параметр	Схема интерферометра	Масштабный коэффициент
Отражающая поверхность	Нормальное падение, один проход	1/2
Отражающая поверхность	Угол падения = θ, один проход	1/(2 cos θ)
Отражающая поверхность	Нормальное падение, двукратный проход	1/4
Отражающая поверхность	Угол падения = θ, двукратный проход	1/(4 cos θ)
Искажение волнового фронта после одиночного прохода света	Однократный проход	1
Искажение волнового фронта после одиночного прохода света	Двукратный проход	1/2
Искажение волнового фронта после двукратного прохода света	Однократный проход	2
Искажение волнового фронта после двукратного прохода света	Двукратный проход	1

Среднеквадратичное отклонение оценки искажения волнового фронта не может быть определено визуально или простейшим ручным способом обработки данных.

Более полное описание методик анализа интерферограмм содержится во многих книгах (в частности, в [5]).

4.4 Фазовые измерения с использованием временно́й несущей

4.4.1 Общие сведения

Основные методики аналитической оценки интерференционных картин описаны в 4.4.2—4.4.4, где используются изменения во времени опорной фазы $\varphi(t)$ для измерения фазы $\Phi(x, y)$ измеряемого волнового фронта (без учета знака и многозначности фазового сдвига). Рассмотрение ограничено наиболее общим случаем двухлучевой интерферометрии.

Интенсивность $I(x, y)$ интерференционной картины, зарегистрированной на однородной прямоугольной сетке, описывается уравнением (ИСО/ТО 14999-1:2005, подраздел 3.1.1)

$$I(x, y) = I_0(x, y) \cdot \{1 + V(x, y) \cos [\Phi(x, y) - \varphi(t)]\}, \quad (8)$$

где $I_0(x, y)$ — почти равномерная интенсивность фона; $V(x, y)$ — видность (контраст) полос; $\Phi(x, y)$ — измеряемое распределение фазы; $\varphi(t)$ — фаза опорного волнового фронта.

Поскольку в этом интерференционном уравнении содержится три неизвестных I_0, V, Φ, необходимы, как минимум, три измерения интенсивности для каждой координаты (x, y), чтобы получить распределение фазы $\Phi(x, y)$.

Предположим, что взаимная ориентация как измеряемого, так и опорного волновых фронтов такова, что $\Delta\Phi$ между соседними точками на сетке не превышает π, благодаря чему по крайней мере для каждой полосы на приемнике излучения можно зарегистрировать (согласно теореме Найквиста) два отсчета. И наоборот, при использовании ручных методов обработки не существует дополнительных требований к взаимному расположению фронтов, поскольку при количественном описании измеряемого волнового фронта погрешности, порождаемые наклоном и дефокусировкой, взаимно компенсируются.

Временная модуляция опорной фазы осуществляется путем непрерывного или скачкообразного изменения разности хода в одном из плеч интерферометра с помощью различных устройств и способов:

- движением опорного зеркала, смонтированного на пьезоэлектрическом преобразователе (PZT);
- наклоном стеклянной пластины;
- смещением дифракционной решетки;
- вращением поляризаторов в зависимости от поляризационной чувствительности интерферометрической установки;
- акусто-оптическим модулятором.

Эти способы и устройства используются для введения разности фаз между пучками либо дискретно, либо непрерывно, в зависимости от условий измерительной задачи, соответственно вводимому частотному сдвигу.

В зависимости от способа изменения фазы применяют три метода:

- гетеродинной интерферометрии ($\varphi = \omega t$);
- интерферометрии с фазовой синхронизацией ($\varphi = a \cdot \sin\omega t + \varphi_0$);
- интерферометрии фазовых шагов и фазового сдвига ($\varphi = (r - 1)\varphi_0$).

Примечание — Способ, описанный в 4.3, основан на пространственном изменении фазового сдвига $\varphi = \rho_0 + p_1 x$ соответственно углу наклона между референтным (опорным) и измеряемым волновыми фронтами, благодаря чему формируются клинообразные прямые полосы с определенной пространственной частотой. Более сложные методы, основанные на пространственном изменении фазы, описаны в 4.5.

4.4.2 Гетеродинная интерферометрия

Разность фаз $\varphi = \omega t = 2 \cdot \Delta f \cdot t$ между интерферирующими пучками варьируется с помощью непрерывного фазового модулятора (например, вращающейся радиальной дифракционной решетки, акустооптического модулятора или вращающегося двухлучепреломляющего элемента). Поскольку непрерывно возрастающая разность фаз достигает удвоенной частоты (второй гармоники), то возможно применение двухчастотного лазера. Модулированная интенсивность интерференционной картины регистрируется фотоэлектрическим устройством. Для каждой координаты (x, y) интерференционной картины (т. е. в каждой ее точке) измеряется сигнал с частотой биений Δf при условии, что его полоса достаточно велика. Поэтому фазовые измерения могут быть выполнены путем сравнения двух сигналов средствами электроники.

Один из вариантов полагает размещение неподвижного приемника излучения в точке с координатами (x_0, y_0), а второй приемник сделать сканирующим по всей интерференционной картине. В каждой точке (x, y) электронным фазометром со сканирующим приемником излучения на входе определяется разность фаз $\Delta\Phi = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0)$. Путем последующего интегрирования $\Delta\Phi$ по всей площади интерференционной картины определяется оптическая разность хода волновых фронтов без неопределенности по модулю 2π, но с определением знака.

Другая возможность использования второго приемника состоит в наблюдении интерференции пучков, не воздействующих на датчик. Фазовый сигнал этого приемника фиксируется и служит в качестве реперного в электронной фазометрии.

4.4.3 Интерферометрия с фазовой синхронизацией

Разность фаз интерферирующих пучков модулируется синусоидально введением дополнительного управляемого фазового смещения φ_0

$$\varphi(x, y, t) = a\sin\omega t + \varphi_0(x, y, t). \tag{9}$$

Простейшим способом считается применение опорного зеркала с пьезоэлектрическим приводом. Результирующая интенсивность

$$I(x, y, t) = I_0\{1 + V\cos[\Phi(x, y) - \varphi(t) - a\sin\omega t]\}, \tag{10}$$

Уравнение для $I(t)$ в данной точке интерференционной картины (x, y) содержит члены типа $\cos[a \cdot \sin(\omega t)]$ и $\sin[a \cdot \sin(\omega t)]$. Эти члены могут быть разложены в ряды по бесселевым функциям в качестве коэффициентов

$$\begin{aligned} I_{xy}(t) = I_0 + I_0 V\cos(\Phi - \varphi_0)\{J_0(a) + 2J_2(a)\cos(2\omega t) + ...\} - \\ - I_0 V\sin(\Phi - \varphi_0)\{2J_1(a)\sin(\omega t) + 2J_3(a)\sin(3\omega t) + ...\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Частотный спектр детектированного сигнала U содержит компоненты: U_0 (постоянную составляющую) и U_ω, $U_{2\omega}$ ... в виде высших гармоник частоты модуляции ω. При малых амплитудах a:

$$U_\omega = I_0 V a\sin(\omega t) \cdot \sin(\Phi - \varphi_0), \tag{12}$$

$$U_{2\omega} \approx \frac{1}{4} I_0 V a^2\cos(2\omega t) \cdot \cos(\Phi - \varphi_0). \tag{13}$$

Компонента сигнала U_ω исчезает в местах максимума и минимума интерференционной картины, в то время как компонента $U_{2\omega}$ достигает максимума:

$$U_\omega = 0; \quad U_{2\omega} = \max. \tag{14}$$

Компонента U_ω может быть выделена соответствующим электронным фильтром. С помощью фазочувствительного детектора смещение фазы φ_0 может быть сделано таким, что будет зафиксированно $U_\omega = 0$. Таким образом, изменение фазы Φ при перемещении сканирующего приемника по точкам (x, y) будет управляться и контролироваться путем изменения φ_0, в то время как электронная схема будет выполнять условие $\varphi_0 = \Phi$.

Основные особенности этой разновидности интерферометрии:

a) фазовое детектирование весьма чувствительно к фазовым сдвигам внутри всего интерферометра при выполнении сканирования; среднеквадратичное отклонение погрешности практически не превышает $\lambda/30$;

b) область санирования должна быть определена предварительно (с использованием любого типа интерактивного программного обеспечения), чтобы избежать прерывания фазового сопровождения (процесса сканирования) в случае пересечения среза апертуры интерферометра.

4.4.4 Синхронное детектирование и интерферометрия фазовых шагов (фазового сдвига)

4.4.4.1 Общие сведения

Поскольку уравнение (8) содержит три неизвестных (I_0V, Φ), необходимы, как минимум, три дискретных измерения интенсивности в каждой точке (x, y) интерференционной картины, чтобы определить фазу $\Phi(x, y)$. Для более трех измерений и получения более высокой точности следует применять аппроксимацию методом наименьших квадратов.

Разность фаз двух пучков должна быть дискретной, но предварительно фаза опорного волнового фронта сдвигается так, чтобы R измерений были равномерно распределены в пределах одного или более периодов модуляции:

$$\varphi_r = \frac{(r-1)2\pi}{R} \quad r = 1, \ldots, R. \tag{15}$$

Для решения результирующей системы уравнений уравнение (8) следует переписать в виде

$$I(x, y) = L + M\cos\varphi + N\sin\varphi, \tag{16}$$

где $L = I_0$; $M = I_0V\cos\Phi$ умножается на $\cos\varphi_r$; $N = I_0V\sin\Phi$ умножается на $\sin\varphi_r$ и суммируется в пределах одного периода, причем $\varphi_r = (r-1)\cdot\varphi_0$ и $r = 1, \ldots, R$.

Отсюда следует

$$M \approx \sum_{r=1}^{R} I_r\cos\varphi_r,\ N \approx \sum_{r=1}^{R} I_r\sin\varphi_r, \tag{17}$$

где I_r — интенсивность, относящаяся к опорной фазе φ_r. В результате получается уравнение для фазы Φ

$$\Phi(x, y) = \arctan\frac{N}{M} = \arctan\frac{\sum_r I_r(x,y)\sin\varphi_r}{\sum_r I_r(x,y)\cos\varphi_r} \text{ (по модулю } \pi). \tag{18}$$

Умножение на $\sin\varphi_r$ и $\cos\varphi_r$ соответствует операции синхронного детектирования сигнала $I_r(\varphi_r)$ косинусного типа.

В зависимости от необходимого числа фазовых шагов существуют несколько общих схем.

4.4.4.2 Четырехшаговая схема

При $\varphi_r = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ уравнение (3) упрощается

$$\Phi(x, y) = \arctan\frac{I_2(x,y) - I_4(x,y)}{I_1(x,y) - I_3(x,y)}, \tag{19}$$

а видность полос описывается выражением

$$V(x, y) = \frac{\sqrt{(I_1 - I_2)^2 + (I_1 - I_3)^2}}{2I_0}. \tag{20}$$

Значение $V(x, y)$ представляет информацию о надежности измерения $\Phi(x, y)$ в каждой точке или об отсутствии таковой. Если процедура измерений автоматизирована, то эта информация используется для определения границы апертуры интерферометра или наличия частиц пыли, интенсивность излучения в которых не зависит от $\sin\varphi_r$. Если фаза интегрируется в интервале $\Delta = \frac{1}{2}\pi$ (см. 4.4.4.3), то видность равна 0,9 V_{step} (20).

4.4.4.3 Четырехшаговая схема с непрерывным изменением фазы

Что касается времени измерений, то измерения фазы с применением шагового двигателя нельзя отнести к числу самых быстродействующих процедур, поскольку двигатель требует после каждой остановки периода стабилизации положения прикрепленного к нему зеркала. В модифицированной схеме фаза сдвигается непрерывно в пределах интервала времени интегрирования приемника.

Фазовое изменение (фазовый шаг) φ_r делится на R участков, в каждом из которых относительные фазовые изменения составляют $\Delta = 2\pi/R$. Для каждого из участков суммарная интенсивность равна

$$I_r(x, y) = \frac{1}{\Delta}\int_{\varphi_r-\Delta/2}^{\varphi_r+\Delta/2} I_0(x, y)\{1 + V\cos[\Phi(x, y) - \varphi(t)]\}d\varphi(t). \quad (21)$$

После интегрирования этого выражения зарегистрированная интенсивность равна

$$I_r(x, y) = I_0(x, y)\left\{1 + V\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\Delta\right)\cos\left[\Phi(x, y) + \varphi_r\right]\right\}, \quad (22)$$

где

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\Delta\right) = \sin\frac{1}{2}\Delta / \frac{1}{2}\Delta.$$

Таким образом, единственное отличие этого метода от ступенчатого состоит в уменьшении контраста полос. При рассмотрении различных фазовых ступенчатых схем коэффициент уменьшения контраста будет приниматься во внимание.

