НИИЖБ ГОССТРОЯ СССР

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

МОСКВА 1981

gost.e-ecolog.ru

УДК 624.07.012.45
Печатаются по решению секции №1 бетонных и железобетонных конструкций НТС НИИЖБ Госстроя СССР от 13 сентября 1979 г.

Рекомендации по оптимальному проектированию железобетонных конструкций. М., НИИЖБ Госстроя СССР, 1981, 170 с.

Рекомендации содержат принципиальные положения по оптимальному проектированию железобетонных конструкций, методы, алгоритмы и программы решения различных задач оптимального проектирования железобетонных конструкций как на ЭВМ, так и "вручную". В приложениях приведены вспомогательные материалы и примеры расчета.

Рекомендации предназначены для инженеров-проектировщиков, специалистов вычислительных центров, научных сотрудников, занимающихся разработкой новых железобетонных конструкций и созданием систем их автоматизированного проектирования, а также для студентов строительных специальностей.

Табл. 62 , илл. 9

© Научно-исследовательский институт
бетона и железобетона Госстроя СССР, 1981

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие Рекомендации содержат основные положения по оптимальному проектированию железобетонных конструкций и предназначены для улучшения их технико-экономических показателей – снижения массы, металлоемкости, стоимости и т.п.

В Рекомендациях приведены алгоритмы и описаны программы для ЭВМ, которые пригодны для оптимизации * любых железобетонных конструкций или железобетонных конструкций определенного класса. Наиболее типичные случаи иллюстрируются числовыми примерами.

Читателю, впервые знакомящемуся с вопросами оптимизации железобетонных конструкций, изучение материалов, изложенных в Рекомендациях, следует начинать с приложения 8, которое является как бы "ключом" к основному тексту. В этом приложении приведены основные понятия, постановки и способы решения простейших задач, чаще всего возникающих в практике проектирования. Показано, как предлагаемые подходы развиваются для решения более общих задач оптимизации железобетонных конструкций.

Настоящие Рекомендации разработаны НИИЖБ Госстроя СССР (канд. техн. наук М.Б.Краковский) при участии ряда научно-исследовательских организаций на основе результатов научно-исследовательских работ а также накопленного за последние годы опыта оптимизации железобетонных, в том числе тонкостенных пространственных конструкций.

Отдельные приложения настоящих Рекомендаций составили:

приложение I – универсальные программы оптимизации-канд.техн. наук В.Н.Уколов (ЦНИПИАСС Госстроя СССР) программа оптимизации железобетонных стержневых конструкций – канд.техн.наук В.Т.Александров и инж. С.А.Перевозов (Ленпромстройпроект Госстроя СССР); программа оптимизации ребристых железобетонных плит – кандидаты техн. наук М.А.Янкелевич и Я.И.Маркус (НИИСК Госстроя СССР); программа оптимального армирования круглых плит и кольцевых фундаментов – д-р техн. наук, проф. В.И. Соломин и инж. С.Б.Шматков (Челябинский ПИ Минвуза РСФСР); рекомендации по выбору оптималь-

* В дальнейшем в тексте настоящих Рекомендаций для краткости под термином "оптимизация железобетонных конструкций" принято понимать оптимальное проектирование железобетонных конструкций

ных параметров железобетонных висячих оболочек – кандидаты техн. наук М.А.Иванов (НИИЖБ Госстроя СССР) и Т.А.Усачев (ЦНИИЭП торгово-бытовых зданий и туристских комплексов Госгражданстроя при Госстрое СССР); рекомендации по выбору оптимальных параметров железобетонных куполов – кандидаты техн. наук Н.В.Ахвледиани и М.А.Даниелашвили (ИСМиС АН ГрузССР); программа решения однопараметрических задач оптимального проектирования номенклатур типовых конструкций – канд.техн. наук М.А.Янкелевич (НИИСК Госстроя СССР); программа решения многопараметрической задачи оптимального проектирования номенклатур типовых конструкций – Г.Г.Джаникян (ЦНИИПромзданий Госстроя СССР);

приложение 5 – канд.техн. наук Б.Н.Бастатский, инженеры М.А.Адамова и Н.Г.Барабадзе (ГрузНИИЭГС Минэнерго СССР).

Общее составление и редактирование Рекомендаций осуществлено канд.техн. наук М.Б.Краковским.

Замечания и предложения по содержанию Рекомендаций просим направлять в НИИЖБ по адресу: 109389, Москва, 2-я Институтская ул., д.6.

Дирекция НИИЖБ

I. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Основные положения

I.I. Настоящие Рекомендации распространяются на оптимизацию железобетонных конструкций, рассчитываемых и конструируемых согласно главе СНиП П-2I-75 "Бетонные и железобетонные конструкции".

I.2. При оптимизации железобетонных конструкций специальных видов (фундаментов, оболочек, складок и т.п.), а также конструкций, работающих в особых условиях (в районах с сейсмичностью 7 баллов и более, на просадочных грунтах и подрабатываемых территориях, в условиях воздействия повышенных и высоких температур и т.п.) их расчет и конструирование следует проводить согласно специальным указаниям.

I.3. Настоящие Рекомендации содержат методы и алгоритмы решения различных задач оптимизации железобетонных конструкций. При описании алгоритмов они представляются состоящими из трех этапов: А – начало работы, Б – К-ый шаг; В – конец работы.

Работа алгоритмов иллюстрируется на тестовом примере оптимизации изгибаемого железобетонного элемента. Условия тестового примера описаны в п.I.7 настоящих Рекомендаций.

Примеры оптимизации различных железобетонных конструкций приведены в прил. I–5 настоящих Рекомендаций.

Основные определения

I.4. При оптимизации железобетонных конструкций используются следующие понятия и термины.

I) Целевая функция – критерий качества, по которому проводится оптимизация конструкции. В качестве целевой функции могут быть выбраны расчетная производственная себестоимость, оптовая цена, расход металла и пр. При выборе целевой функции следует руководствоваться указаниями пп.2.I–2.2 настоящих Рекомендаций.

2) Скалярная целевая функция – целевая функция, состоящая из одного критерия качества, например, стоимости.

Скалярная целевая функция обозначается y .

3) Векторная целевая функция – целевая функция, состоящая из нескольких критериев качества, например, стоимости, трудоемкости, расхода металла, расхода бетона.

Векторная целевая функция обозначается $y = (y_1, \dots y_p)$
где $y_1, \dots, y_p$ – p скалярных целевых функций, образующих векторную.

4) Переменные параметры – параметры конструкции, которые могут в процессе оптимизации принимать различные значения. В качестве переменных параметров могут быть выбраны геометрические размеры конструкции или отдельных ее элементов, характеристики материалов, площади сечения арматуры и пр. При выборе переменных параметров следует руководствоваться указаниями пп.2.3–2.5 настоящих Рекомендаций.

Переменные параметры обозначаются $x_1, \ldots, x_L$.

5) Ограничения – записываемые в виде равенств и неравенств требования, предъявляемые к конструкции. Ограничениями могут быть требования прочности, жесткости, трещиностойкости, технологичности и т.п.

6) Задача оптимизации конструкций – задача выбора такого значения переменных параметров, при которых достигает минимума целевая функция и выполняются необходимые ограничения.

Задача оптимизации железобетонных конструкций записывается в следующем виде.

Найти $$min\ y\ (x_1, \ldots, x_L) \qquad (1)$$

при выполнении ограничений

$$f_i\ (x_1 \ldots x_L) \leq 0\ ;\ i = 1, \ldots L, \qquad (2)$$

где f_i – функции ограничений; L – общее число ограничений.

При необходимости вместо задачи минимизации решать задачу максимизации рекомендуется вместо целевой функции y рассматривать целевую функцию $y' = -y$.

7) Однокритериальная задача оптимизации – задача минимизации скалярной целевой функции при выполнении необходимых ограничений.

8) Многокритериальная задача оптимизации – задача минимизации векторной целевой функции при выполнении необходимых ограничений.

9) Одноэкстремальная задача оптимизации – задача оптимизации при единственном минимуме целевой функции.

10) Многоэкстремальная задача оптимизации – задача оптимизации при нескольких минимумах целевой функции. Минимальный из минимумов – глобальный минимум; остальные минимумы – локальные.

11) Внешние переменные параметры – переменные параметры, задаваемые независимо от других переменных параметров. Внешними переменными параметрами могут быть, например, выбраны геометрические размеры конструкции или отдельных ее элементов, характеристики материалов и пр. Внешние переменные параметры следует

выбирать в соответствии с указаниями пп.2.6-2.9 настоящих Рекомендаций. Внешние переменные параметры обозначаются $x_1,\dots,x_n (n<l)$

I2) Внутренние переменные параметры - переменные параметры, определяемые в зависимости от значений внешних переменных параметров. Внутренними переменными параметрами могут быть выбраны, например, площади сечений арматуры, количество арматурных каркасов, количество арматурных стержней, расстояния между стержнями и пр. Внутренние переменные параметры следует выбирать в соответствии с указаниями пп.2.6-2.9 настоящих Рекомендаций. Внутренние переменные параметры обозначаются $x_{n+1},\dots,x_l$, их число равно $m = l - n$.

I3) Внешние ограничения - ограничения, в которые входят только внешние переменные параметры. Внешние ограничения записываются в следующем виде:

$$f_i(x_1,\dots,x_n) \leqslant 0; \quad i = 1,\dots N, \tag{3}$$

где N - общее число внешних ограничений.