4.4.4.4 Трехшаговая схема

Существует несколько вариантов реализации трехшаговой схемы; в большинстве случаев применяются шаги 60°, 90° или 120°:

$$\Delta\varphi_r = 60° = \pi/3, \quad (23)$$

$$\Phi(x, y) = \arctan\left[\frac{2I_1 - 3I_2 + I_3}{\sqrt{3(I_2 - I_3)}}\right], \quad (24)$$

$$\Delta\varphi_r = 90° = \pi/2\text{: } \varphi_r = \pi/4,\ 3\pi/4 \text{ и } 5\pi/4, \quad (25)$$

$$\Phi(x, y) = \arctan\left[\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2}\right], \quad (26)$$

$$V = \frac{\sqrt{(I_1 - I_2)^2 + (I_2 - I_3)^2}}{2I_0}. \quad (27)$$

Контраст V уменьшается до уровня $0{,}9V_{step}$, если интегрирование фазы осуществляется в пределах $\Delta = \pi/2$:

$$\Delta\varphi_r = 120° = 2\pi/3;\ \varphi_r = 0{,}2\pi/3, \text{ и } 4\pi/3, \quad (28)$$

$$\Phi(x, y) = \arctan\left(\sqrt{3}\,\frac{I_3 - I_2}{2I_1 - I_2 - I_3}\right), \quad (29)$$

$$V = \frac{\sqrt{3(I_1 - I_2)^2 + (2I_1 - I_2 - I_3)^2}}{2I_0}. \quad (30)$$

Контраст V уменьшается до уровня $0{,}83V_{step}$, если интегрирование фазы осуществляется в пределах $\Delta = 2\pi/3$.

При фазовом сдвиге большем, чем $\pi/2$ или $2\pi/3$, фаза вычисляется по формуле

$$\Phi(x, y) = \arctan\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\,\frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3}\right) \quad (31)$$

при фазовых сдвигах $-\varphi$,0 и φ.

4.4.4.5 Схема Карре

При проведении точных измерений фазовый сдвиг известен (например, путем калибровки фазосдвигающего устройства). Используя четырехшаговую схему, возможно определить неизвестный, но постоянный фазовый сдвиг φ_r

$$\tan\left(\frac{\varphi_r}{2}\right) = \sqrt{\frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)}}. \quad (32)$$

Фаза Φ в каждой точке равна

$$\Phi(x, y) = \arctan\left\{\tan\left(\frac{\varphi_r}{2}\right) \cdot \frac{(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)}\right\} =$$

$$= \arctan\left\{\frac{\sqrt{[3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)]\,[(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)]}}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)}\right\}. \quad (33)$$

При измерениях по этой схеме модуляция интенсивности вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{2I_0}\sqrt{\frac{[(I_2 - I_3) + (I_1 - I_4)]^2 + [(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)]^2}{2}}. \quad (34)$$

Здесь предполагается $\varphi \approx \pi/2$. Если фазовый сдвиг выходит за пределы ± 10 %, то и оценка V также превосходит ± 10 %.

Эта схема эффективна при неизвестном фазовом сдвиге. Фаза $\Phi(x, y)$ в каждой точке интерферограммы может быть определена по модулю 2π даже в случае, если калибровка по фазе отличается в поперечном сечении пучка.

4.4.4.6 Калибровка фазосдвигающего устройства

Точность результатов, получаемых с применением описанных схем, зависит от линейности фазосдвигающего устройства. В частности, в случае применения пьезоэлектрического устройства (актуатора) (PZT) линейность во многих случаях зависит от линейности его характеристики преобразования, искажаемой гистерезисом и другими нелинейными эффектами. Следовательно, необходима калибровка фазосдвигающего устройства.

Одним из вариантов служит схема Карре (см. 4.4.4.5). Для вычисления $\Delta\varphi$ необходима совокупность четырех значений интенсивности. Контроллер фазосдвигающего устройства должен быть настроен так, чтобы усредненный фазовый сдвиг имел требуемое значение, а диапазон калибровки был достаточно узок.

При наличии пяти результатов измерений интенсивности, разделенных равными фазовыми интервалами, может быть использовано следующее уравнение [8]:

$$\varphi(x, y) = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{I_5 - I_1}{I_4 - I_2}\right)\right]. \quad (35)$$

При некоторой априорной информации о φ_1 знак косинусной функции может быть установлен однозначно. С помощью небольшого интерферометра, с щелевым источником света не в опорном плече, и при наличии отдельного приемника излучения также возможно непосредственное измерение фазы.

Измеренные значения позволяют установить скорректированные значения напряжений, подаваемых на контроллер фазосдвигающего устройства, управляемого компьютером.

4.5 Фазовые измерения с использованием пространственной несущей

4.5.1 Анализ полос с применением преобразования Фурье

Если пространственная частота ν_0 в интерференционной картине подчиняется неравенству $\nu_0 > \max|grad\,\Phi|$, то не наблюдается замкнутых полос и для получения из интерферограммы значения фазы Φ можно использовать однокоординатное преобразование Фурье [9].

Уравнение (8) может быть переписано в виде

$$I(x, y) = a(x, y) + c(x, y)e^{j\,2\pi\nu_0 x} + c^*(x, y)e^{-j\,2\pi\nu_0 x}, \quad (36)$$

где $c(x, y) = \frac{1}{2} I_0 V e^{j\,\Phi(x, y)}$.

После преобразования Фурье получаем

$$F(I) = A(\nu, y) + C(\nu - \nu_0, y) + C^* (\nu + \nu_0, y), \quad (37)$$

где A, C и C^* — комплексные фурье-амплитуды.

Путем цифровой фильтрации одна боковая полоса распределения интенсивности фильтруется и подвергается обратному быстрому преобразованию Фурье. В результате определяется величина $c(x, y)$, по которой и вычисляется фаза:

$$\Phi(x, y) = \arctan \frac{\mathrm{Im}c}{\mathrm{Re}c} \text{ (по модулю } \pi) \quad (38)$$

или с использованием комплексного логарифма

$$\log [c(x, y)] = \log \left[\frac{1}{2}(I_0 V)\right] + j\Phi(x, y).$$

Если применяется теорема дискретизации (т. е. на период косинусной функции приходится более двух элементов приемника излучения), неопределенности значений фазы легко устраняются (см. 4.4.4).

При частоте полос на интерферограмме, меньшей максимального наклона волнового фронта, т. е. $\nu_0 > \max|grad\,\Phi|$, применимо двухкоординатное быстрое преобразование Фурье [10]. Например, замкнутые полосы на интерферограмме очевидно свидетельствуют о нарушении этого условия.

При использовании двухкоординатного алгоритма уравнение для $F(I)$ выглядит следующим образом:

$$F(I) = A(\nu, \mu) + C(\nu, \mu) + C^*(\nu, \mu). \quad (39)$$

Фильтрация комплексной величины C выполняется в двух ортогональных направлениях (с различными фильтрами в ν и μ направлениях).

Неоднозначности могут быть устранены при выполнении двух независимых вычислений Φ с полосовыми фильтрами, ориентированными в ортогональных направлениях.

Второй вариант процедуры основан на оценке двух интерференционных картин, когда одна из них сдвинута на $\alpha = \pi/2$ по отношению к другой. Соответствующие коэффициенты Фурье $c_2(x, y)$ и $c_1(x, y)$ можно было использовать для вычисления

$$a(x, y) = \arctan \frac{\mathrm{Re}c_1 \cdot \mathrm{Im}c_2 - \mathrm{Im}c_1 \cdot \mathrm{Re}c_2}{\mathrm{Re}c_1 \cdot \mathrm{Re}c_2 + \mathrm{Im}c_1 \cdot \mathrm{Im}c_2}. \quad (40)$$

Считается, что α практически постоянна независимо от знака, что, в свою очередь, может быть использовано для однозначного определения $\Phi(x, y)$.

4.5.2 Пространственно-синхронный анализ интерференционных полос

В тех местах интерферограммы, где полосы расположены чаще, локальный наклон волнового фронта становится более крутым, чем средний относительный наклон между измеряемым и опорным волновыми фронтами. В этих местах коэффициенты $C(\nu, \mu)$ и $C^*(\nu, \mu)$ в уравнении для $F(I)$ частично перекрываются, и знак становится неопределимым (изменение знака вычисленной фазы). Для преодоления этого затруднения следует увеличить относительный наклон опорного волнового фронта, соответствующий наивысшей пространственной частоте ν_0.

Необходимая информация о локальной фазе $\Phi(x, y)$ измеряемого волнового фронта может быть извлечена путем умножения соответствующей уравнению (8) интерференционной картины непосредственно на косинусную и синусную функции, обладающие той же линейной зависимостью фазы, что и средняя несущая пространственная частота интерферограммы [11, 12].

Поскольку интерференционная картина обычно сканируется, возможно использование однокоординатного преобразования. Пусть f_0 является грубой оценкой средней пространственной частоты f интерференционной картины. Тогда

$$I(x, y) \cdot \cos(2\pi f_0 x) = a(x, y) \cos(2\pi f_0 x) + \frac{b}{2} \cos[\Phi(x, y) + 2\pi f_0 x] + \frac{b}{2} \cos[\Phi(x, y) - 2\pi f_0 x] \quad (41)$$

и

$$I(x, y) \cdot \sin(2\pi f_0 x) = a(x, y) \sin(2\pi f_0 x) + \frac{b}{2} \sin[\Phi(x, y) + 2\pi f_0 x] - \frac{b}{2} \sin[\Phi(x, y) - 2\pi f_0 x]. \quad (42)$$

Если разность между измеряемым волновым фронтом $\Phi(x, y)$ и опорным волновым фронтом $2\pi \cdot f_0 \cdot x$ мала, то третий член в этих выражениях отображает компоненту с низкой пространственной частотой, которая может быть отрезана фильтром нижних частот с функцией окна $H(x, y)$ (предпочтительно типа Ханнинга).

Результирующая муаровая картина в полосе низких пространственных частот записывается в виде:

$$M_1 = \frac{1}{2} I_0 V \cos[\Phi(x, y) - 2\pi(f - f_0)x], \tag{43}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} I_0 V \sin[\Phi(x, y) - 2\pi(f - f_0)x] \tag{44}$$

и

$$\Phi(x, y) - 2\pi f_0 x = \arctan \frac{M_2(x, y)}{M_1(x, y)}. \tag{45}$$

Так как окно свертки может иметь ширину нескольких полос, требуется высокая их частота, чтобы при каждом измерении фазы оно было существенно меньше размеров зрачка. При этом теряется значительно меньше фазовой информации, чем в случае, когда окно свертки перекрывает край зрачка.

Простейший способ получения квадратично увеличенной муаровой картины состоит в формировании одноразмерного опорного наклона применительно к интерферограммам, к которым может быть добавлен значительный наклон (за исключением замкнутых полос). Тогда

$$\overline{M}_1 = \sum_{i=-N}^{N} I(x_i, y) \cos(2\pi f_0 x_i) H(x - x_i, y), \tag{46}$$

$$\overline{M}_2 = \sum_{i=-N}^{N} I(x_i, y) \sin(2\pi f_0 x_i) H(x - x_i, y), \tag{47}$$

и

$$\Phi(x, y) = \arctan \frac{\overline{M}_2}{\overline{M}_1}.$$

При другом варианте высокочастотная компонента удаляется из уравнения путем фильтрации на частоте f_0. Тогда

$$F_1(x, y) = \sum_{i=-N}^{N} I(x_i, y) \cos[2\pi f_0 (x - x_i)] H(x - x_i, y) \tag{48}$$

и

$$F_2(x, y) = \sum_{i=-N}^{N} I(x_i, y) \sin[2\pi f_0 (x - x_i)] H(x - x_i, y), \tag{49}$$

что приводит к выражению для фазы

$$\Phi(x, y) = \arctan \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}. \tag{50}$$

Этот метод именуется «алгоритмом синусоидального окна».

В третьем методе используется комплексное синусоидальное окно, чтобы отфильтровать фазовую информацию одного бокового лепестка Фурье-преобразования

$$h' = h(x, y) e^{j 2\pi f_0 x}, \tag{51}$$

в результате чего получается функции, вещественная и мнимая части которой идентичны F_1 и F_2 в методе синусоидального окна. Фаза в этом случае равна арктангенсу отношения реальной и мнимой частей.

4.6 Исключение фазовых неоднозначностей

Предыдущие уравнения справедливы в пределах модуля π. Для того чтобы исключить неоднозначность при определении разности фаз интерферирующих волновых фронтов, необходимо [6]:

a) определение фазы по модулю 2π, требующее указания знаков числителя ($\sin\varphi$) и знаменателя ($\cos\varphi$) в выражении для фазы, где имеет место арктангенс этих величин. Фаза вычисляется по модулю $\pi/2$ с использованием абсолютных значений числителя и знаменателя, после чего их знаки используются в соответствии с таблицей 6 для определения фазы по модулю 2π.

В схеме Карре вместо $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ используются две других величины:

$$(I_1 - I_3) = [2I_0V \cdot \sin\varphi]\sin\Phi \tag{52}$$

и

$$(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4) = [2I_0V \cdot \cos\varphi \sin^2\varphi]\cos\Phi; \tag{53}$$

Таблица 6 — Определение фазы по модулю 2π

Числитель $\sin\varphi$	Знаменатель $\cos\varphi$	Корректировка фазы	Диапазон значений фазы
Положителен	Положителен	Φ	$O - \frac{\pi}{2}$
Положителен	Отрицателен	$\pi - \Phi$	$\frac{\pi}{2} - \pi$
Отрицателен	Отрицателен	$\pi + \Phi$	$\pi - \frac{3\pi}{2}$
Отрицателен	Положителен	$2\pi - \Phi$	$\frac{3\pi}{2} - 2\pi$
O	Отсутствует	π	π
Отрицателен	O	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Положителен	O	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$

b) в случае выполнения условия дискретизации и когда разность фаз между соседними пикселями превышает π, фазовый скачок 2π должен быть добавлен к фазе со знаком фазы предыдущего пикселя. Эта процедура должна выполняться в двух направлениях: в направлении диаметра и в перпендикулярном ему направлении.

4.7 Регистрация волновых фронтов; системы координат, определение систем координат

В интерферометрах, непосредственно измеряющих волновой фронт, его фазу или форму поверхности, регистрация информации осуществляется непосредственно ПЗС-камерой. В каждой точке с координатами x_p, y_p, соответствующей определенному пикселю на камере, где имеется модулированная фазой интенсивность интерферограммы, регистрируется фаза или «высота». Некоторые объекты заполняют всю ПЗС-матрицу, а другие — лишь ее часть. В первом случае центр матрицы, содержащей зарегистрированную информацию, считается центром или началом обрабатываемых данных. Отношение числа пикселей по вертикали к числу пикселей по горизонтали, отображающих круговые полосы, называется форматом изображения (коэффициентом формы).

Во втором случае началом координат обрабатываемых данных является центр тяжести (или центроид) базы данных. Для объектов с осевой симметрией должно быть показано, как координатная система измеряемого объекта соотносится с системой координат матрицы пикселей. У большинства ПЗС-камер пиксели имеют форму не квадрата, а прямоугольника. Однако всегда желательно, чтобы круглый объект выглядел и обрабатывался как круглый. Как центрирование, так и коэффициент формы пикселей представляются следующим образом. Суммируя x– и y– координаты каждого пикселя изображения, определяют средние значения множества всех x_p и y_p и для модулированных фазовых данных.

В результате получаются средние значения x_0 и y_0, являющиеся началом координат в системе координат пикселей. Координаты центрированных данных

$$x_{pc} = x_p - x_0 \text{ и } y_{pc} = y_p - y_0. \tag{54}$$

Именно эти центрированные данные в системе координат пикселей и подлежат статистической обработке различными методами.

Проблемным является вопрос выбора координатной системы при картировании криволинейных поверхностей на плоской поверхности ПЗС-матрицы. При плоской поверхности поперечные (*x*, *y*) координаты объекта картируются линейно на поверхности ПЗС-матрицы. Для поверхности, обладающей оптической силой (вогнутой или выгнутой), в частности обладающей высокой числовой апертурой, возникает вопрос о способе картирования поверхности на плоскость чувствительной поверхности приемника. В большинстве интерферометров измеряемый объект размещается в плоскости входного зрачка, точнее, в плоскости вершины объекта. Картирование осуществляется лучами, параллельными оптической оси, т. е. коллимированным пучком. Таким образом, координаты *x*, *y* измеряемой поверхности один к одному картируются в координатах плоскости зрачка, при этом все прогибы в направлении оптической оси подавляются. Плоскость зрачка картируется линейно в плоскость детектора так же, как и в случае плоской поверхности.

Отсюда следуют два вывода:

- плоская сетка из прямых, перпендикулярных оптической оси, расположенная между объектом и интерферометром, будет изображена в плоскости детектора с подушкообразной дисторсией;

- *x*, *y* — координаты в плоскости зрачка являются теми же *x*, *y* — координатами, что используются при анализе всех данных о фазе, т. е. поставляют информацию обо всех высотных или топографических отступлениях от плоской поверхности.

4.8 Полиномиальные и другие способы отображения волновых фронтов

4.8.1 Представление и отображение фазовой информации

После преобразования или картирования фазовой информации из системы координат ПЗС-матрицы она может быть представлена двумя различными способами: либо в виде массива отдельных точек, либо после интерполяции в виде аналитических функций с соответствующим числом или набором коэффициентов. Каждый из способов в зависимости от дальнейшего использования полученной информации обладает присущими ему достоинствами и недостатками. Ни один из двух способов не является оптимальным во всех случаях. В ряде случаев часть интерферограммы в области низких пространственных частот лучше отображать аналитическими функциями, а высокочастотную — необработанной совокупностью пикселей.

Необработанные данные о фазе в виде пикселей привлекательны своей «необработанностью», поскольку содержат максимум присущей объекту информации. При любой «выборочной» информации ее объем слишком мал при использовании шкалы пространственных частот меньше двух пикселей (а иногда эта информация в пределах такой шкалы и вовсе отсутствует). Однако в случае дискретизации с использованием теоремы Найквиста получается достаточно полная информация.

Однако способ сохранения информации попиксельно имеет много недостатков, поскольку отсутствует возможность анализа ряда полезных аспектов информации, содержащейся в интерферограмме. При этом для получения ряда требуемых статистических параметров необходимо привлекать дополнительную стороннюю информацию.

Если информация в виде пикселов аппроксимирована 2D-аналитическими функциями, то много полезных данных дает изучение коэффициентов этих функций, при этом нет необходимости в привлечении сторонней дополнительной информации. Более того, при использовании определенных типов аналитических функций по их коэффициентам можно судить о качестве работы системы формирования изображений.

Недостатком аппроксимации является фильтрация части полезной информации, содержащейся, как правило, в области высоких пространственных частот. Если необработанные данные хотя бы частично исчезли (были удалены) из памяти, то аналитическим способом эту информацию восстановить нельзя.

Аналитические функции, описывающие поверхности круглой или прямоугольной формы, приведены в 4.8.2—4.8.6, а детальное их описание — в приложении А.

4.8.2 Полиномы Цернике для поверхностей круглой формы

Поскольку большинство оптических систем имеют круглые зрачки, в качестве аппроксимирующих функций, отображающих оптическую поверхность и волновой фронт, обычно используются полиномы Цернике. Для единичного круга эта система полиномов является полной и ортогональной. Кроме того, при определенной нормировке коэффициенты полиномов Цернике являются средними квадратическими отклонениями индивидуальных оптических аберраций, присущих полученным фазовым данным, непосредственно относящимся к формированию изображений оптическими системами.

Полезные свойства полиномов Цернике распространяются только на круглые апертуры, а неправильные результаты получаются в случае применения этих полиномов к некруглым объектам. В случае отчетливой эллиптической апертуры полиномы Цернике применимы, поскольку на зеркало под углом 45° падает круглый пучок. В этом случае допустимая норма астигматизма для эллиптической апертуры эквивалентна режиму падения нормального или преломленного пучка.

В приложении А представлены первые шесть порядков полиномов Цернике, нормированных в двух вариантах в зависимости от применения, при этом использованы заимствованные из [13] обозначения с надстрочными и подстрочными индексами. Это отличается от различных подходов «серийной нумерации», используемых для облегчения компьютерного кодирования.

Одним из достоинств полиномов Цернике является возможность описания ими симметричных аберраций. Эти симметрии становятся очевидными, судя по обозначениям полиномов и их коэффициентам, причем подстрочные индексы указывали на радиальный порядок, а подстрочный индекс — на угловой или азимутальный порядок.

Свойства симметрии нескольких первых порядков очевидны. Следующим преимуществом полинома Цернике является возможность заключения по его порядку о дополнительных свойствах объекта, не различимых в традиционной схеме.

В приложении А описаны два способа нормирования: экстремальный, т. е. типа «вершина—впадина», обозначаемый прописной буквой, и способ среднеквадратичного отклонения — «среднеквадратичный», обозначаемый строчной буквой. В первой публикации, описывавшей полиномы Цернике, для сокращения объектов информации об интерферограмме был применен способ «вершина—впадина», причем коэффициент 1 свидетельствовал о двойной погрешности определения этого диапазона. Этот способ также применим и при интерпретации интерферограмм пороговым методом. Однако «среднеквадратичный» метод более полезен при необходимости определения одной или более аберраций оптической системы и необходим для точной расшифровки данных, получаемых способом «вершина—впадина».

В целях лучшего понимания настоящего стандарта было принято следующее решение, относящееся к нормированию и обозначениям.

Если коэффициенты Цернике обозначаются прописной (заглавной) буквой, как, например, A_2^0, то это относится к нормированию способом «вершина—впадина». Если же коэффициенты записаны строчными буквами, как, например, a_2^0, то это относится к «среднеквадратичному» нормированию.

Преобразование одного способа нормирования в другой осуществляется умножением «прописных» коэффициентов на коэффициент нормирования (см. приложение А) для получения «среднеквадратичных» коэффициентов.

Полезной первоначальной операцией, предшествующей выполнению преобразования Цернике, является удаление из интерференционных данных вершин, наклонов, перекрытий. Среднеквадратическая погрешность представляет собой квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов.

Подобно этому, коэффициенты высоких порядков могут быть сведены к нулю путем удаления аберраций высоких порядков. Среднеквадратическая погрешность остающейся части погрешности определения волнового фронта или поверхности является по-прежнему квадратным корнем из суммы квадратов коэффициентов.

Если интерферограмма представлена пикселями, то среднеквадратичная погрешность определения поверхности или волнового фронта равна $(1/N)\ [\Sigma(z^2)]^{1/2}$, где N — число пикселей в пределах площади открытой апертуры, а z — высота (пик) над или под средней (опорной) плоскостью. Суммирование выполняется по всем N точкам.

Если аппроксимация полиномами Цернике используется при «среднеквадратичном» нормировании, то среднеквадратичная погрешность определения поверхности или волнового фронта равна $\left[\Sigma(a_j^k)^2\right]^{1/2}$, где суммирование коэффициентов Цернике выполняется после того, как устранены наклон, фокус и т. д.

4.8.3 Аппроксимация полиномами Цернике при эллиптической форме границы интерферограммы

С эллиптическими апертурами в оптических системах приходится часто иметь дело, поскольку на пути коллимированного пучка устанавливается плоское поворотное зеркало, изгибающее оптический путь. Во многих оптических системах часть мощности оптического пучка не фокусируется в плоскости изображений. Однако если плоское зеркало обладает хотя бы слабой преломляющей силой, да еще не при нормальном падении излучения, оно вносит астигматизм, искажающий характеристики оптической системы.

С другой стороны, если плоское зеркало обладает астигматизмом, совпадающим с направлением падения излучения, то этот астигматизм вносит в оптическую систему эффект преломления и дополнительной фокусировки. Таким образом, основной задачей применения полиномов Цернике при анализе эллиптических апертур является определение степени и направленности рефракции и астигматизма, присущих поверхности зеркала.

Процедура при этом такова. Сначала положим, что большая ось *a* апертуры направлена вдоль оси *x*. Пусть *a* и *b* — длины полуосей эллипса. Теперь умножим все *x* — координаты точек локализации полос на *b*/*a*. При этом зрачок становится круглым, а аппроксимация полиномами Цернике — полезной.

Если оптическая система осуществляет фокусировку преломленных лучей, то коэффициент a_2^0 удваивает значение косинуса угла падения, при котором используется зеркало в качестве меры вносимого им «вершина—впадина» преломления. Любой астигматизм и другие аберрационные члены будут искажать волновой фронт и должны рассматриваться как неоднородности.

После устранения членов (a_2^0) остающиеся неоднородности должны быть умножены на косинус угла падения излучения в оптической системе для определения его влияния на волновой фронт. Все предыдущие замечания и комментарии сделаны в предположении, что излучение падает на зеркало по нормали. Если же измерения выполнены под рабочим углом падения, то нерегулярности оцениваются непосредственно.

В случае если аппроксимация полиномами Цернике была выполнена применительно к данным круглой апертуры, контурная карта поверхности поверх эллиптической апертуры должна быть получена умножением координат *x*, полученных при круговой апертуре, на отношение (*a*/*b*) с последующим построением полученной картины.