Частным случаем внешних ограничений являются органичения вида

$$d_{1i} \leqslant x_i \leqslant d_{2i}; \quad i = 1,\dots, n, \tag{4}$$

где d_{1i} и d_{2i} - соответственно минимальное и максимальное возможные значения внешнего переменного параметра x_i.

I4) Внутренние ограничения - ограничения, в которые входят как внешние, так и внутренние переменные параметры (или только внутренние). Внутренние ограничения записываются в следующем виде:

$$f_i(x_1,\dots,x_l) \leqslant 0 \quad i = N+1,\dots,L, \tag{5}$$

где $L - N = M$ - общее число внутренних ограничений.

I5) Внутренняя задача оптимизации - задача определения оптимального значения внутренних переменных параметров $x_{n+1},\dots,x_l$, при которых выполняются внутренние ограничения (5) и достигает минимального значения целевая функция; внешние переменные параметры при этом фиксируются. Внутренняя задача оптимизации записывается в следующем виде.

Найти

$$\min_{x_{n+1},\dots,x_l} y(x_1,\dots,x_l) \tag{6}$$

при выполнении неравенств (5) и заданных значениях $x_1,\dots,x_n$.

I6) Внешняя задача оптимизации - задача определения такого значения внешних переменных параметров $x_1,\dots,x_n$, при котором выполняются внешние ограничения и из всех возможных решений внут-

ренних задач оптимизации выбирается решение с минимальным значением целевой функции. Внешняя задача оптимизации записывается в следующем виде.

Найти $\min_{x_1,\dots,x_n} \min_{x_{n+1},\dots,x_l} y(x_1,\dots,x_l)$ (7)

при выполнении неравенств (3).

I7) Опыт - совокупность следующих операций: фиксирование значений внешних переменных параметров; проверка выполнения внешних ограничений (если внешние ограничения не выполняются, проведение опыта прекращается); решение внутренней задачи оптимизации; вычисление значения целевой функции.

I8) Вектор, или точка x - набор значений внешних переменных параметров $x=(x_1,\dots,x_n)$. Точка обозначается также: $x^{(j)}=(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)})$, или $x^{(k,j)}=(x_1^{(k,j)},\dots,x_n^{(k,j)})$, где j - номер точки; К - номер шага алгоритма.

Нижний индекс обозначает номер внешнего переменного параметра. Точка начала координат обозначается $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$.

I9) Глобальная система координат - система координат, при которой начало координат $x^{(0)}$ остается в одной и той же точке в процессе решения внешней задачи оптимизации.

20) Локальные системы координат - системы координат, при которых начало координат $x^{(0)}$ находится в различных точках в процессе решения внешней оптимизации.

2I) Точка $x^{(1)}$ называется более предпочтительной по сравнению с точкой $x^{(2)}$, если для векторного критерия выполняется неравенство $y_{(x^{(1)})} \leqslant y_{(x^{(2)})}$, т.е. среди неравенств $y_1(x^{(1)}) \leqslant y_1(x^{(2)});\dots;$ $y_p(x^{(1)}) \leqslant y_p(x^{(2)})$ найдется хотя бы одно строгое. Если же $y_{(x^{(1)})}=y_{(x^{(2)})}$, т.е. $y_1(x^{(1)})=y_1(x^{(2)});\dots;\ y_p(x^{(1)})=y_p(x^{(2)})$, то точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ называются эквивалентными.

22) Множество точек, для которых не существует более предпочтительных, называется множеством Парето. В точках множества Парето должны выполняться внешние и внутренние ограничения (3),(5). Множество Парето обозначается буквой П.

I.5. Оптимизацию железобетонных конструкций рекомендуется выполнять на основе принципа разделения параметров. Основные положения принципа состоят в следующем:

I) все переменные параметры делятся на две группы; параметры одной группы называются внутренними, другой - внешними.

2) общая задача оптимизации (I), (2), делится на две подзада-

чи - внутреннюю (6) и внешнюю (7);

3) решение внутренней задачи оптимизации строится с использованием ранее разработанных расчетов железобетонных конструкций или методов их оптимизации по части параметров;

4) решение внешней задачи оптимизации строится с помощью алгоритмов, основанных на методах теории планирования экстремальных экспериментов, безусловной минимизации и случайного поиска.

Тестовый пример оптимизации железобетонного изгибаемого элемента прямоугольного сечения

I.6. В п.I.7 настоящих Рекомендаций приведено описание условий тестового примера оптимизации железобетонного изгибаемого элемента прямоугольного сечения. Указанный тестовый пример позволяет продемонстрировать работу алгоритмов, изложенных в разд.3-7, а также иллюстрирует основные определения, перечисленные в пп.I.4-I.5 настоящих Рекомендаций.

I.7. Рассматривается задача оптимального проектирования железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения, на который действует постоянный по величине изгибающий момент M=85кНм

Внешними переменными параметрами выбираются x_1 - ширина сечения (b); x_2 - его высота (h); x_3 - марка бетона ($R_б$). Арматура принимается из стали класса А-П; класс стали не варьируется. Расстояние до центра тяжести сжатой арматуры a' принимается постоянным и равным 3,5 см. Внутренними переменными параметрами выбираются: количество и диаметр арматурных стержней растянутой и сжатой арматуры, определяющих площади F_a и F'_a; количество арматурных каркасов; расстояние до центра тяжести растянутой арматуры; расстояние между стержнями.

Внутренними ограничениями служат требования обеспечения прочности нормального сечения элемента. Внутренняя задача оптимизации состоит в определении минимальных площадей арматуры F_a и F'_a, обеспечивающих прочность сечения. При каждом фиксированном наборе внешних переменных параметров эта задача решается согласно главе СНиП П-21-75.

В прил.6 приведены результаты 960 опытов, выполненных при всех возможных комбинациях следующих дискретных значений внешних переменных параметров:

X_1 (b) - I0,I2,I4,I5,I6,I8,20,22,24,25 см;
X_2 (h) - 25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80 см;
X_3 ($R_б$) - I50,200,250,300,350,400,450,500.

Таким образом, единственными внешними ограничениями являются неравенства типа (4):

$$10 \text{ см} \leq X_1 \leq 25 \text{ см}; \quad 25 \text{ см} \leq X_2 \leq 80 \text{ см}; \quad 150 \leq X_3 \leq 500. \qquad (8)$$

Значение целевой функции y в каждом опыте определяется как сумма стоимостей в деле материалов (бетона и арматуры) при длине элемента, равной 1 м. Удельная стоимость арматуры принята равной 1020 руб/м^3, удельные стоимости бетонов различных марок приведены в табл.1.

Каждый опыт проводится в следующем порядке:

1. Задают значения внешних переменных параметров.

2. Согласно главе СНиП II-21-75 определяют минимальные теоретические площади сечения растянутой и сжатой арматуры, обеспечивающие прочность сечения. При этом принимают, что $a = a' = 3{,}5$ см.

3. Проводят конструирование элемента по одной из схем, приведенных на рис.1. Схему выбирают так, чтобы площадь принятых по сортаменту арматурных стержней превышала найденную теоретически, минимально отличаясь от нее. Диаметры стержней и расстояния между ними выбираются с учетом конструктивных требований главы СНиП II-21-75. Если сжатая арматура по расчету не требуется или ее теоретическая площадь оказывается меньше 1 см^2, при конструировании принимают $F'_a = 1$ см^2.

4. Вычисляют величину h_0. Если она оказывается меньше ранее принятой, операции в соответствии с пп.2 и 3 проводят при новой величине h_0.

5. Подсчитывают стоимости бетона $C_б$, арматуры C_a, а также суммарную стоимость $y = C_б + C_a$.

В прил.6 приведены: значения внешних переменных параметров b, h, $R_б$; номер схемы в соответствии с рис.1, по которой проводили конструирование; значения $C_б, C_a, y$. При некоторых значениях внешних переменных параметров ни одна из схем не удовлетворяет всем требованиям главы СНиП II-21-75 (например, расстояния между стержнями оказываются меньше допустимых). Для этих случаев значение y не приведено – внутренняя задача оптимизации решения не имеет.

Данные прил.6 позволяют без дополнительных вычислений поставить в соответствие любому набору значений внешних переменных параметров значение целевой функции y.

Из прил.6 видно, что задача оказалась многоэкстремальной.

Таблица I Удельные стоимости бетонов разных марок

Марка бетона	I50	200	250	300	350	400	450	500
Удельные стоимости бетонов, руб/м³	36	38,5	40	4I	42,5	44,5	46	47

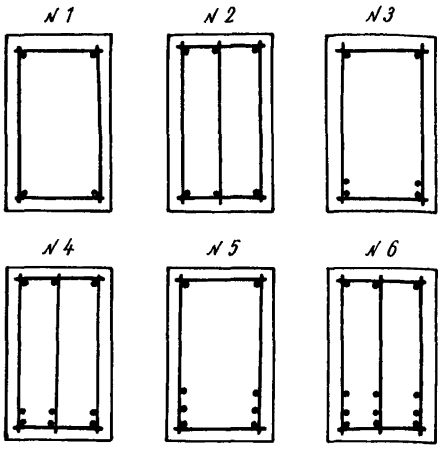


Рис.I. Схемы армирования изгибаемого элемента прямоугольного поперечного сечения в тестовом примере

Локальные минимумы $y(x_1,x_2,x_3)$оказались следующими: y(I0,45,300) = 3,24 руб., y(I0,50,400)=3,27 руб., y(I0,55,250)=3,I4 руб.; глобальный минимум y(I0,55,250)=3,I4 руб.