Возможны и другие случаи применения аппроксимации полиномами Цернике к фазовым данным, полученным с эллиптической апертурой. Описанный выше подход также может быть использован при условии отчетливого понимания того, как масштабирование координат в том или ином направлении повлияет на результаты аппроксимации.

4.8.4 Полиномы Цернике—Татляна для круглой апертуры с центральным круглым отверстием

В случае, когда имеется интерферограмма круглой апертуры (например, при контроле телескопа Кассегрена), аппроксимация может быть осуществлена с помощью модифицированных полиномов Цернике (см. приложение А). Эти полиномы являются функцией ε, т. е. отношения внутреннего радиуса отверстия к его единичному внешнему радиусу. В других случаях используются те же полиномы для полностью круглой апертуры.

4.8.5 Полиномы Лежандра для апертуры прямоугольной формы

В некоторых случаях для аппроксимации апертуры прямоугольной формы применяется 2D-аналитическая функция, которая обычно используется при испытаниях цилиндрической оптики. В этих ситуациях предпочтительно использование полиномов Лежандра.

4.8.6 Ортогональные функции для «необычных зон»

Часто возможно вычисление ортогональные полиномов для определения требуемых характеристик поверхностей и участков произвольной формы, причем при необходимости с применением весовой функции. Математически это не новшество, но в оптике это не получило распространения. Термин ортогональная функция или «неполином» используется в настоящем стандарте как способ описания абсолютно любой базовой функции. Ею может быть, например, функция $R(1 - \cos\theta)$ для точного моделирования дефокусировки.

В приложении *B* приведены несколько примеров ортогональных полиномов без указания деталей вычисления. С использованием матриц эти вычисления могут быть очень простыми, обеспечивая возможность получения совокупности полиномов один за другим детерминированным путем (без итераций и аппроксимаций).

5 Протоколы испытаний и калибровочные сертификаты

5.1 Общие сведения

Результаты каждых испытаний, калибровки или их серий, выполненных в лаборатории, должны быть оформлены аккуратно, ясно и объективно в соответствии с инструкциями по эксплуатации и испытаниям или методиками калибровки. Результаты обычно заносятся в протокол испытаний или калибровочный сертификат и должны содержать всю требуемую клиентом и необходимую для интерпретации информацию об испытаниях и калибровке.

Эта информация представлена в 5.2—5.4.

5.2 Содержание протоколов испытаний и калибровочных сертификатов

Каждый протокол испытаний и калибровочный сертификат должен содержать, по крайней мере, следующую информацию до тех пор, пока лаборатория не сочтет ее излишней:

a) наименование (например «Протокол испытаний» или «Калибровочный сертификат»);

b) наименование и адрес лаборатории, а также, при необходимости, местоположение пункта проведения испытаний и калибровки, если они проводились вне лаборатории;

c) отличительный идентификационный символ протокола или сертификата (например, серийный номер на каждой странице);

d) фамилию, имя, отчество и адрес клиента;

e) краткое описание метода измерений;

f) краткое описание, включая однозначную идентификацию испытанных или калиброванных образцов;

g) дату проведения испытания или калибровки;

h) результаты калибровки или испытаний с указанием единиц измерений;

i) фамилию, имя, отчество, должность и подпись оператора, подтверждающего правильность полученных результатов.

Твердые копии (CD или дискеты) протоколов испытаний и калибровочных сертификатов также должны включать в себя номер страницы и их общее число (например: стр. 1 из трех).

Рекомендуется, чтобы лаборатории включали требования о том, что протокол или сертификат могут быть воспроизведены только полностью.

5.3 Протоколы испытаний

В дополнение к изложенному в 5.2 протокол испытаний должен при необходимости дополнительно содержать следующие данные:

a) отклонения, дополнения или исключения (корректировки) метода испытаний, включая сведения об условиях окружающей среды;

b) при необходимости заключение о согласованности (или несогласованности) испытуемого объекта с требованиями или спецификациями;

c) при необходимости заключение, содержащее оценку неопределенности измерений;

d) при необходимости мнения и рекомендации, основанные на результатах измерений;

e) дополнительная информация, зависящая от специфики методики испытаний или требований клиента.

5.4 Калибровочные сертификаты

5.4.1 Основы

В дополнение к требованиям 5.2 при необходимости калибровочные сертификаты должны содержать следующие данные:

a) условия (например, окружающая среда), которые могли при калибровке повлиять на результаты измерений;

b) неопределенность измерений и/или утверждение о согласованности с идентичным метрологическим сертификатом, выданным ранее;

c) свидетельство о прослеживаемости результатов измерений к национальным эталонам.

5.4.2 Спецификация

Калибровочный сертификат должен относиться только к величинам и результатам, определяющим функционирование объекта.

Если утверждение о согласовании спецификации сделано без учета результатов измерений и присущих им неопределенностей, лаборатория должна зарегистрировать эти результаты и сохранить их для возможного обсуждения в будущем.

Когда установлено согласование с предыдущими результатами, то неопределенность измерений должна быть принята во внимание.

5.4.3 Юстировка или ремонт

Когда прибор для калибровки был отъюстирован или отремонтирован, то должны быть зарегистрированы результаты калибровки до и после выполнения этих операций.

5.5 Мнения и рекомендации

Если в документ включаются мнения и рекомендации, то он должен содержать их обоснование. Кроме того, в протоколе испытаний их следует выделить.

Мнения и рекомендации, включенные в протокол, могут содержать следующее (но не обязательно ограничиваться этим):

- мнение о заключении, подтверждающем соответствие или несоответствие полученных результатов предъявляемым требованиям;
- рекомендации по использованию полученных результатов;
- рекомендации и указания по усовершенствованию объектов и методик.

5.6 Электронная передача результатов

В случае передачи результатов испытаний или калибровки электронными средствами (по телефону, факсом, факсимильно и др.) должны быть соблюдены требования настоящего стандарта.

5.7 Формат протоколов и сертификатов

Формат должен быть согласован с полученными данными во избежание непонимания и недоразумений.

Внимание должно быть уделено размещению материала в протоколе или сертификате с целью максимальной доступности восприятия его содержания читателем.

Заголовки должны быть предельно унифицированы для обоих документов.

5.8 Модернизация (уточнения, дополнения) протоколов испытаний и калибровочных сертификатов

Модернизация (изменения) протоколов или сертификатов должна быть выполнена в той же форме, что и исходный документ с указанием, что это «Дополнение к протоколу испытаний (калибровочному сертификату) с серийным номером $(XXXX)^x$».

При необходимости выпуска полностью нового протокола или сертификата должно быть однозначно указано, какой документ он заменяет.

6 Формат данных

Информация, содержащая сведения о формате данных интерферометрического вычислительного процесса, может быть найдена, например, в gost.e-ecolog.ru или в gost.e-ecolog.ru).

Приложение А
(справочное)

Ортогональные полиномы

А.1 Общие сведения

В данной части описаны различные совокупности полиномов, используемые при испытаниях оптических элементов двух наиболее распространенных форм (таблица А.1):

a) круглой (преобразуемой в эллиптическую);

b) квадратной (преобразуемой в прямоугольную).

Каждая совокупность обозначается комбинацией букв:

- форма площади: C (окружность/эллипс); S — (квадрат/прямоугольник);
- основополагающий базис: P — (полярный); R — (прямоугольный);
- форма выражения: Z — (Цернике); P — (полярная); R — (прямоугольная).

Примечания

1 В этом приложении термины «полиномиальный» и «функциональный» иногда взаимозаменяемы. Например, функция Цернике может быть получена путем умножения полинома Цернике на гармоническую функцию ($\cos\varphi$ или $\sin\varphi$). Однако в декартовых координатах функции Цернике становятся полиномами от (x, y).

2 Ортогональные совокупности, описываемые в приложении, являются ортогональными на непрерывных поверхностях определенной формы (круглой или квадратной). При использовании этих совокупностей в дискретизованном виде, что, как правило, и встречается на практике, приводит к неортогональности этих функций. Задача пользователя состоит в том, чтобы определить, в какой степени эта неортогональность искажает результаты расчетов коэффициентов. Однако для низших порядков функции эти искажения столь незначительны, что практически не влияют на показания приборов при современных уровнях точности.

Внимание! Любая ортогональная совокупность должна быть применена с осторожностью. Применительно к вещественным (реальным) данным (например, при математической обработке аберраций) отдельные виды ортогональных функций не пригодны для анализа.

Причина, по которой ортогональные функции, описываемые в этом приложении, полезны для практического анализа, заключаются в форме нескольких первых членов (терминов), а именно «вздутие», «острие», «наклон», «рефракция», описывающих изменения в сопряжениях, а также в использовании ряда полезных аберраций нижнего порядка: «кома», «астигматизм», «сферическая аберрация».

Универсально используемая совокупность Цернике (А.3.1), так же как альтернативная совокупность (А.3.3), содержит эти полезные члены. Совокупности (ряды) Лежандра (А.3.2) не включают в себя все эти термины и члены (в частности, речь идет о рефракции). Однако в более высоких порядках все термины и члены становятся полезными и значимыми на практике. К числу редко упоминаемых компонентов относятся Z20, L17 или B29.

Таблица А.1 — Совокупность ортогональных множеств (рядов)

№ п/п	Обозначение	Наименование	Поверхность	Симметрия	Координаты	Формат (см. примечание)	Примечание
Таблица А.2	C-P-P	Круглый/Цернике	Круг (эллипс)	Полярная	Полярные	$\{P_n(r)\cos(m\theta)\}$ $\{Q_n(r)\sin(m\theta)\}$	Цернике (Z)
Таблица А.3	S-R-P	Квадратный/ Лежандр	Квадрат (прямоугольник)	Прямоугольная	Прямоугольные	$L_p(x)\cdot L_q(x) = \Sigma\{c_{p,q}(x_p y_q)\}$	Лежандр (L)
Таблица А.4	S-P-Z	Квадратный/ полярный	Квадрат (прямоугольник)	Полярная	Полярные	Комбинация функций Цернике	Новое множество {B}
Таблица А.5	S-P-P	Квадратный/ полярный	Квадрат (прямоугольник)	Полярная	Полярные	$\{P_n(r)\cos(m\theta)\}$ $\{Q_n(r)\sin(m\theta)\}$	Новое множество {B}

Примечание 1 — $P_n(r)$, $Q_n(r)$ — обозначение полиномов с переменной «r».

Примечание 2 — n, m, p, q — неотрицательные целые.

Примечание 3 — Дополнительная информация может быть получена на сайте http://

gost.e-ecolog.ru

А.2 Вычисление коэффициентов

При выполнении аппроксимации множества ортогональных функций $\{P_0, P_1, P_2 ...\}$ функцией f коэффициенты $\{a_0, a_1, a_2 ...\}$ ортогональных функций вычисляются по формуле

$$a_i = \frac{\iint_A P_i(u, v) f(u, v) dA}{\iint_A P_i(u, v) P_i(u, v) dA} = \frac{1}{s^2_{rms,\,j}} \iint_A P_i(u, v) f(u, v) dA,$$

где (u, v) — пространственные координаты; A — площадь интегрирования; dA — инкремент; $s^2_{rms,\,j}$ — квадрат среднего квадратического значения полинома (P_i).

Значения s^2_{rms} сведены далее в таблицу: однако, поскольку ортогональность рядов (множеств) по дискретным поверхностям выполняется не строго, рекомендуется выполнять вычисления s^2_{rms} по мере необходимости, не обязательно пользуясь таблицами.

А.3 Определения, таблицы и иллюстрации, относящиеся к ортогональным функциям

Примечание — $C_n^i = Comb(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

А.3.1 Круглые поверхности: функции Цернике («С-Р»)

А.3.1.1 Общие сведения

Речь идет о классических полиномах Цернике, широко используемых в оптике. Это множество полиномов (рядов) ортогонально применительно к круглым поверхностям (преобразуемым в эллиптические).

Определения приведены в А.3.1.2. Значения s^2_{rms} приведены в таблице А.2, а изображения ортогональных множеств (ZO—Z35) — на рисунке А.1.

А.3.1.2 Определения

Обозначения: $(n + m) = N$: порядок функции;
$(n - m) \geq 0$: m не более n;
$(n - m)$ — четное.

Определяемая область: круг с радиусом, равным 1.