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Целевая функция и переменные параметры

2.I. Выбор целевой функции следует проводить с учетом конкретных целей проектирования железобетонных конструкций. Как правило, целевой функцией рекомендуется принимать приведенные затраты. Допускается использовать любую другую целевую функцию – суммарную стоимость материалов в деле, расчетную производственную себестои-

мость, оптовую цену, расход арматуры и т.п. Допускается также использовать векторную целевую функцию, состоящую из любого числа скалярных. Скалярными целевыми функциями рекомендуется принимать стоимость, расходы бетона и металла, трудоемкость и пр.

2.2. Для определения значений целевой функции при фиксированных значениях внешних и внутренних переменных параметров рекомендуется пользоваться Руководствами по определению расчетной стоимости и трудоемкости изготовления сборных железобетонных конструкций на стадии проектирования. Конструкции жилых и общественных зданий (М., 1977) и Конструкции промышленных зданий (М., 1976) и Руководством по определению стоимости эксплуатации промышленных зданий и сооружений на стадии проектирования (М., 1977), Нормами расхода материалов и изделий на 1000 $м^2$ приведенной общей площади жилых зданий (М., 1978), Прейскурантом № 06-08 оптовых цен на железобетонные изделия (М., 1974) и другими инструктивными и нормативными документами.

2.3. Переменными параметрами при оптимизации железобетонных конструкций рекомендуется назначать общие геометрические размеры конструкций и геометрические размеры отдельных элементов, марку бетона, класс стали, площади сечений арматуры (обычной и преднапряженной, растянутой и сжатой, продольной и поперечной), величину натяжения предналрягаемой арматуры, число арматурных стержней, количество каркасов и т.п.

2.4. При оптимизации железобетонных конструкций переменные параметры, как правило, следует считать дискретными. В отдельных случаях допускается переменные параметры считать непрерывными.

Например, иногда в расчетах отвлекаются от существующих сортаментов арматурной стали и используют полученные в результате вычислений площади сечения арматуры; если расчет выполняется в исследовательских целях, в нем могут быть использованы реальные характеристики материалов и т.п.

2.5. Если для оптимизируемой железобетонной конструкции определяющими являются условия прочности, оптимальный по стоимости класс рабочей арматуры следует выбрать заранее. С этой целью необходимо:

а) для всех классов арматуры, которые могут найти применение в конструкции, определить площадь сечения арматуры, воспринимающую одну и ту же растягивающую силу;

б) вычислить стоимость арматуры длиной I м с найденной пло-

щадью сечения;

в) в качестве оптимального выбрать тот класс, для которого полученная стоимость минимальна.

Выбор внешних и внутренних переменных параметров. Построение решений внешней и внутренней задач оптимизации железобетонных конструкций

2.6. Выбор внешних и внутренних параметров следует проводить с учетом ранее разработанных методов решения внутренней задачи оптимизации. В пп.2.7–2.9 настоящих Рекомендаций приводятся три характерных случая решения внутренней задачи оптимизации и выбора внутренних переменных параметров.

2.7. Первый случай. Метод расчета конструкции известен; по определенным в результате расчета внутренним усилиям минимальные площади сечения арматуры, при которых удовлетворяются необходимые ограничения, определяются непосредственно согласно главе СНиП по проектированию железобетонных конструкций. При этом согласно главе СНиП П-21-75 определяются также: защитный слой бетона, количество арматурных каркасов и арматурных стержней (продольных и поперечных), расстояния между стержнями и т.п. Все перечисленные параметры, определяемые непосредственно согласно главе СНиП П-21-75 рекомендуется принимать внутренними. Внутреннюю задачу оптимизации рекомендуется решать согласно главе СНиП П-21-75.

Например, при оптимизации железобетонного изгибаемого элемента, рассмотренного в тестовом примере (см.п.1.7 настоящих Рекомендаций), внутреннюю задачу оптимизации решали согласно главе СНиП по проектированию железобетонных конструкций, определяя минимальную площадь сечения арматуры, удовлетворяющую условию прочности.

2.8. Второй случай. Метод расчета конструкции известен, но по определенным в результате расчета внутренним усилиям минимальную площадь сечения арматуры, при которой удовлетворяются необходимые ограничения, непосредственно согласно главе СНиП П-21-75 подобрать нельзя: для действующих усилий существует только поверочный расчет.

Здесь внутренние переменные параметры рекомендуется выбирать такими же, как в первом случае. Внутреннюю задачу оптимизации рекомендуется решать согласно главе СНиП П-21-75 в сочетании с одним из методов одномерного поиска *

* Методы одномерного поиска изложены, например, в книге Д.Уайлда "Методы поиска оптимума" (М., 1967).

Один из методов одномерного поиска – метод деления отрезка пополам – изложен в прил. 2 настоящих Рекомендаций.

Например, пусть требуется оптимизировать железобетонное прямоугольное сечение, работающее на косое внецентренное сжатие при фиксированной величине действующих усилий. Минимальное из условий прочности армирование при заданных геометрических размерах сечения и характеристиках материалов определяется следующим образом. Задают все возможные варианты армирования и располагают их в порядке возрастания несущей способности. В соответствии с процедурой какого-либо из методов одномерного поиска назначают один из возможных вариантов и проверяют его несущую способность по СНиП. Если несущая способность оказывается меньше требуемой, принимают следующий вариант с большим армированием; если несущая способность больше требуемой – вариант с меньшим армированием. Процесс повторяют до тех пор, пока при одном значении площади сечения арматуры несущая способность больше требуемой, а при другом ближайшем возможном значении, меньшем предыдущего, несущая способность недостаточна. Это предыдущее значение и определяет вариант с минимальным армированием.

Числовой пример, иллюстрирующий рассматриваемый случай, приведен в прил.2 настоящих Рекомендаций.

2.9. Третий случай. Известен метод оптимизации конструкции по некоторым параметрам. Остальные параметры, которые можно было бы варьировать в процессе оптимизации, остаются фиксированными. Принцип разделения параметров позволяет принять все параметры переменными, разделив их на внутренние и внешние. Внутренними рекомендуется выбирать параметры, служившие переменными в разработанном методе оптимизации; внешними – ранее фиксированные параметры. Внутреннюю задачу рекомендуется решать с использованием разработанного метода оптимизации. Внешние переменные параметры в каждом опыте фиксируют в соответствии с процедурой решения внешней задачи оптимизации.

Примечание. Например, С.М.Крыловым и др.* разработан метод оптимального армирования железобетонных рам. Переменными параметрами при решении задачи были площади поперечных сечений и места расположения ар-

* Крылов С.М. и др. Оптимальное армирование статически неопределимых железобетонных рам с учетом требований трех предельных состояний – В кн.: Теория железобетона. М., 1972.

матурных стержней, марка бетона, класс стали. Геометрические размеры сечений прямоугольных элементов рам фиксировали. Для решения задачи применяли линейное программирование.

Принцип разделения параметров позволяет расширить и обобщить разработанный метод оптимального армирования, поставив задачу оптимального проектирования железобетонных рам по стоимости. Внутренними переменными параметрами рекомендуется принять площади поперечных сечений и места расположения арматурных стержней, марку бетона, класс стали; внешними - геометрические размеры сечений элементов стали. В каждом опыте геометрические размеры сечений элементов фиксируют и решают внутреннюю задачу оптимизации с использованием линейного программирования, определяя оптимальные значения внутренних переменных параметров. Зная удельные стоимости материалов, находят общую стоимость конструкции. В результате решения внешней задачи оптимизации определяют раму минимальной стоимости.

Аналогичный числовой пример приведен в прил. 4 настоящих Рекомендаций.

2.10. Решение внутренней задачи оптимизации должно учитывать, если необходимо, множество нагружений конструкции. Учет многих загружений при решении внутренней задачи оптимизацию рекомендуется проводить так же, как и при обычном проектировании: каждый опыт представляет собой вариант проектирования конструкции.

Пусть, например, расчет конструкции выполняется в упругой стадии, а подбор сечений арматуры (внутренних переменных параметров) проводится согласно главе СНиП П-21-75. Тогда выполняют расчет на каждое загружение. Затем выбирают невыгодные сочетания нагрузок и подбирают минимальные площади сечения арматуры п р и действии каждого сочетания. Окончательно принимают максимальную из полученных площадей. Такую процедуру повторяют в каждом опыте.

2.11. Решение внутренней задачи оптимизации должно учитывать требования всех предельных состояний. При этом одно из состояний рекомендуется считать основным, а другие - дополнительными. В процессе решения внутренней задачи оптимизации вначале удовлетворяют требованиям основного состояния так, чтобы целевая функция имела минимальное значение. Для удовлетворения требованиям других предельных состояний применяют пороговую оптимизацию: проводя оптимизацию по основному предельному состоянию, требуют, чтобы одновременно выполнялись требования дополнительных предельных состояний.

Пусть, например, как и в примере п.2.10 настоящих Рекомендаций, расчет конструкции выполняется в упругой стадии, а подбор сечений арматуры проводится согласно главе СНиП II-21-75. Основным предельным состоянием можно выбрать прочность; дополнительными - жесткость и ширину раскрытия трещин. Подбирая сечение арматуры, удовлетворяют требованиям основного предельного состояния. Если при этом деформации или ширина раскрытия трещин больше допустимых, сечение арматуры увеличивают. Пытаются добиться выполнения требований дополнительных предельных состояний при минимальном расходе арматуры.