Полиномы Цернике

$$Z(n,m,r) = \sum_{i=0}^{n-m} -1^i \left[\frac{\frac{(n-i)!}{i!}}{\left(\frac{n+m}{2}-i\right)!\left(\frac{n-m}{2}-i\right)!} \right] r^{n-2i}.$$

Главный член

$$\left[\frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \right] r^n = C_n^{\left(\frac{n+m}{2}\right)} r^n = C_n^{(N/2)} \cdot r^n.$$

Квадрат среднего квадратического значения полинома

$$\left(s^2_{rms}\right): \left\| Z(n,m,r) \right\|^2 = 1/(n+1).$$

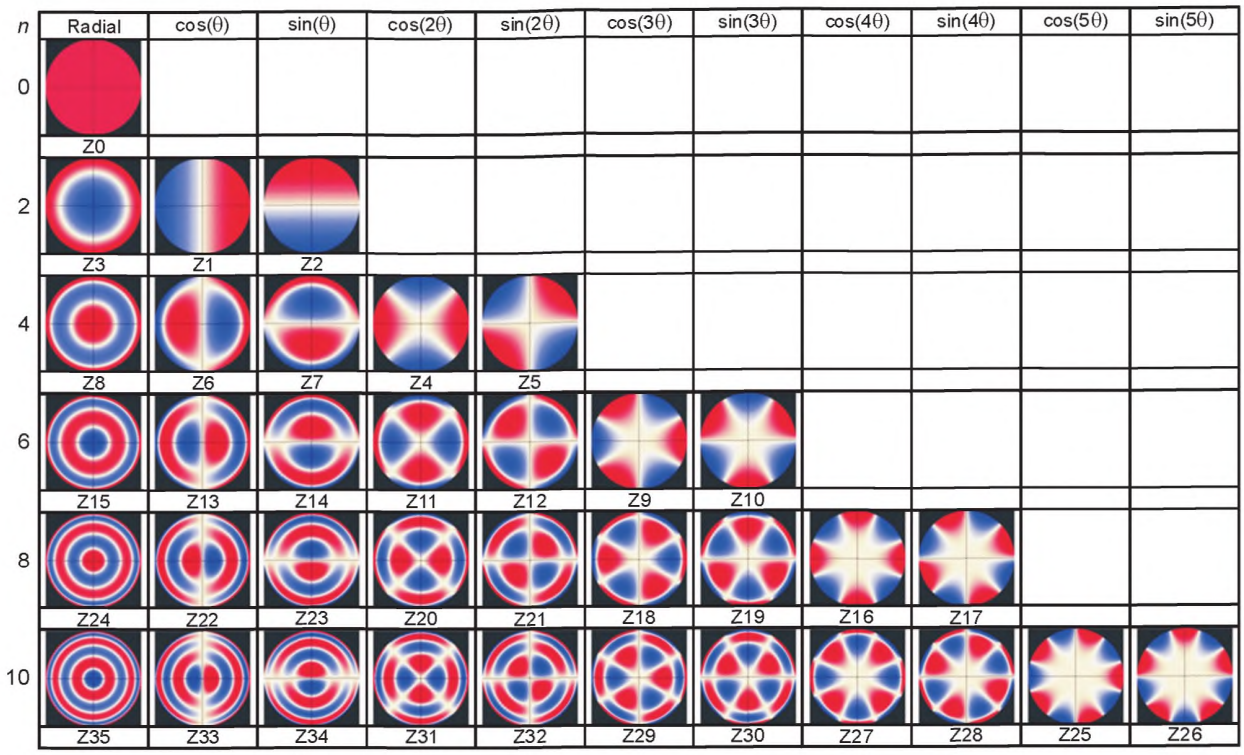
Функция Цернике (ортогональные ряды, используемые в оптике)

$$Z(n, m, r, \theta) = Z(n, m, r) \cdot \begin{vmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{vmatrix}.$$

Примечание — Среднее квадратическое значение функций Цернике дополняется функциями косинуса и синуса. У этих функций ($m > 0$) средний квадрат величины является половиной соответствующего полинома Цернике. У вращательно-симметричных функций ($m = 0$) средние квадратичные величины равны соответствующим полиномам.

Таблица А.2 — Круг Цернике(«C-P-P»)

Z	N	n, m	Формула	s^2_{rms}
Z0	0	0, 0	1	
Z1	2	1, 1	$r\cos\theta$	1/4
Z2	:	1, 1	$r\sin\theta$	1/4
Z3	0	2, 0	$2r^2 - 1$	1/3
Z4	4	2, 2	$r^2\cos2\theta$	1/6
Z5	:	2, 2	$r^2\sin2\theta$	1/6
Z6	:	3,1	$(3r^2 - 2)\, r\cos\theta$	1/8
Z7	:	3,1	$(3r^2 - 2)\, r\sin\theta$	1/8
Z8	4	4,0	$6r^4 - 6r^2 + 1$	1/5
Z9	6	3, 3	$r^3\cos3\theta$	1/8
Z10	:	3, 3	$r^3\sin3\theta$	1/8
Z11	:	4, 2	$(4r^2 - 3)\, r^2\cos2\theta$	1/10
Z12	:	4, 2	$(4r^2 - 3)\, r^2\sin2\theta$	1/10
Z13	:	5, 1	$(10r^4 - 12r^2 + 3)\, r\cos\theta$	1/12
Z14	:	5, 1	$(10r^4 - 12r^2 + 3)\, r\sin\theta$	1/12
Z15	6	6, 0	$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$	1/7
Z16	8	4, 4	$r^4\cos4\theta$	1/10
Z17	:	4, 4	$r^4\sin4\theta$	1/10
Z18	:	5, 3	$(5r^2 - 4)\, r^3\cos3\theta$	1/12
Z19	:	5, 3	$(5r^2 - 4)\, r^3\sin3\theta$	1/12
Z20	:	6, 2	$(15r^4 - 20r^2 + 6)\, r^2\cos2\theta$	1/14
Z21	:	6, 2	$(15r^4 - 20r^2 + 6)\, r^2\sin2\theta$	1/14
Z22	:	7, 1	$(35r^6 - 60r^4 + 30r^2 - 4)\, r\cos\theta$	1/16
Z23	:	7, 1	$(35r^6 - 60r^4 + 30r^2 - 4)\, r\sin\theta$	1/16
Z24	8	8, 0	$70r^8 - 140r^6 + 90r^4 - 20r^2 + 1$	1/9
Z25	10	5, 5	$r^5\cos5\theta$	1/12
Z26	:	5, 5	$r^5\sin5\theta$	1/12
Z27	:	6, 4	$(6r^2 - 5)\, r^4\cos4\theta$	1/14
Z28	:	6, 4	$(6r^2 - 5)\, r^4\sin4\theta$	1/14
Z29	:	7, 3	$(21r^4 - 30r^2 + 10)\, r^3\cos3\theta$	1/16
Z30	:	7, 3	$(21r^4 - 30r^2 + 10)\, r^3\sin3\theta$	1/16
Z31	:	8, 2	$(56r^6 - 105r^4 + 60r^2 - 10)\, r^2\cos2\theta$	1/18
Z32	:	8, 2	$(56r^6 - 105r^4 + 60r^2 - 10)\, r^2\sin2\theta$	1/18
Z33	:	9, 1	$(126r^8 - 280r^6 + 210r^4 - 60r^2 + 5)\, r\cos\theta$	1/20
Z34	:	9, 1	$(126r^8 - 280r^6 + 210r^4 - 60r^2 + 5)\, r\sin\theta$	1/20
Z35	10	10, 0	$252r^{10} - 630r^8 + 560r^6 - 210r^4 + 30\, r^2 — 1$	1/11
Z36	12	6, 6	$r^6\cos6\theta$	1/14
Z37	:	6, 6	$r^6\sin6\theta$	1/14
Z38	:	7, 5	$(7r^2 - 6)\, r^5\cos5\theta$	1/16
Z39	:	7, 5	$(7r^2 - 6)\, r^5\sin5\theta$	1/16
Z40	:	8, 4	$(28r^4 - 42r^2 + 15)\, r^4\cos4\theta$	1/18
Z41	:	8, 4	$(28r^4 - 42r^2 + 15)\, r^4\sin4\theta$	1/18
Z42	:	9, 3	$(84r^6 - 168r^4 + 105r^2 - 20)\, r^3\cos3\theta$	1/20
Z43	:	9, 3	$(84r^6 - 168r^4 + 105r^2 - 20)\, r^3\sin3\theta$	1/20
Z44	:	10, 2	$(210r^8 - 504r^6 + 420r^4 - 140r^2 + 15)\, r^2\cos2\theta$	1/22
Z45	:	10, 2	$(210r^8 - 504r^6 + 420r^4 - 140r^2 + 15)\, r^2\sin2\theta$	1/22
Z46	:	11, 1	$(462r^{10} - 1\,260r^8 + 1\,260r^6 - 560r^4 + 105r^2 — 6)\, r\cos\theta$	1/24
Z47	:	11, 1	$(462r^{10} - 1\,260r^8 + 1\,260r^6 - 560r^4 + 105r^2 — 6)\, r\sin\theta$	1/24
Z48	12	12, 0	$924r^{12} - 2\,772r^{10} + 3\,150r^8 - 1\,680r^6 + 420r^4 — 42r^2 + 1$	1/13



Ортогональность в пределах **круга** (преобразуемого в **эллипс**).
Полярные переменные: (r, θ).
Выраженные в полярных координатах:
$\Sigma \{P_n(r) \cos(m\theta)\}$ или $\Sigma \{P_n(r) \sin(m\theta)\}$; $N = n + m$

Рисунок А.1 — Изображение ортогонального множества Цернике (Z0—Z35)

А.3.2 Квадратные поверхности: функции Лежандра («S-R»)

А.3.2.1 Общие сведения

Существуют 10 полиномов Лежандра. Перемножая каждый из этих полиномов на x и y, получаем 20 полиномов (функций), ортогональных на квадратных поверхностях (преобразуемых в эллиптические).

Определения приведены в А.3.2.2. Значения s^2_{rms} приведены в таблице А.3, а изображения ортогональных множеств — на рисунке А.2.

А.3.2.2 Определения

Обозначения: (p, q) = N: порядок функции;

p, q — неотрицательные целые числа.

Определяемая область: центрированный квадрат со стороной длиной 2.

Полином Лежандра 10

$$L(p,x) = \sum_{i=0}^{p/2} -1^i C_p^i C_{2(p-i)}^p r^{-2i}.$$

Главный член $C_{2p}^p x^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2} x^p$.

1 D квадрат среднего квадратического значения полинома

$$\left(s^2_{rms}\right): \| L(p,x) \|^2 = 1/(2p+1).$$

2 D полиномы Лежандра (ортогональные ряды, применяемые в оптике

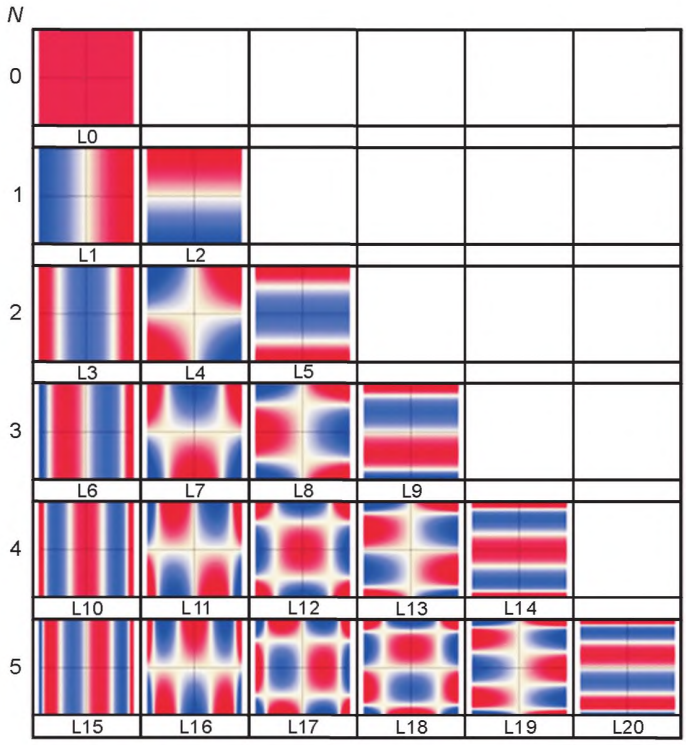
$$L(p, q, x, y) = L(p, x) \cdot L(q, y).$$

2 D средние квадратические значения полиномов

$$\|L(p, q, x, y)\|^2 = 1/[(2p + 1)(2q + 1)].$$

Таблица А.3 — Квадрат Лежандр («S-R-R»)