2.12. Внешнюю задачу оптимизации рекомендуется решать проведением ряда опытов. Фиксированные наборы значений внешних переменных параметров в опытах рекомендуется задавать согласно алгоритмам, приведенным в разделах 3-6 настоящих Рекомендаций.

При фиксированных наборах значений внешних переменных параметров выполнение внешних ограничений (3) рекомендуется просто проверять. Если в каком-либо опыте внешние ограничения (3) не выполняются, это рекомендуется учитывать одним из следующих способов:

1) на целевую функцию накладывается штраф - ее значение в опыте увеличивается по определенным правилам;

2) принятый с целью уменьшения целевой функции порядок изменения внешних переменных параметров отменяется и отыскивается новый порядок их изменения.

2.13. При решении внутренней задачи оптимизации может оказаться, что в каком-либо из опытов не существует значений внутренних переменных параметров, удовлетворяющих внутренним ограничениям (5), т.е. внутренняя задача оптимизации решения не имеет. В этом случае рекомендуется поступать так же, как и в случае, когда в опыте не выполняются внешние ограничения (см.п.2.12 настоящих Рекомендаций).

2.14. В общем случае при разделении переменных параметров на внутренние и внешние должны выполняться следующие требования.

1) внешние и внутренние переменные параметры должны делить ограничения на две группы - внешние ограничения, содержащие только внешние переменные параметры, и внутренние ограничения, содержащие как внешние, так и внутренние переменные параметры;

2) в большинстве опытов должны существовать значения внутренних переменных параметров, при которых выполняются все внутрен-

ние ограничения, т.е. должна иметь решение внутренняя задача оптимизации;

3) большая часть ограничений на конструкцию должна быть отнесена к внутренним ограничениям; внешние ограничения должны быть слабыми: чем слабее внешние ограничения, тем успешнее осуществляется оптимизация на основе принципа разделения параметров. Наилучшим является случай, когда внешние ограничения сводятся к виду (4);

4) внутренними переменными параметрами следует назначать минимальное число параметров, удовлетворяющим требованиям I-3; остальные параметры принимаются внешними.

Как правило, внутренними параметрами рекомендуется принимать параметры, связанные с армированием - площади сечений арматуры (растянутой и сжатой, обычной и предварительно напряженной, продольной и поперечной), величину натяжения преднапрягаемой арматуры, число арматурных каркасов, расстояния между арматурными стержнями, защитный слой бетона, геометрические размеры, связанные с размещением арматуры и т.п. Внешними переменными параметрами, как правило, рекомендуется назначать общие геометрические размеры конструкции, геометрические размеры отдельных ее элементов, характеристики материалов.

Нормирование и округление внешних переменных параметров. Движение

2.I5. Для некоторых алгоритмов решения внешней задачи оптимизации (см.разделы 3-6 настоящих Рекомендаций) внешние переменные параметры рекомендуется приводить к безразмерному виду, или нормировать. Для нормирования внешних переменных параметров назначают точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)})$, в которую помещают начало координат. Эта точка должна удовлетворять двум условиям:

I) в ней выполняются внешние ограничения (3);

2) внутренняя задача оптимизации в этой точке имеет решение.

Нормированное значение внешнего параметра определяют по формуле

$$\bar{x}_i = (x_i - x_i^{(0)})/a_i , \qquad (9)$$

где x_i - некоторое размерное значение i-го переменного параметра.

Величину a_i в формуле (9) принимают на основании следующих соображений. Если шаг изменения внешнего переменного параметра x_i сохраняется постоянным, то величину a_i принимают равной

этому шагу. Шаг изменения переменного параметра может быть разным. Пусть внешний параметр x_i имеет p разных шагов $a_{i1},\dots a_{ip}$. Тогда допускается использовать два способа нормирования этого внешнего параметра, принимая в формуле (9):

I) $a_i = max(a_{i1},\dots,a_{ip})$ и 2) $a_i = min(a_{i1},\dots,a_{ip})$.

При неравномерном шаге возможен также третий способ нормирования: все значения $\bar{x}_j$ считают равноудаленными друг от друга, расстояния между ними принимают равными любому целому числу (чаще всего единице).

2.I6. Иногда дискретные значения внешнего переменного параметра задают некоторыми символами, не имеющими физического смысла. Тогда размерным значением параметра рекомендуется принимать какую-либо характерную величину, имеющую физический смысл. Например, различные классы арматуры обозначают символами А-I, Ат-VI и т.п. Характерной величиной, задающей размерные значения внешнего переменного параметра, принимают расчетное сопротивление арматуры R_a, которое используют в формуле (9).

2.I7. Дискретность внешних переменных параметров в алгоритмах решения внешней задачи оптимизации рекомендуется учитывать округлением непрерывных значений до ближайших дискретных. С этой целью вводят операцию округления.

Пусть из n внешних параметров r переменных параметров $x_i\,(i=1,\dots,r)$ непрерывны, а $(n-r)$ переменных параметров $x_i\,(i=r+1,\dots,n)$ дискретны. Пусть некоторые значения внешних переменных параметров $x_1,\dots,x_n$ получены без учета дискретности $(n-r)$ параметров. Пусть ближайшие дискретные значения $(n-r)$ параметров равны $x_i^*\,(i=r+1,\dots,n)$. Операцию округления обозначают Ок и записывают так:

$$\underset{x_{r+1},\dots,x_n}{Ok}(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_n^*) \quad (10)$$

Если округление проводится по всем внешним переменным параметрам, это записывают так:

$$Ok(x_1,\dots,x_n) = (x_1^*,\dots,x_n^*),\ \text{или}\ Ok(x) = (x^*). \quad (11)$$

Опыты проводят при значениях внешних параметров, получаемых в результате округления.

2.I8. При разработке алгоритмов решения внешней задачи оптимизации рекомендуется пользоваться понятием движения.

Для движения необходимо иметь систему координат и определить в ней направляющий вектор, задающий прямую. Совершить движение - это значит найти точку на прямой (если все внешние переменные

параметры непрерывны) или точку, ближайшую к прямой (если среди внешних переменных параметров есть дискретные), так, чтобы в этой точке выполнялись все ограничения и целевая функция имела минимальное значение по сравнению соответственно с точками на прямой или точками, ближайшими к прямой. Точка $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ считается ближайшей к прямой, если на прямой существует такая точка $(x_1,\dots,x_n)$, что $0к(x_1,\dots,x_n)=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$; при этом предполагается, что округление осуществляется по всем дискретным параметрам.

2.19. Для выполнения движения рекомендуется использовать процедуру, состоящую в последовательном задании точек, ближайших к направлению движения. В п.2.20 настоящих Рекомендаций эта процедура описана для случая, когда все внешние переменные параметры дискретны. Случай, когда среди внешних переменных параметров есть непрерывные, рассмотрен в п.3.13 настоящих Рекомендаций.

Для выполнения движения допускается использовать различные процедуры одномерного поиска в сочетании с округлением, проводимым по формулам (10), (11).

2.20. Для выполнения процедуры движения, состоящей в последовательном задании точек, ближайших к направлению движения, следует принять:

$\bar{S}=(\bar{S}_1,\dots,\bar{S}_n)$ – направляющий вектор;

$\bar{x}^{(0)}=(\bar{x}_1^{(0)},\dots,\bar{x}_n^{(0)})$ – точку начала движения, через которую проходит направляющий вектор.

Чтобы провести движение, представляют вектор в несколько ином виде. Находят такое z, что $\bar{S}_z=\max_i|\bar{S}_i|$. Определяют вектор l:

$$l=(\bar{S}_1,\dots,\bar{S}_n)/|\bar{S}_z|. \qquad (12)$$

В векторе l $\max_i|l_i|=|l_z|=1$. Задача движения состоит в отыскании точки $\bar{x}^{(1)}$, в которой удовлетворяются внутренние и внешние ограничения и выполняется условие:

$$y(\bar{x}^{(1)})=\min_j y[0к(\bar{x}^{(0)}+\lambda_j l)]. \qquad (13)$$

Для решения задачи рассматривают ряд последовательных соседних дискретных значений нормированного внешнего переменного параметра $\bar{x}_{zj}(j=0,1,2,\dots)$ в направлении, определяемом знаком координаты l_z вектора l (если координата l_z положительна, то $\bar{x}_{z0}<\bar{x}_{z1}<\bar{x}_{z2}<\dots$); значение $\bar{x}_{z0}$ совпадает с координатой $\bar{x}_z^{(0)}$ точки $\bar{x}^{(0)}$. Затем задают значения λ_j по формуле

$$\lambda_j=\bar{x}_{zj}-\bar{x}_{z0};\quad j=0,1,2,\dots$$

Тогда выражение $y(\bar{x}^{(0)} + \lambda \cdot l)$ даст все точки, ближайшие к лучу с началом в точке $\bar{x}^{(0)}$; направление луча определяется вектором l. Чтобы найти точку $x^{(1)}$ по формуле (I3), достаточно вычислять выражение $y = y[OK(\bar{x}_0 + \lambda_j l)]$ при $j = 0, I, 2, \ldots$ до тех пор, пока выполняются внутренние и внешние ограничения и целевая функция уменьшается. В этом состоит процедура движения в направлении вектора $\bar{S}$.

В процессе движения один или несколько внешних переменных параметров могут принять граничные значения d_{i1} или d_{i2} из (4). Пусть $t < n$ параметров $x_1, \ldots, x_t$ приняли граничные значения (этого можно добиться изменением нумерации параметров). При движении фиксируют эти параметры, приравняв их значения граничным. Продолжают движение, считая $\bar{S} = (\bar{S}_{t+1}, \ldots, \bar{S}_n)$. Совершают движение, если целевая функция уменьшается и выполняются внутренние и внешние ограничения (3), (5). В противном случае движение прекращают. Движение также прекращают, если $t = n$.

В формуле (I3) под вектором l понимают как вектор, определяемый по формуле (I2), так и "укороченный" вектор $l = (l_{t+1}, \ldots, l_n)$. Переход от вектора $\bar{S} = (\bar{S}_{t+1}, \ldots, \bar{S}_n)$ к вектору $l = (l_{t+1}, \ldots, l_n)$ осуществляют по формуле (I2).

Назначение начальных приближений

2.2I. При оптимизации железобетонных конструкций в качестве начальных приближений рекомендуется принимать наилучшие известные решения, удовлетворяющие необходимым ограничениям. Такие решения рекомендуется принимать, используя имеющиеся аналоги, инженерный опыт и интуицию. Приведенные ниже рекомендации по назначению начальных приближений обобщают опыт оптимизации некоторых конструкций.

I. В двутавровых и тавровых сечениях элементов конструкций, работающих на изгиб, ширину и толщину полок рекомендуется назначать минимальными. В двутавровых сечениях рекомендуется назначать минимальной также толщину стенки. В прямоугольных и тавровых сечениях толщина стенки также должна быть минимальной, но с учетом расположения растянутой арматуры: следует иметь в виду, что при очень малой ширине, когда растянутую арматуру приходится располагать в несколько рядов по высоте, плечо внутренней п а р ы уменьшается, вследствие чего расход арматуры и стоимость увеличиваются. Высоту сечений рекомендуется, как правило, назначать в

пределах I/I0-I/20 пролета. Марку бетона для конструкций без предварительного напряжения арматуры рекомендуется назначать в пределах 250-350, а для предварительно-напряженных конструкций - в пределах 400-500.

2. Сечения внецентренно сжатых элементов конструкций с очень малыми эксцентрицитетами рекомендуется в начальном приближении проектировать близкими к квадратным, а марку бетона назначать максимальной. Геометрические размеры таких сечений при заданной марке бетона рекомендуется назначать максимальными, чтобы несущая способность элемента минимально отличалась от заданной при минимальном армировании. Чем больше эксцентрицитет, тем больше должно быть соотношение между высотой прямоугольного сечения и его шириной; при увеличении эксцентрицитета рекомендуется т а к ж е снижать марку бетона. В пределе при действии только изгибающего момента без нормальной силы сечения задаются по рекомендациям п.I.

3. Из условий прочности целесообразно повышать класс стали рабочей арматуры. В конструкциях с ненапрягаемой арматурой, если определяющими являются требования ограничения по ширине раскрытия трещин, класс стали рабочей арматуры иногда целесообразно понижать.

4. Толщину поля ребристых плит - сборных и монолитных, плоских и криволинейных - следует назначать минимально возможной.

5. В фундаментах марку бетона следует назначать в пределах 200-300. Геометрические размеры фундаментов, как правило, определяются несущей способностью по грунту и расчетом на продавливание.

6. Жесткости стержней плоских рам, работающих на одновременное действие статических и сейсмических нагрузок, следует назначать минимально возможными.

7. В пологих оболочках положительной гауссовой кривизны стрелы подъема в центре и на контуре следует назначать максимальными.

Положения п.2.2I позволяют приблизить начальные приближения к оптимальным по стоимости решениям и тем самым сократить процесс оптимизации.

3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭЕСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЕСПЕРИМЕНТОВ

Основные положения

3.I. Методы решения внешней задачи оптимизации на основе теории планирования экстремальных экспериментов рекомендуется, как правило, использовать для оптимизации железобетонных конструкций, проводимом при взаимодействии системы "человек-машина" (когда формализованная часть операции выполняется на ЭВМ, а неформализованная - исследователем) и в комбинации с другими методами (см. п.4.9 настоящих Рекомендаций). Допускается также использовать методы для оптимизации, проводимой "вручную".

Методы предусматривают случаи, когда внешние переменные параметры могут быть как дискретными, так и непрерывными.

3.2. Алгоритм решения внешней задачи оптимизации железобетонных конструкций на основе теории планирования экстремальных экспериментов строится следующим образом (см.п.I.3 настоящих Рекомендаций).

А. Задают точку начального приближения $x^{(1,0)}$. Принимают К=I .

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции:

I. Выбирают линейный план. Проводят опыты в точке $x^{(\kappa,0)}$ и в точках $x^{(\kappa,j)}$, определяемых линейным планом, если эти опыты не были проведены ранее.

2. Находят градиент целевой функции, выполняют движение в направлении антиградиента.

3. Точку с наименьшим значением целевой функции обозначают $x^{(\kappa+1,0)}$. Переходят к выполнению (К+I)-го шага.

В. Алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не получают уменьшения целевой функции.

В пп.3.3-3.I5 настоящих Рекомендаций даны указания о выборе линейных планов и процедуре движения по антиградиенту.

Линейные планы

3.3. Линейные планы дают возможность получать аппроксимацию зависимости между целевой функцией и внешними переменными параметрами в виде

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{x}_i , \qquad (I4)$$

где $\bar{x}_i$ - нормированное значение внешнего переменного параметра, полученное по формуле (9); b_i - коэффициенты.

Для определения коэффициентов b_i рекомендуется использовать односторонние градиентные планы I и П, центральные градиентные

планы, планы Бокса-Уилсона и Плакетта-Бермана (см.пп.3.5-3.I2 настоящих Рекомендаций).

Указания по выбору конкретного плана даны в п.3.I5 настоящих Рекомендаций.

3.4. Линейные планы представляются в виде таблиц - матриц планирования (см.табл.2-9 настоящих Рекомендаций). Элементами матриц являются нормированные значения внешних переменных параметров. Нормирование проводится по формуле (9). Величина $(x_i^{(0)} + a_i)$ называется верхним уровнем параметра; величина $(x_i^{(0)} - a_i)$ - его нижним уровнем; $x_i^{(0)}$ - нулевым уровнем. В соответствии с формулой (9) цифры +I,0-I означают, что внешний переменный параметр находится соответственно на верхнем, нижнем и нулевом уровнях.

Каждый столбец матрицы относится к одному из внешних переменных параметров. Каждая строка матрицы определяет набор внешних переменных параметров в опыте. Число строк в матрице планирования равно числу опытов, проводимых для получения линейной аппроксимации (I4).

Таблица 2. Односторонний градиентный план I

№ опыта	Матрица планирования				y_i
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	...	$\bar{X}$	
0	0	0	...	0	y_0
I	+I	0	...	0	y_1
2	0	+I	...	0	y_2
...	...	...	...	...	...
n	0	0	...	+I	y_n

Таблица 3. Односторонний градиентный план П

№ опыта	Матрица планирования				y_i
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	...	$\bar{X}_n$	
0	0	0	...	0	y_0
I	-I	0	...	0	y_1
2	0	-I	...	0	y_2
...	...	...	...	...	...
n	0	0	...	-I	y_n

3.5. Односторонний градиентный план I представлен в табл. 2 . В нулевом опыте (начальное приближение) значения всех нормиро —

ванных внешних переменных параметров равны нулю. В i -ом опыте ($i=1,\ldots,n$) нормированное значение параметра $\bar{x}_i$ равно +1; значения остальных параметров сохраняются равными нулю. По результатам опытов значения коэффициентов b_i в аппроксимации (14) определяются по формулам:

$$b_0 = y_0; \quad b_i = y_i - y_0 \ (i = 1,\ldots,n), \qquad (15)$$

где y_i - значение целевой функции в i -ом опыте.

Пример 1 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение одностороннего градиентного плана I.

Таблица 4. Центральный градиентный план

№ опыта	Матрица планирования				y_i
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	...	$\bar{X}_n$	
0	0	0	...	0	y_0
1	-1	0	...	0	y_1
2	+1	0	...	0	y_2
3	0	-1	...	0	y_3
4	0	+1	...	0	y_4
...	...	...	...	...	...
$2n-1$	0	0	...	-1	y_{2n-1}
$2n$	0	0	...	+1	y_{2n}

3.6. Односторонний градиентный план 2 представлен в табл.3. Отличия от одностороннего градиентного плана 1 состоит в том, что в i -ом опыте ($i=1,\ldots,n$) нормированное значение параметра $\bar{x}_i$ равно -1. По результатам опытов значения коэффициентов в аппроксимации (14) определяются по формулам:

$$b_0 = y_0; \quad b_i = y_0 - y_i \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (16)$$

3.7. Центральный градиентный план представлен в табл.4. Коэффициенты b_i в аппроксимации (14) определяются по формулам:

$$b_0 = y_0; \quad b_i = (y_{2i} - y_{2i-1})/2 \quad (i = 1,\ldots,n). \qquad (17)$$

Пример 2 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение центрального градиентного плана.