Z	N	p, q	Формула	s^2_{rms}
L0	0	0, 0	1	1
L1	1	1, 0	x	1/3
L2	1	0, 1	y	1/3
L3	2	2, 0	$(3x^2 - 1)/2$	1/5
L4	:	1, 1	xy	1/9
L5	2	0, 2	$(3y^2 - 1)/2$	1/5
L6	3	3, 0	$x(5x^2 - 3)/2$	1/7
L7	:	2, 1	$y(3x^2 - 1)/2$	1/15
L8	:	1, 2	$x(3y^2 - 1)/2$	1/15
L9	3	0, 3	$y(5y^2 - 3)/2$	1/7
L10	4	4, 0	$(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$	1/9
L11	:	3, 1	$xy(5x^2 - 3)/2$	1/21
L12	:	2, 2	$(3y^2 - 1)(3x^2 - 1)/4$	1/25
L13	:	1, 3	$xy(5y^2 - 3)/2$	1/21
L14	4	0, 4	$(35y^4 - 30y^2 + 3)/8$	1/9
L15	5	5, 0	$x(63x^4 - 70x^2 + 15)/8$	1/11
L16	:	4, 1	$y(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$	1/27
L17	:	3, 2	$x(3y^2 - 1)(5x^2 - 3)/4$	1/35
L18	:	2, 3	$y(5y^2 - 3)(3x^2 - 1)/4$	1/35
L19	:	1, 4	$x(35y^4 - 30y^2 + 3)/8$	1/27
L20	5	0, 5	$y(63y^4 - 70y^2 + 15)/8$	1/11
L21	6	6, 0	$(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$	1/13
L22	:	5, 1	$xy(63x^4 - 70x^2 + 15)/8$	1/33
L23	:	4, 2	$(3y^2 - 1)(35x^4 - 30x^2 + 3)/16$	1/45
L24	:	3, 3	$xy(5y^2 - 3)(5x^2 - 3)/4$	1/49
L25	:	2, 4	$(35y^4 - 30y^2 + 3)(3x^2 - 1)/16$	1/45
L26	:	1, 5	$xy(63y^4 - 70y^2 + 15)/8$	1/33
L27	6	0, 6	$(231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)/16$	1/13
L28	7	7, 0	$x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35)/16$	1/15
L29	:	6, 1	$y(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$	1/39
L30	:	5, 2	$x(3y^2 - 1)(63x^4 - 70x^2 + 15)/16$	1/55
L31	:	4, 3	$y(5y^2 - 3)(35x^4 - 30x^2 + 3)/16$	1/63
L32	:	3, 4	$x(35y^4 - 30y^2 + 3)(5x^2 - 3)/16$	1/63
L33	:	2, 5	$y(63y^4 - 70y^2 + 15)(3x^2 - 1)/16$	1/55
L34	:	1, 6	$x(231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)/16$	1/39
L35	7	0, 7	$y(429y^6 - 693y^4 + 315y^2 - 35)/16$	1/15
L36	8	8, 0	$(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)/128$	1/17
L37	:	7, 1	$xy(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35)/16$	1/45
L38	:	6, 2	$(3y^2 - 1)(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/32$	1/65
L39	:	5, 3	$xy(5y^2 - 3)(63x^4 - 70x^2 + 15)/16$	1/77
L40	:	4, 4	$(35y^4 - 30y^2 + 3)(35x^4 - 30x^2 + 3)/64$	1/81
L41	:	3, 5	$xy(63y^4 - 70y^2 + 15)(5x^2 - 3)/16$	1/77
L42	:	2, 6	$(231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)(3x^2 - 1)/32$	1/65
L43	:	1, 7	$xy(429y^6 - 693y^4 + 315y^2 - 35)/16$	1/45
L44	8	0, 8	$(6\,435y^8 - 12\,012y^6 + 6\,930y^4 - 1\,260y^2 + 35)/128$	1/17



Ортогональность на квадрате, вытягиваемом в прямоугольник.
Декартовы переменные x, y.
Выраженные в прямоугольных координатах: $\Sigma\, a_{p,\,q}\,(x^p \cdot y^q)$; $N = p + q$

Рисунок А.2 — Изображение визуализованного множества Лежандра (2D), ортогонального множеству (L0—L20)

А.3.3 Квадратные поверхности — «квадратно-радиальные функции» («S-P»)

А.3.3.1 Общие сведения

2D Лежандра функции имеют один недостаток: полиномы нижнего порядка не содержат полезных вращательно-симметричных полиномов, входящих в состав полиномов Цернике, в частности полиномов до Z8 (т. е. до 4-го порядка), включая наиболее желательный рефракционный член, т. е. $(x^2 + y^2)$.

Этот недостаток может быть компенсирован формированием полиномов с заметной вращательной симметрией.

Невращательная природа симметрии квадратной поверхности делает полиномы более сложными, от 6-го порядка и выше. Однако до 4-го порядка (в том числе) полиномы имеют ту же форму, что и полиномы Цернике, но с отличными коэффициентами.

Однако, как свидетельствуют графики, незаметная вращательная симметрия становится видимой даже при изображении функций высшего порядка.

В А.3.3.2 даны определения; значения s^2_{rms} приведены в таблицах А.4 и А.5. На рисунке А.3 изображены множества (B0-B35), альтернативные множествам Цернике для квадратных поверхностей.

А.3.2.2 Определения

Обозначения: $(n + m) = V$: порядок функции;

$(n - m) \geq 0$: m не более n;

$(n - m)$ — четное.

Определяемая область: центрированный квадрат со стороной длиной $\sqrt{2}$. Формула полинома: неизвестна.

Главный член: функция Цернике с идентичным индексом.

s^2_{rms} — формула неизвестна.

Таблица А.4 — Квадрат — полярный («S-P-Z»)

B	*N*	*n*, *m*	Формула	s^2_{rms}
B0	0	0, 0	Z00	1
B1	2	1, 1	Z01	1/6
B2	:	1, 1	Z02	1/6
B3	2	2, 0	Z03 + (+ Z00)/3	8/45
B4	4	2, 2	Z04	2/45
B5	:	2, 2	Z05	1/9
B6	:	3, 1	Z06 + (+ 3 Z01)/5	31/525
B7	:	3, 1	Z07 + (+ 3 Z02)/5	31/525
B8	4	4, 0	Z08 + (+ 75 Z03 + 32 Z00)/105	1072/11025
B9	6	3, 3	Z09 + (+ 13 Z06 + 14 Z01)/31	4/155
B10	:	3, 3	Z10 + (– 13 Z07 – 14 Z02)/31	4/155
B11	:	4, 2	Z11 + (+ 9 Z04)/7	128/11025
B12	:	4, 2	Z12 + (+ 3 Z05)/5	32/525
B13	:	5, 1	Z13 + (+ 22 Z09 + 58 Z06 + 41 Z01)/63	7864/218295
B14	:	5, 1	Z14 + (+ 22 Z10 + 58 Z07 + 41 Z02)/63	7864/218295
B15	6	6, 0	Z15 + (+ 12495 Z08 + 8925 Z03 + 3071 Z00)/15477	15094528/232387155
B16	8	4, 4	Z16 + (+ 120120 Z15 + 664605 Z08 + 980115 Z03 + 483218 Z00)/ 1768890	36224/4422225
B17	:	4, 4	Z17	8/525
B18	:	5, 3	Z18 + (+ 22323 Z13 + 64154 Z09 + 41522 Z06 + 34843 Z01)/41286	13744/1300509
B19	:	5, 3	Z19 + (– 22323 Z14 + 64154 Z10 – 41522 Z07 + 34843 Z02)/41286)	13744/1300509
B20	:	6, 2	Z20 + (+ 20 Z11 + 21 Z04)/11	21584/3468465
B21	:	6, 2	Z21 + (+ 70 Z12 + 51 Z05)/105	15692/363825
B22		7, 1	Z22 + (+ 864087 Z18 + 2026506 Z13 + 1134773 Z09 + 1990834 Z06 + 1212261 Z01)/1842555	294122552/11856841425
B23	:	7, 1	Z23 + (– 864087 Z19 + 2026506 Z14 – 1134773 Z10 + 1990834 Z07 + 1212261 Z02)/1842555	294122552/11856841425
B24	8	8, 0	Z24 + (– 8612340 Z16 + 10975965 Z15 + 6568980 Z08 + 907020 Z03 – 639832 Z00)/12747735	445621440256/9761769292275
B25	10	5, 5	Z25 + (+ 343200 Z22 + 3801861 Z18 + 5694111 Z13 + 7868964 Z09 + 11684564 Z06 + 10254815 Z01)/13085961	3885824/82445543
B26	:	5, 5	Z26 + (+ 343200 Z23 – 3801861 Z19 + 5694111 Z14 – 7868964 Z10 + 11684564 Z07 + 10254815 Z02)/13085961	3885824/82445543
B27	:	6, 4	Z27 + (+ 9556747200 Z24 + 485309083350 Z16 + 104976214413 Z15 + 241581074175 Z08 + 278891981907 Z03 + 125767845785 Z00)/ 219329302626	6098940928/2302957677573
B28	:	6, 4	Z28 + (+ 5 Z17)/3	128/14553
B29	:	7, 3	Z29 + (+ 10500525 Z25 + 18246063 Z22 + 58262733 Z18 + 44661096 Z13 + 72565827 Z09 + 59713349 Z06 + 43678682 Z01)/29553513	417760352/63392285385
B30	:	7, 3	Z30 + (– 10500525 Z26 – 18246063 Z23 + 58262733 Z19 – 44661096 Z14 + 72565827 Z10 – 59713349 Z07 – 43678682 Z02)/29553513	417760352/63392285385
B31	:	8, 2	Z31 + (+ 1192191 Z20 + 1560570 Z11 + 1327654 Z04)/578721	756525056/189927551385
B32	:	8, 2	Z32 + (+ 1226841 Z21 + 1021890 Z12 + 606094 Z05)/1682967	7459996672/227427745545
B33	:	9, 1	Z33+ (+ 1600891106100 Z29 – 1320930574362 Z25 + + 39434253490140 Z22 + 2010790258758 Z18 + 3869204991723 Z13 + 1481222960892 Z09 + 2470347780452 Z06 + 957408066380 Z01)/3332356832805	296056766869279616/ 16161414123795165225
B34	:	9, 1	Z34 + (– 1600891106100 Z30 – 1320930574362 Z26 + + 3943425349140 Z23 – 2010790258758 Z19 + 3869204991723 Z14 – 1481222960892 Z10 + 2470347780452 Z07 + 957408066380 Z02)/ 3332356832805	296056766869279616/ 16161414123795165225
B35	10	10, 0	Z35 + (– 1151734265220 Z27 + 737301274281 Z24 – 2706670044780 Z16 + 154349308575 Z15 – 816977558115 Z08 – 1259889678780 Z03 – 608757478628 Z00)/825304636299	2092531250169856/ 61578454828177287

Окончание таблицы А.4

B	*N*	*n*, *m*	Формула	s^2_{rms}
B36	12	6, 6	Z36 + (+ 379236 Z31 + 2216935 Z20 + 4808345 Z11 + 5491445 Z04)/ 2585779	133224/814520385
B37	:	6, 6	Z37 + (– 1189188 Z32 + 7465633 Z21 + 21831635 Z12 + 26931447 Z05)/ 50996071	4722176/1784862485
B38	:	7, 5	Z38 + (+ 114177559976480 Z33 + 2718028698156711 Z29 + 17511054853329675 Z25 + 4358940067034998 Z22 + 7869806791152003 Z18 + 12417760488627315 Z13 + 11575828368412182 Z09 + 18015128041522780 Z06 + 13756650017852507 Z01)/ 6938830473498741	813356273125888/ 381635676042430755
B39	:	7, 5	Z39 + (+ 114177559976480 Z34 – 2718028698156711 Z30 + 17511054853329675 Z26 + 4358940067034998 Z23 – 7869806791152003 Z19 + 12417760488627315 Z14 – 11575828368412182 Z10 + 18015128041522780 Z07 + 13756650017852507 Z02)/ 6938830473498741	813356273125888/ 381635676042430755
B40	:	8, 4	Z40 + (+ 68800652018384 Z35 + 6092045986115943 Z27 + 1209786609952206 Z24 + 9693088363923120 Z16 + 3548333026828534 Z15 + 5740888340735710 Z08 + 5637669480351546 Z03 +2374752927284972 Z00)/2191640396296065	34372402627846144/ 22782101919497595675
B41	:	8, 4	Z41 + (+ 1309 Z28 + 1640 Z17)/715	1829888/289864575
B42	:	9, 3	Z42 + (+ 565343535204700 Z38 + 763706003264490 Z33 + 2565149624175160 Z29 + 1356073133541852 Z25 + 2185857300250140 Z22 + 3853159465260237 Z18 + 3642373821037512 Z13 + 3984711111787388 Z09 + 4033165203174388 Z06 + 2681526736697390 Z01)/11358393267728535	25268411269096448/ 5684875830276317675
B43	:	9, 3	Z43 + (– 565343535204700 Z38 – 763706003264490 Z34 + 2565149624175160 Z30 + 1356073133541852 Z26 – 2185857300250140 Z23 + 3853159465260237 Z19 + 3642373821037512 Z14 + 3984711111787388 Z10 – 4033165203174388 Z07 + 2681526736697390 Z02)/11358393267728535	25268411269096448/ 5684875830276317675
B44	:	10, 2	Z44 + (– 170318162 Z36 + 935684607 Z31 + 1286533983 Z20 + 1206708975 Z11 + 781291862 Z04)/420643223	3194409588224/ 1224032659110261
B45	:	10, 2	Z45 + (– 746613322 Z37 + 1087917831 Z32 + 863622851 Z21 + 383016235 Z12 + 6300234 Z05)/ 1412530119	106353538582784/ 4110331280988933
B46	:	11, 1	Z46 + (+ 5481321147735098165 5 Z42 – 80053597227333592698 Z38 + 138326565674454965535 Z33 + 56896102875766473374 Z29 – 211314952678042237854 Z25 + 115516375966780380240 Z22 + 2793334186377137523 Z18 + 8502393649491243987 Z13 – 61335810959613726368 Z09 – 99148881650057560237 Z06 – 103993993393227042614 Z01)/ 110971977638848086033	47871904279704287142288128/ 337596231559451495551484791 5
B47	:	11, 1	Z47 + (– 5481321147735098165 5 Z43 – 80053597227333592698 Z39 + 138326565674454965535 Z34 – 56896102875766473374 Z30 – 211314952678042237854 Z26 + 115516375966780380240 Z23 – 2793334186377137523 Z19 + 8502393649491243987 Z14 + 61335810959613726368 Z10 – 99148881650057560237 Z07 – 103993993393227042614 Z02)/ 110971977638848086033	47871904279704287142288128/ 337596231559451495551484791 5
B48	12	12, 0	Z48 + (– 80853710242804488990 Z40 39068803210909062591 Z35 – 29381305081911332434 Z27 – 6538623897041164656 Z24 – 3544294426687773763 20 Z16 – 10339007516526996032 Z15 – 192611588458927386735 Z08 – 194559707811599680053 Z03 – 82356423526294057232 Z00)/42548372864001121845	16755837801383953674649 6/ 62531216179579248719504 25