3.8. При числе внешних переменных параметров $n=2$ в качестве планов Бокса-Уилсона рекомендуется использовать полный факторный эксперимент (ПФЭ) типа 2^2, матрица планирования которого представлена в табл.5. При использовании рассматриваемой матрицы всего проводится 4 опыта. Этими опытами исчерпываются все возможные ком-

бинации двух параметров, варьируемых на двух уровнях. В первом столбце матрицы планирования приведены значения фиктивного переменного параметра $\bar{X}_0 = +1$; во втором и третьем столбцах значения переменных параметров $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$. В четвертом столбце записано произведение $\bar{X}_1\bar{X}_2$ – результат почленного перемножения элементов второго и третьего столбцов.

3.9. Для простроения ПФЭ типа 2^n при числе внешних переменных параметров $n \geqslant 2$ рекомендуется использовать кодовую запись матрицы планирования. Каждому внешнему переменному параметру ставится в соответствие буква латинского алфавита: параметрам $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ соответствуют буквы $a, b, c, \ldots$ Например, в табл.5 знак (1), стоящий в первой строке, показывает, что в первом опыте оба параметра X_1, X_2 находятся на нижнем уровне. Буквы a и b (вторая и третья строки) обозначают, что во втором опыте на верхнем уровне находится параметр X_1, а в третьем X_2. Произведение букв ab (четвертая строка) показывает, что в четвертом опыте на верхнем уровне находятся оба параметра. Таким образом, в кодовом обозначении строк буква записывается тогда и только тогда, когда соответствующий параметр находится на верхнем уровне. В указанных обозначениях матрица планирования в табл.5 запишется строкой

$$(1), a, b, ab. \qquad (18)$$

Такая запись позволяет легко строить матрицу ПФЭ типа 2^{K+1}, если известна матрица ПФЭ типа 2^K. Например, матрица ПФЭ типа 2^3, когда известна матрица ПФЭ типа 2^2 (18), строится так. Вводится в рассмотрение третий параметр X_3. Ему соответствует буква c. Исчерпать все комбинации трех параметров, варьируемых на двух уровнях, можно следующим образом. Матрицу планирования для параметров $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ повторяют дважды: один раз, когда $\bar{X}_3$ находится на верхнем уровне ($\bar{X}_3 = +1$), а другой – на нижнем ($\bar{X}_3 = -1$). Первая часть кодовой записи матрицы ПФЭ типа 2^3 совпадает с записью (18), а вторая часть может быть получена из записи (18) умножением всех членов на c. В результате ПФЭ типа 2^3 запишется так:

$$1, a, b, ab, c, ac, bc, abc. \qquad (19)$$

Матрица планирования (19) в развернутом виде представлена в табл.6. Аналогично ПФЭ типа 2^4 записывается в виде

$$(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd. \qquad (20)$$

Здесь первые восемь опытов проводятся при $\bar{X}_4 = -1$, их запись пов-

Таблица 5. Полный факторный эксперимент типа 2^2

№ опыта	Матрица планирования				Кодовое обозначение строк	y_i
	$\bar{X}_0$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1\bar{X}_2$		
I	+I	-I	-I	+I	(I)	y_1
2	+I	+I	-I	-I	a	y_2
3	+I	-I	+I	-I	b	y_3
4	+I	+I	+I	+I	ab	y_4

Таблица 6. Полный факторный эксперимент типа 2^3

№ опыта	Матрица планирования								Кодовое обозначение строк	y_i
	$\bar{X}_0$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1\bar{X}_2$	$\bar{X}_1\bar{X}_3$	$\bar{X}_2\bar{X}_3$	$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$		
I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	(I)	y_1
2	+I	+I	-I	-I	-I	-I	+I	+I	a	y_2
3	+I	-I	+I	-I	-I	+I	-I	+I	b	y_3
4	+I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	ab	y_4
5	+I	-I	-I	+I	+I	-I	-I	+I	c	y_5
6	+I	+I	-I	+I	-I	+I	-I	-I	ac	y_6
7	+I	-I	+I	+I	-I	-I	+I	-I	bc	y_7
8	+I	+I	+I	+I	+I	+I	+I	+I	abc	y_8

торяет запись (I9). Опыты с 9 по I6 проводятся при $\bar{X}_4$=+I, их запись получена умножением всех членов записи (I9) на d. При n внешних параметрах число опытов в ПФЭ $N=2^n$.

В матрицу планирования ПФЭ типа 2^n, кроме n столбцов линейных членов, входят столбцы всевозможных произведений внешних переменных параметров; число таких произведений определяется выражением $2^n - n - I$.

3.I0. При числе внешних переменных параметров $n > 2$ в качестве планов Бокса-Уилсона рекомендуется использовать дробные реплики. Дробные реплики образуются из ПФЭ типа 2^p ($p < n$), если отнести столбцы произведений внешних переменных параметров в матрице планирования к дополнительным внешним переменным параметрам максимально возможное число которых равно $n - p$; при этом в первую очередь следует использовать произведения, содержащие наибольшее число внешних переменных параметров.

Число p следует выбирать так, чтобы выполнялось неравенство

$n \leq 2^p - 1$ и чтобы число 2^p–I было ближайшим к n .

Например, пусть n =3. Тогда для образования дробной реплики следует выбирать ПФЭ типа 2^2, так как при p=2 $n = 2^p$–I. Дробная реплика получится, если отнести столбец произведения $\bar{X}_1\bar{X}_2$ к внешнему переменному параметру $\bar{X}_3$, т.е. $\bar{X}_3 = \bar{X}_1\bar{X}_2$ (табл.5). Аналогично при n =6 для образования дробной реплики следует использовать ПФЭ типа 2^3, так как при p=3 число 2^3–I больше n и из всех чисел вида 2^p–I является ближайшим к n . При этом к переменным параметрам $\bar{X}_4$, $\bar{X}_5$, $\bar{X}_6$ следует отнести столбец произведения $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ и любые два столбца из трех, содержащих произведения $\bar{X}_1\bar{X}_2$, $\bar{X}_2\bar{X}_3$, $\bar{X}_1\bar{X}_3$ (например, $\bar{X}_4 = \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$, $\bar{X}_5 = \bar{X}_1\bar{X}_2$, $\bar{X}_6 = \bar{X}_2\bar{X}_3$).

Примеры 3,4 настоящих Рекомендаций иллюстрируют применение линейных планов Бокса–Уилсона.

3.II. При $n \geq 8$ наряду с планами Бокса–Уилсона рекомендуется использовать также планы Плакетта–Бермана (более подробные указания приведены в п.3.I5 настоящих Рекомендаций). В табл.7 представлены данные для построения планов Плакетта–Бермана для числа внешних переменных параметров n =II,I9,23,35 при числе опытов соответственно N =I2,20,24,36. В табл.7 для каждого n приведена строка из +I и –I. Элементы этой строки записываются в качестве первых (N –I) элементов столбца $\bar{X}_i$ матрицы планирования. Первые (N –I) элементов столбца $\bar{X}_i$ (i=2,3,...,n) получают, если первый элемент столбца $\bar{X}_{i-1}$ заменить на его (N –I)-ый элемент, сдвинув все остальные элементы на одну строку вниз. Последним, N –ым элементом каждого столбца записывают –I. В табл. 8 приведена полученная таким образом матрица планирования для N =I2 (n =II).

Для получения плана при N =28 в табл.9 выписаны три блока A, B и C, состоящие из +I и –I. Необходимый план будет образован, если записать эти блоки в порядке круговой перестановки.

A	B	C
C	A	B
B	C	A

и добавить последнюю строку из –I.

3.I2. При использовании ПФЭ, дробных реплик и планов Плакетта–Бермана коэффициенты b_i в аппроксимации (I4) определяются по формулам:

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^{N} \bar{X}_{iu} y_u \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (2I)$$

где N – число опытов, проводимых в соответствии с матрицей пла-

Таблица 7. Элементы столбцов матриц планирования планов Плакетта-Бермана

n	N	Нормированные значения внешних параметров
II	I2	+I +I -I +I +I +I -I -I -I +I -I
I9	20	+I +I -I -I +I +I +I +I -I +I -I +I -I -I -I -I +I +I -I
23	24	+I+I+I+I+I-I+I-I +I+I -I-I+I+I-I-I+I-I+I-I+I-I-I
35	36	-I+I-I+I+I+I-I-I -I+I+I+I+I+I-I+I+I+I+I-I-I+I-I-I-I-I+I-I+I -I+I+I-I-I+I-I

Таблица 8. План Плаккетта-Бермана при n =II

№ опыта	Матрица планирования											
	$\bar{X}_0$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_6$	$\bar{X}_7$	$\bar{X}_8$	$\bar{X}_9$	$\bar{X}_{10}$	$\bar{X}_{11}$
I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	+I
2	+I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I
3	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I
4	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I	+I
5	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I
6	+I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I	-I	-I
7	+I	-I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I	-I
8	+I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I	-I
9	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I	+I
I0	+I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	+I	+I	-I
II	+I	-I	+I	-I	-I	-I	+I	+I	+I	-I	+I	+I
I2	+I	-I	-I	-I	-I	-I	-I	-I	-I	-I	-I	-I

нирования; $\bar{X}_{iu}$ – элемент матрицы планирования; y_u –значение целевой функции, полученное в u –ом опыте; i,u – соответственно номера столбца и строки матрицы планирования.

Формула (2I) означает, что для получения коэффициента b_i нужно найти скалярное произведение векторов, представляющих вектор-столбец целевой функции и i –й вектор-столбец матрицы планирования.

Например, используя матрицу планирования, представленную в табл.5, получают:

$$b_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4); \quad b_2 = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4). \quad (22)$$

3.I3. В соответствии с алгоритмом решения внешней задачи оптимизации железобетонных конструкций, приведенном в п.3.2 настоящих Рекомендаций, после получения аппроксимации (I4) следует найти градиент целевой функции и провести движение по антиградиенту.

Таблица 9. Блоки для плана Плакетта-Бермана при $n = 27$

A	B	C
+1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1	−1 +1 −1 −1 −1 +1 −1 −1 +1	+1 +1 −1 −1 +1 +1 +1 −1 +1
+1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1	−1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 −1 +1	−1 +1 −1 +1 +1 +1 +1 −1 +1
+1 +1 −1 +1 +1 +1 −1 −1 −1	−1 −1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 +1	−1 −1 +1 +1 +1 +1 +1 −1 +1
−1 +1 +1 −1 +1 +1 −1 −1 −1	+1 −1 −1 −1 +1 −1 −1 +1 +1	+1 −1 +1 −1 +1 −1 +1 +1 +1
−1 −1 −1 +1 −1 −1 +1 +1 +1	−1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1 +1	+1 +1 −1 +1 −1 −1 −1 +1 +1
−1 −1 −1 −1 +1 −1 +1 +1 +1	+1 −1 −1 −1 +1 +1 −1 −1 +1	−1 +1 +1 −1 +1 −1 −1 −1 +1
−1 −1 −1 −1 −1 +1 +1 +1 +1	−1 +1 −1 −1 −1 +1 +1 −1 −1	+1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 −1 −1
+1 +1 −1 −1 −1 +1 −1 +1 +1	−1 −1 +1 −1 −1 −1 +1 +1 −1	+1 +1 −1 +1 +1 −1 +1 −1 −1
+1 +1 +1 −1 −1 −1 +1 −1 +1	+1 −1 −1 +1 −1 −1 −1 +1 −1	+1 +1 +1 −1 +1 +1 −1 +1 −1
+1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 +1 −1	−1 +1 −1 −1 +1 −1 −1 −1 +1	−1 +1 +1 +1 −1 +1 +1 −1 −1
+1 +1 +1 +1 +1 −1 −1 −1 +1	−1 −1 +1 −1 −1 +1 −1 −1 −1	+1 −1 +1 +1 +1 −1 +1 +1 −1

В п.2.20 настоящих Рекомендаций рассмотрена процедура движения в направлении вектора $\bar{S}$. Вектор $b = (b_1, \ldots, b_n)$, составленный из коэффициентов b_i $(i = 1, \ldots, n)$ уравнения (14), является градиентом целевой функции при нормированных внешних переменных параметрах. Вектор антиградиента равен $-b$. Этот вектор задан в локальной системе координат с началом в нулевой точке. Движение по антиградиенту допускается выполнять, используя любой метод одномерного поиска в сочетании с округлением. Ниже рассмотрены особенности описанной в п.2.20 настоящих Рекомендаций процедуры движения, состоящей в последовательном задании точек, расположенных на антиградиенте или ближайших к нему. Различают два случая, когда все внешние переменные параметры дискретны и когда среди них есть непрерывные.

Пусть все внешние переменные параметры дискретны. Чтобы провести движение по антиградиенту, находят такое z, что $b_z = max|b_i|$. Определяют вектор l:

$$l = -b/|b_z| = -(b_1, \ldots, b_n)/|b_z| . \qquad (23)$$

Проводят опыты в точках $\bar{X}_j = 0\kappa(\lambda_j l)$, где λ_j – некоторые числа, на которые последовательно умножается вектор l, а j – номер точки при движении по антиградиенту. Рекомендуется совершать движение по антиградиенту, принимая значения λ_j последовательно равными всем возможным нормированным значениям внешнего параметра $\bar{X}_z$; после округления значений переменных параметров получают все ближайшие к направлению вектора – антиградиента точки.

Для сокращения числа опытов допускается совершать движение по антиградиенту, пропуская некоторые точки. Тогда, назначая величину λ_j в начале движения, принимают во внимание, насколько близки значения целевой функции в точке $X^{(0)}$, вычисленные из опыта и из уравнения (I4): чем эти два значения ближе, тем лучше приближение и тем больше величину λ_j можно выбрать. В дальнейшем снова сравнивают значения целевой функции, полученные из опытов и из уравнения (I4); величины λ_j назначают по тем же соображениям. Обычно будут выполняться неравенства $\lambda_j < \lambda_t$ при $j < t$. Однако если после проведения какого-либо опыта будут основания предполагать, что минимум целевой функции пропущен, то в следующем опыте можно принять $\lambda_{j+1} < \lambda_j$.

Если среди внешних переменных параметров есть непрерывные, переходят от нормированных к размерным значениям параметров – рассматривают вектор $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$. Назначают для каждого параметра минимальные возможные изменения $\Delta X_{min,i}$. Знак этой величины выбирают так, чтобы выполнялось условие $b_i \cdot \Delta X_{min,i} < 0$. Для дискретных параметров $\Delta X_{min,i}$ равно расстоянию от $X_i^{(0)}$ до ближайшего значения. Вычисляют величины ΔX_i так, чтобы удовлетворялись условия:

$$\Delta X_1/a_1 b_1 = \Delta X_2/a_2 b_2 = \ldots = \Delta X_n/a_n b_n ; \qquad (24)$$

для одного из параметров (пусть его номером будет g);

$$\Delta X_g = \Delta X_{min,g} \qquad (25)$$

для всех параметров:

$$|\Delta X_i| \leqslant |\Delta X_{min,i}| \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (26)$$

Номер параметра g и величину ΔX_g, удовлетворяющие условиям (24)-(26), легко найти простым перебором. Для остальных параметров величины ΔX_i находят из условий (24) по формуле

$$\Delta X_i = \Delta X_g a_i b_i / a_g b_g . \qquad (27)$$

Для движения рассматривают вектор $l^{(1)}$

$$l^{(1)} = (\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n). \qquad (28)$$

При движении по антиградиенту опыты проводят в точках $O_K(\lambda_j t^{(n)})$, где r – число дискретных внешних переменных параметров. Если же все параметры непрерывны, то округления не проводят. В процессе движения величины λ_j назначают с учетом близости значений целевой функции, полученных из опыта и из уравнения (I4).

Движение по антиградиенту прекращают, когда целевая функция перестает уменьшаться, а также когда нарушаются внешние или внутренние ограничения (3), (5). Тогда новым начальным приближением принимают полученную при движении по антиградиенту или задаваемую матрицей планирования точку, в которой целевая функция имела минимальное значение (меньшее, чем в начальном приближении) при выполнении органичений (3), (5). Если же такой точки не существует, опыты прекращают.

Если при движении по антиградиенту $t < n$ внешних переменных параметров принимают граничные значения d_{i1} или d_{i2} из (4), то продолжают движение, считая число внешних переменных параметров равным $n - t$ и принимая направляющий вектор $b = (b_{t+1}, \ldots, b_n)$.

3.I4. Внешние и внутренние ограничения (3), (5) могут не выполняться в некоторых опытах, проводимых в соответствии с матрицей планирования. Тогда рекомендуется использовать следующий эвристический прием. В опытах, где указанные ограничения нарушаются, на целевую функцию накладывают штраф; ее значения приравнивают максимальному, взятому из тех опытов, где ограничения выполняются.

3.I5. При выборе планов их следует сравнивать между собой по двум признакам:

I) количеству опытов, необходимых для получения линейной аппроксимации (I4);

2) точности получаемой аппроксимации.

Наименьшего количества опытов требуют односторонние градиентные планы I и П: для определения n +I коэффициентов линейной функции (I4) требуется провести n +I опытов. В центральных градиентных планах число опытов значительно больше: для получения n+I коэффициентов линейной функции (I4) требуется провести $2n$ +I опытов. Число опытов N при дробном факторном планировании определяется неравенствами $n < N \leq 2n$, причем $N = 2n$ тогда и только тогда, когда n есть некоторая степень 2. Планы Плакетта-Бермана при определенных значениях n позволяют сократить число

опытов по сравнению с дробным факторным планированием.

По точности аппроксимации наихудшими являются односторонние градиентные планы I и П, наилучшими - планы Бокса-Уилсона и Плакетта-Бермана. Центральные градиентные планы занимают промежуточное положение.

Поэтому, как правило, рекомендуется использовать планы Бокса-Уилсона и Плакетта-Бермана. При числе внешних переменных параметров $2 \leqslant n \leqslant 7$; $12 \leqslant n \leqslant 15$; $29 \leqslant n \leqslant 31$; $36 \leqslant n$ рекомендуется использовать планы Бокса-Уилсона; при $8 \leqslant n \leqslant 11$; $16 \leqslant n \leqslant 28$; $32 \leqslant n \leqslant 35$ - планы Плакетта-Бермана. Если число внешних переменных параметров при применении планов Плакетта-Бермана не совпадает с числом n = 11,19,23,27,35 (см.табл.7-9), то следует выбирать план с ближайшим большим n из приведенных в табл.7-9, используя первые n столбцов плана.

Например, если число внешних переменных параметров n =9, то следует использовать план Плакетта-Бермана, приведенный в табл.8, и оставить в нем первые 9 столбцов.