Таблица А.5 — Квадрат — полярный («S-P-P»).

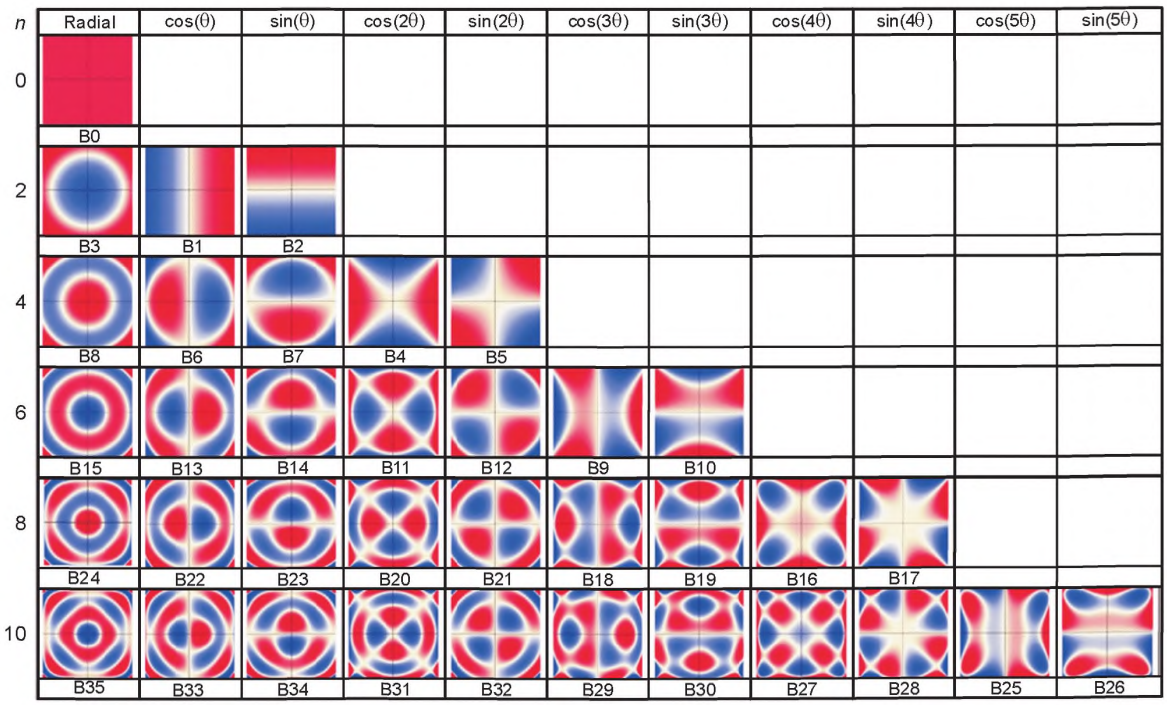
B	*N*	*n*, *m*	Формула	s^2_{rms}
B0	0	0, 0	1	1
B1	2	1, 1	$r\cos\theta$	1/6
B2	:	1, 1	$r\sin\theta$	1/6
B3	2	2, 0	$2r^2 - 2/3$	8/45
B4	4	2, 2	$r^2\cos2\theta$	2/45
B5	:	2, 2	$r^2\sin2\theta$	1/9
B6	:	3, 1	$r(15r^2 - 7)\,r\cos\theta/5$	31/525
B7	:	3, 1	$r(15r^2 - 7)\,r\sin\theta/5$	31/525
B8	4	4, 0	$2(315r^4 - 240r^2 + 31)/105$	1072/11025
B9	6	3, 0	$r^3\cos3\theta + 3r(13r^2 - 4)\cos\theta/31$	4/155
B10	:	3, 3	$r^3\sin3\theta + 3r(4 - 13r^2)\sin\theta/31$	4/155
B11	:	4, 2	$4r^2(7r^2 - 3)\cos2\theta/7$	128/11025
B12	:	4, 2	$4r^2(5r^2 - 3)\sin2\theta/5$	32/525
B13	:	5, 1	$22r^3\cos3\theta/63 + 2r(105r^4 - 97r^2 + 19)\cos\theta/21$	7864/218295
B14	:	5, 1	$2r(105r^4 - 97r^2 + 19)\sin\theta/21 - 22r^3\sin3\theta/63$	7864/218295
B15	6	6, 0	$4(77385r^6 - 97335r^4 + 32151r^2 - 2209)/15477$	15094528/232387155
B16	8	4, 4	$r^4\cos\theta + (1201200r^6 + 192015r^4 - 292980r^2 + 23794)/884445$	36224/4422225
B17	:	4, 4	$r^4\sin\theta$	8/525
B18	:	5, 3	$5r^3(20643r^3 - 10099)\cos3\theta/20643 + r(37205r^4 - 23885r^2 + 3128)\cos\theta/6881$	13744/1300509
B19	:	5, 3	$5r^3(20643r^3 - 10099)\sin3\theta/20643 + r(37205r^4 - 23885r^2 + 3128)\sin\theta/6881$	13744/1300509
B20	:	6, 2	$r^2(165r^4 - 140r^2 + 27)\cos2\theta/11$	21584/3468465
B21	:	6, 2	$r^2(1575r^4 - 1820r^2 + 471)\sin2\theta/105$	15692/363825
B22	:	7, 1	$r^3(864087r^2 - 464315)\cos3\theta/368511 + r(64489425r^6 - 90288240r^4 + 36931080r^2 - 4060109)\cos\theta/1842555$	294122552/11856841425
B23	:	7, 1	$r^3(464315r^2 - 8640887r^2)\sin3\theta/368511 + r(64489425r^6 - 90288240r^4 + 36931080r^2 - 4060109)\sin\theta/1842555$	294122552/11856841425
B24	8	8, 0	$2(446170725r^8 - 782581800r^6 + 428715540r^4 - 80421480r^2 + 3396949)/12747735 - 52196r^4\cos4\theta/77259$	44562144256/ 9761769292275
B25	10	5, 5	$r^5\cos5\theta + 5r^3(1267287r^2 - 489232)\cos3\theta/4361987 + 10r(1201200r^6 + 3634911r^4 - 2297964r^2 + 259522)\cos\theta/13085961$	3885824/824415543
B26	:	5, 5	$r^5\sin5\theta + 5r^3(489232 - 1267287r^2)\sin3\theta/4361987 + 10r(1201200r^6 + 3634911r^4 - 2297964r^2 + 259522)\sin\theta/13085961$	3885824/824415543
B27	:	6, 4	$2r^4(15666378759r^2 - 7277826545)\cos4\theta/5222126253 + 10(33448615200r^8 + 38078984013r^6 - 41984636967r^4 + 8843857386r^2 - 348126458)/109664651313$	6098940928/ 2302957677573
B28	:	6, 4	$2r^4(9r^2 - 5)\sin4\theta/3$	
B29		7, 3	$59325r^5\cos5\theta/166969 + r^3(206874591r^4 - 1984305775r^3 + 45016675)\cos3\theta/9851171 + 5r(12772244r^6 + 129630564r^4 + 38117757r^2 - 2949796)\cos\theta/29553513$	128/14553 417760352/63392285385
B30	:	7, 3	$-59325r^5\sin5\theta/166969 + r^3(206874591r^4 - 198430575r^2 + 45016675)\sin3\theta/9851171 - 5r(12772244r^6 - 129630564r^4 + 38117757r^2 - 2949796)\sin\theta/29553513$	417760352/63392285385
B31	:	8, 2	$8r^2(4051047r^6 - 5360355r^4 + 2140215r^2 - 248515)\cos2\theta/57821$	756525056/189927551385
B32	:	8, 2	$8r^2(11780769r^6 - 19788615r^4 + 10066095r^2 - 1491025)\sin2\theta/1682967$	745999672/227427745545
B33	:	9, 1	$-62901455922r^5\cos5\theta/158683658705 + 2r^3(1120623774270r^4 - 1265759396307r^2 + 314899099562)\cos3\theta/222157122187 + 2r(41987696093343r^8 - 79504002628050r^6 + 50188146439788r^4 - 12065806632342r^2 + 851241028411)\cos\theta/666471366561$	296056766869279616/ 16161414123795165225

Продолжение таблицы А.5

B	*N*	*n*, *m*	Формула	s^2_{rms}
B34	:	9, 1	$-62901455922r^5 \sin5\theta/158683658705 - 2r^3(1120623774270r^4 - 1265759396307r^2 + 314899099562) \sin3\theta/222157122187 + 2r(41987696093343r^8 - 79504002628050r^6 + 50188146439788r^4 - 12065806632342r^2 + 851241028411) \sin\theta/666471366561$	296056766869279616/ 16161414123795165225
B35	10	10, 0	$120r^4(8477781337 - 19195571087r^2) \cos4\theta/275101545433 + 4(51994192086837r^{10} - 117082707917175r^8 + 90508851024900r^6 - 29122300885860r^4 + 3561847824345r^2 - 102049507139)/825304636299$	2092531250169856/ 61578454828177287
B36	12	6, 6	$r^6\cos6\theta + 2r^2(21237216r^6 - 6565755r^4 - 2351160r^2 + 575660) \cos2\theta/2585779$	1332224/814520385
B37	:	6, 6	$r^6\sin6\theta - 3r^2(22198176r^6 + 78949745r^4 - 44445800r^2 - 6040740) \sin2\theta/50996071$	4722176/1784862485
B38	:	7, 5	$7r^5(2312943491166247r^2 - 1148663237507751) \cos5\theta/2312943491166247r^2 + 21r^3(906009566052237r^4 - 669711539507005r^2 + 1155061672560) \cos3\theta/2312943491166247 + 10r(479545751901216r^8 + 40197728517603 51r^6 - 3779383718025531r^4 + 964993555783390r^2 - 62839902252290) \cos\theta/2312943491166247$	813356273125888/ 381635676042430755
B39	:	7, 5	$7r^5(2312943491166247r^2 - 1148663237507751) \sin5\theta/2312943491166247 - 21r^3(906009566052237r^4 - 669711539507005r^2 + 1155061672560) \sin3\theta/2312943491166247 + 10r(479545751901216r^8 + 40197728517603 51r^6 - 3779383718025531r^4 + 964993555783390r^2 - 62839902252290) \sin\theta/2312943491166247$	813356273125888/ 381635676042430755
B40	:	8, 4	$4r^4(5113827591357485r^4 - 4624718393978256r^2 + 1008955364815365) \cos4\theta/730546798765355 + 4(1444813692386064r^{10} + 3445054327089375r^8 - 4989591643870260r^6 + 1868999767616345r^4 - 226808950021r^2 + 5885393231202)/730546798765355$	34372402627846144/ 22782101919497595675
B41	:	8, 4	$4r^4(5005r^4 - 5544r^2 + 1455) \sin4\theta/715$	1829888/289864575
B42		9, 3	$84r^5(4282905568975r^2 - 2203450299877) \cos5\theta/103258120611685 + 4r^3(4770525172259847r^6 - 6847643239135776r^4 + 3078721895377128r^2 - 424660852103633) \cos3\theta/227167865345707 + 12r^3(1603782606855429r^8 - 2288877923421705r^6 + 1094176014681827r^4 - 197593857188203r^2 + 10290310146384) \cos\theta/227167865345707$	25268411269096448/ 5684875830276317675
B43	:	9, 3	$84r^5(2203450299877 - 4282905568975r^2) \sin5\theta/103258120611685 + 4r^3(4770525172259847r^6 - 6847643239135776r^4 + 3078721895377128r^2 - 424660852103633) \sin3\theta/227167865345707 - 12(1603782606855429r^8 - 2288877923421705r^6 + 1094176014681827r^4 - 197593857188203r^2 + 10290310146384) \sin\theta/227167865345707$	25268411269096448/ 5684875830276317675
B44	:	10, 2	$10r^2(8833507683r^8 - 15960584640r^6 + 9772127967r^4 - 2365281856r^2 + 183317111) \cos2\theta/420643223 - 24331166r^6 \cos6\theta/60091889$	3194409588224/ 1224032659110261
B45	:	10, 2	$10r^2(9887710833r^8 - 21699726048r^6 + 16399520683r^4 - 4940651296r^2 + 478258737) \sin2\theta/470843373 - 8204542r^6 \sin6\theta/15522309$	106353538582784 4110331280988933
B46	:	11, 1	$2r^5(6404919778237126627 - 13342266204555598783r^2) \cos5\theta/5284379887564194573 + 2r^3(3288792688641058899 30r^6 - 5724143834145620697 99r^4 + 2901766484984338897155r^2 - 42843739178176941130) \cos3\theta/1585313966269258371 9 + 2r(8544842278191302624541r^{10} - 2039925742499455437906 95r^8 + 1752272109915641856003 0r^6 - 6656947884605215965110r^4 + 1069746603645182483 35r^2 - 52742265078762233277) \cos\theta/36990659212949362011$	47871904279704287142288128/ 33759623155945149555514847915

Окончание таблицы А.5

B	*N*	*n*, *m*	Формула	s^2_{rms}
B47	:	11, 1	$2r^5(6404919778237126627 - 13342266204555598783r^2)$ $\cos5\theta/5284379887564194573 - 2r^3(32887926886410588993 0r^6 -$ $57241438341456206979 9r^4 + 290176648498433889715 5r^2 -$ $42843739178176941130)$ $\sin3\theta/15853139662692583719 + 2r(8544842278191302624541r^{10} -$ $20399257424994554379069 5r^8 + 17522721099156418560030r^6 -$ $665694788460521596511 0r^4 + 106974660364518248335r^2 -$ $52742265078762233277)\ \sin\theta/36990659212949362011$	4787190427970428714228812 8/ 3375962315594514955514847915
B48	12	12, 0	$4(98286741315842559146195r^{12} - 27024687792465506495352r^{10} +$ $27239081206484485713375r^8 - 12688782692839396629360r^6 +$ $27558561255995271930 75r^4 - 23958146825197773468 0r^2 +$ $49806791897390316 79)/42548372864001121845 -$ $24r^4(4491872791266916055r^4 - 400707936449666774 4r^2 +$ $83398525972477787 5)\ \cos4\theta/2026112993523862945$	1675583780138395367464 96/ 6253121617957924871950425



Ортогональность на поверхности квадрата (преобразуемого в прямоугольник).
Основан на полярной симметрии.
Выраженная в координатах: $\Sigma\{P_n(r)\cos(m\theta)\}$ или $\Sigma\{P_n(r)\sin(m\theta)\}$, $N = n + m$ (подобно рядам Цернике)

Рисунок А.3 — Пример визуализованного альтернативного множества (B0—B35) для квадратных поверхностей на базе множества Цернике (Z0—Z35).

Приложение В
(справочное)

Ортогональные функции на «нетривиальных поверхностях»

В.1 Общие сведения

В данном приложении даны рекомендации по вычислению ортогональных полиномов, описывающих требуемые характеристики поверхностей произвольной формы с учетом необходимой весовой функции. Математически это не новый метод, но ранее он не применялся в оптической практике. В этом приложении используется термин функция, а не полином, поскольку этот метод применим к любым базисным функциям. Например, для точного моделирования дефокусировки можно пользоваться функцией $R \cdot (1 - \cos\theta)$.

Приводятся несколько примеров ортогональных полиномов без деталей вычислений, которые упрощаются с использованием матриц, с помощью выстраиваемых друг за другом полиномов, причем детерминированным путем (без итераций и аппроксимаций).

В.2 Предварительные рассмотрения

Прежде всего нужно решить, будут ли используемы функции/полиномы для сохранения данных или для их анализа (обработки).

a) Сохранение данных

В этом случае важно иметь в виду, чтобы функции были ортогональны или, по крайней мере, принимать во внимание частичную потерю ортогональности, в противном случае реконструкция волнового фронта, хоть и незначительно, но может оказаться ошибочной.

Часто в цифровых интерферометрах приходится иметь дело с дискретными зрачками. В этом случае приходится создавать специальное множество ортогональных функций для каждого типа зрачка.

b) Анализ данных

Потеря ортогональности может оказывать влияние на амплитуду вычисляемых функций.

Если функции «почти» ортогональны (например, функции Цернике на дискретном зрачке), то погрешность будет мала. Для кривизны «Z3», например, погрешность равна $1/n \cdot 2$; для более высоких порядков она может быть больше.

В.3 Общий метод и определения

Даже не в системе прямоугольных координат определим x и y как основные координаты.

Сформируем ряды $\{f_0(x, y), f_1(x, y), ..., f_n(x, y)\}$.

В.3.1 Основная поверхность

«зрачок»

Примечание — Весовая функция (см. В.3.2) может участвовать в этом определении.

В.3.2 Весовая функция

$w(x, y)$.

Амплитуда волнового фронта на поверхности зрачка.

В.3.3 Корреляция двух функций

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$.

Корреляция: $C(f_1 f_2) = \int\int [\{w(x, y) \cdot f_1(x, y)\} \cdot \{w(x, y) \cdot f_2(x, y\}) \cdot d^2 S]$.

Краткая запись: $C(1, 2) = C(f_1 f_2)$.

В.4 Генерирование функций

В.4.1 Начальные условия

В оптике по очевидным причинам предпочтительно начинать ряды функций с {1, x, y} или даже $\{1, x, y, r^2\}$.

Примечание — ИСО10110-5 и ИСО10110-14 определяют «центр» зрачка таким образом, что три первых функции всегда ортогональны. $\{r^2\}$ никогда не может быть ортогональна с {1}, поскольку, как и {1}, эта функция всегда положительна.

В.4.2 Свойства-примеры

В.4.2.1 Пример 1 — Функции (полиномы) Цернике

Z_n должен иметь форму $\{r^{2n}(r \cdot \cos\varphi)^p\} = \{r^{2n+p} \cdot \cos\varphi^p\}$, где n и p — целые числа. На практике косинусный член подвергается растяжению и записывается в виде $\{r^{2n+p} \cdot \cos p \cdot \varphi\}$. Это значительно упрощает вычисление. Полиномы Цернике наиболее просты для генерации.

В.4.2.2 Пример 2 — «Квадратно-радиальные» функции

Рассмотрим пример: $Z6 = \{(3r^2 - 2) \cdot r \cdot \cos\varphi\}$, который также может быть переписан в виде

$$Z6 = \{(3r^3\cos\varphi - 2)\, r \cdot \cos\varphi\} = \{(3r^2 x - 2x)\}.$$

Член $2x$ введен в это выражение лишь для коррекции усредненного наклона основного члена $\{r^3\cos\varphi\} = r^{2\cdot}x$ (степень 3 здесь введена с целью общей нормировки).

На поверхности квадратного зрачка усредненный наклон базового члена вероятно будет другим. «Радиально-квадратные» функции будут идентичны функциям Цернике только в пределах базового члена, но в «корректирующих членах» будут отличаться от них.

«Квадратное» множество функций имеет серьезный недостаток, поскольку 4-симметричный квадратный зрачок будет всегда являться источником корреляции между $\{\cos(4\varphi)\} = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ и членом с круговой симметрией. Но зрачковая (т. е. амплитудная) функция играет роль в распространении волнового фронта и его дифракции. Следовательно, некорректно говорить о циркулярно-симметричных функциях на поверхности циркулярно-асимметричного зрачка.

Таким образом, в противоположность круглому зрачку (Цернике) нельзя сначала генерировать циркулярно симметричные функции, а затем добавлять члены $\cos\varphi$, $\cos2\varphi$ т. д. Следовательно, необходимо генерировать функции другого порядка, например классические функции Цернике.

B.4.2.3 Пример 3 — «Квадратные» функции

Запишем, что основной член будет иметь форму $\{x^p, y^q\}$ с корректирующими членами той же формы, но с парой индексов, «меньших», чем (p, q), при той же «значимости» (этого свойства вполне достаточно, так как симметричная квадратная поверхность гарантирует, что различные «значимости» будут устраняться при интегрировании по поверхности зрачка).

Основной ряд выглядит следующим образом:

$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y$ и т. д.$\}$.

Каждый порядок $(p + q)$ содержит $(p + q + 1)$ функций, т. е. так же, как и в функциях Цернике (Z8; Z11; Z12; Z16; Z17 и т. д.).

B.4.3 Генерация множества

Для каждого полинома следует отметить, что он не коррелирован с полиномами других генераций. Это обеспечивает возможность определять как главный, так и корректирующий члены. Если базовые члены выбраны правильно (а это значит, что между ними отсутствует взаимная корреляция), то и вся генерация выбрана правильно.

B.5 Дискретные (т. е. «реальные») поверхности

К дискретным поверхностям относится все сказанное ранее.

B.6 Матричное вычисление

Использование матриц облегчает процесс вычисления.

Библиография

[1] ISO 10110-5:2007 Optics and optical instruments — Preparation of drawings for optical elements and systems — Part 5: Surface form tolerances

[2] ISO 10110-14:2007 Optics and optical instruments — Preparation of drawings for optical elements and systems — Part 14: Wavefront deformation tolerance

[3] ISO/TR 14999-1:2005 Optics and photonics — Interferometric measurement of optical elements and optical systems — Part 1: Terms, definitions and fundamental relationships

[4] Yoder P.R. Opto-Mechanical Systems Design, Marcel Dekker, New York, 1986

[5] Malacara D., ed. Optical shop testing, Wiley, New York, 1991

[6] Creath K. Phase-measurement interferometry techniques, Progress in Optics XXVI, E.Wolf, Elsevier Science publishers B.V., 1988

[7] Schwider J. Advanced evaluation techniques in interferometry. Progress in Optics XXVI, E.Wolf, Elsevier Science publishers B.V., 1988

[8] Schwider J., Burow R., Elssner R., Grzanna J., Spolaczyk R., Merkel K., Appl. Opt., 22, 1983, p. 3421

[9] Takeda M., Ina H., Kobayashi S., J. Opt. Soc. Am., 72, 1982, p. 156

[10] Kreis Th., J. Opt. Soc. Am., A3, 1986, p. 847

[11] Womack K.H., Opt. Eng. 23, 1984, p. 391

[12] Womack K.H., Opt. Eng., 23, 1984, p. 396

[13] Born M., Wolf E. Principles of Optics, Pergamon Press, 1980

[14] Abramowitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. 9th ed., New York: Dover

[15] Bray M. Orthogonal polynomials: a set for square areas, Optical Fabrication, Testing, and Metrology. SPIE Vol. 5252, Saint-Etienne, 2003

УДК 537.872:006.354 ОКС 17.180 Т80.10

Ключевые слова: оптика, фотоника, интерференционные измерения, оптические элементы, измерения, методика оценки результатов

Редактор *Н. А. Аргунова*
Технический редактор *В. Н. Прусакова*
Корректор *С. И. Фирсова*
Компьютерная верстка *В. Н. Романовой*

Сдано в набор 11.03.2013. Подписано в печать 22.01.2014. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Ариал. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,05. Уч.-изд. л. 5,50. Тираж 106 экз. Зак. 322.

ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 123995 Москва, Гранатный пер., 4.

gost.e-ecolog.ru gost.e-ecolog.ru

Набрано и отпечатано в Калужской типографии стандартов, 248021 Калуга, ул. Московская, 256.

gost.e-ecolog.ru