Односторонние градиентные планы I и П, а также центральные градиентные планы, как правило, самостоятельно не применяются. Их рекомендуется применять в комбинации с дробными репликами и планами Плакетта-Бермана. Такие комбинации различных планов могут применяться в следующих случаях:

I) для сокращения числа опытов;

2) для построения матрицы планирования, когда переменные параметры в точке начального приближения задаются равными $x_i^{(0)} = d_{1i}$ или $x_i^{(0)} = d_{2i}$ (см. формулу (4) настоящих Рекомендаций);

3) для определения дополнительных коэффициентов: если некоторые внешние переменные параметры вначале не варьировались, а потом возникла необходимость их варьирования, то соответствующие этим параметрам дополнительные коэффициенты определяются по градиентным планам.

Например, в матрице планирования для четырех внешних переменных параметров (табл.10) в опытах 1-4 переменные параметры $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ изменяются в соответствии с дробной репликой при p =2 (см.п.3.10 настоящих Рекомендаций), а $\bar{x}_4$ остается на нулевом уровне. В опытах 5,6 параметр $\bar{x}_4$ изменяется в соответствии с центральным градиентным планом, а параметры $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ остаются на нулевом уровне. Такое планирование требует проведения 6 опытов, в то время как дробная реплика при p =3 требует проведе-

ния 8 опытов. Если же для параметра $\bar{x}_4$ применить односторонние градиентные планы I и П (соответственно опыты I-4,6 или I-5), то число опытов станет равным 5. Однако точность аппроксимации, естественно, понизится.

Коэффициенты b_i линейной функции (I4) для параметров, изменяющихся в соответствии с градиентными планами, определяются по формулам (I5)-(I7), а для параметров, изменяющихся в соответствии с дробным факторным планированием или планом Плакетта-Бермана по формуле (2I).

3.I6. Если число внешних переменных параметров n велико и заранее не известна степень влияния каждого из них на целевую функцию, то аппроксимацию (I4) рекомендуется использовать для ранжирования внешних переменных параметров. С этой целью при нормировании внешних переменных параметров по формуле (9) a_i рекомендуется принять равным минимально возможной по конструктивным соображениям величине изменения внешнего переменного параметра по сравнению с его значением в точке начального приближения (для дискретных переменных параметров - это расстояние до ближайшего дискретного значения). Тогда коэффициенты b_i ранжируют внешние переменные параметры: чем больше абсолютная величина коэффициента b_i, тем сильнее изменяется по сравнению с начальным приближением целевая функция при изменении внешнего переменного параметра x_i на величину a_i.

Это свойство рекомендуется использовать в алгоритмах оптимизации для отбрасывания малозначимых внешних параметров: проведя опыты в соответствии с выбранным линейным планом и построив линейную аппроксимацию (I4), можно в дальнейшем не варьировать те внешние параметры, которым соответствуют малые по абсолютной величине коэффициенты b_i.

3.I7. Приведенные ниже примеры I-4 иллюстрируют работу алгоритмов, основанных на различных линейных планах. Решается тестовый пример оптимизации изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения (см.п.I.7 и приложение 5 настоящих Рекомендаций). Целевой функцией служит стоимость y.

Опыты проводятся в соответствии с основными операциями алгоритма, изложенными в п.3.2 настоящих Рекомендаций. На каждом шаге k опыты объединяются в две группы - процедуры "а" и "б". Процедура "а" выполняется для определения направления антиградиента,

Таблица I0. Совместное использование реплики ПФЭ 2^2 и центрального градиентного плана

№ опыта	Матрица планирования				y_i
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	
0	0	0	0	0	y_1
I	-I	-I	+I	0	y_2
2	+I	-I	-I	0	y_3
3	-I	+I	-I	0	y_4
4	+I	+I	+I	0	y_5
5	0	0	0	-I	y_6
6	0	0	0	+I	y_7

процедура "б" представляет собой движение по антиградиенту.

Во всех примерах, за исключением примера 4, начальное приближение задается набором внешних переменных параметров $X^{(1,0)}$=(20,45, 200).

Примеры расчета.

Пример I. В табл.II,I2 представлено решение внешней задачи оптимизации железобетонного прямоугольного изгибаемого элемента с помощью алгоритма, включающего односторонний градиентный план I (см. п.3.5 настоящих Рекомендаций). В табл.II даны условия и результаты опытов; в табл.I2 - коэффициенты b_i линейной аппроксимирующей функции (I4) и коэффициенты l_i - составляющие вектора-антиградиента (см.п.3.I3 настоящих Рекомендаций).

Из прил.5 настоящих Рекомендаций для начального приближения $X^{(1,0)}$= (20,45,200) находим y = 4,57 руб. Поместим начало координат в точку $X^{(1,0)}$. Для нормирования внешних переменных параметров примем: a_1 =2 см; a_2 =5 см; a_3 =50.

В процедуре "а" шага I используем план табл.2. Получаем точки $X^{(1,j)}$ (j =I,2,3). Из прил.6 находим значения целевой функции. По формулам (I5) находим коэффициенты b_i : b_0 =4,57; b_1 =4,87 — 4,57=0,30; b_2 =0,34; b_3 =-0,II. Записываем их в табл.I2.

В соответствии с указаниями п.3.I3 настоящих Рекомендаций находим коэффициенты b_i (i =I,2,3). Вначале определяем $b_z = \max_i |b_i| =$ 0,34. Затем используем формулу (23):

l = -(0,30; 0,34; -0,II)/0,34= (-0,88; -I; 0,32).

Коэффициенты l_i записываем в табл.I2.

Движение по антиградиенту при К=I (процедура "б", табл.II)

Таблица II. Пример применения одностороннего градиентного плана I. Опыты

K	$X^{(K,0)}$	Тип процедуры	j	Нормированные значения параметров			Размерные значения параметров			y, руб.
				$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_б)$, см	
-	-	-	0	0	0	0	20	45	200	4,57
I	20 45 200	а	I	+I	0	0	22	45	200	4,87
			2	0	+I	0	20	50	200	4,9I
			3	0	0	+I	20	45	250	4,46
		б	4	-I	-I	0	I8	40	200	4,44
			5	-2	-2	+I	I6	35	250	4,I6
			6	-2,5	-3	+I	I5	30	250	4,44
2	I6 35 250	а	I	+I	0	0	I8	35	250	4,30
			2	0	+I	0	I6	40	250	4,I6
			3	0	0	+I	I6	35	300	3,97
		б	4	-0,5	0	+I	I5	35	300	3,95
			5	-I	0	+2	I4	35	350	3,79
			6	-2	0	+3	I2	35	400	3,65
			7	-3	0	+4	I0	35	450	3,69
3	I2 35 400	а	I	+I	0	0	I4	35	400	3,92
			2	0	+I	0	I2	40	400	3,54
			3	0	0	+I	I2	35	450	3,64
		б	4	-I	0	0	I0	35	400	-
4	I2 40 400	а	I	+I	0	0	I4	40	400	3,85
			2	0	+I	0	I2	45	400	3,46
			3	0	0	+I	I2	40	450	3,6I
		б	4	-I	0	0	I0	40	400	3,57
5	I2 45 400	а	I	+I	0	0	I4	45	400	3,90
			2	0	+I	0	I2	50	400	3,73
			3	0	0	+I	I2	45	450	3,54
		б	4	-I	-I	0	I0	40	400	3,57

Таблица I2. Пример применения одностороннего градиентного плана I.

Коэффициенты b_i и l_i (к табл.II)

К	Коэффициенты b_i				Коэффициенты l_i		
	I	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
I	4,57	0,30	0,34	-0,II	-0,88	-I	0,32
2	4,I6	0,I4	0	-0,I9	-0,74	0	I
3	3,65	0,27	-0,II	-0,0I	-I	0,4I	0,04
4	3,54	0,3I	-0,08	0,07	-I	0,26	-0,22
5	3,46	0,44	0,27	0,08	-I	-0,6I	-0,I8

включает опыты при j =4,5,6. Условия опытов получаем, принимая λ_j =I,2,3, т.е. проводим опыты во всех точках, ближайших к направлению антиградиента (см.п.3.I3 настоящих Рекомендаций). Например, при λ_j =I получаем $x^{(1,4)} = 0к(-0,88; -I; 0,32) = (-I; -I,0)$. В результате опытов имеем, что $y(x^{(1,0)}) > y(x^{(1,4)}) > y(x^{(1,5)})$, н о $y(x^{(1,5)}) < y(x^{(1,6)})$; целевая функция прекратила уменьшаться. Наименьшее ее значение, равное 4,I6 руб., получено в точке $x^{(1,5)}$ = (I6,35,250). Эту точку принимаем начальным приближением на втором шаге (К=2), обозначая $x^{(2,0)} = x^{(1,5)}$.

Операции на остальных шагах алгоритма (К=2,...,5) выполняем совершенно аналогично. В точке $x^{(3,4)}$ внутренняя задача оптимизации не имеет решения - движение по антиградиенту на шаге 3 к успеху не приводит. Наименьшее значение целевой функции на шаге 3 $y(x^{(3,2)})$ = (I2,40,400)=3,54 руб. Поэтому $x^{(4,0)} = x^{(3,2)}$. Аналогично $x^{(5,0)} = x^{(4,2)}$. На шаге 5 уменьшения целевой функции не получаем - алгоритм заканчивает работу.

Всего проведено 26 опытов. Точка локального минимума не найдена. Минимальное значение целевой функции $y(x^{(4,2)}) = y$ (I2,45,400) = 3,46 руб. В примерах 5,6 настоящих Рекомендаций показано, к а к можно улучшить полученное решение.

Пример 2. В табл.I3,I4 представлено решение внешней задачи оптимизации железобетонного прямоугольного изгибаемого элемента с помощью алгоритма, включающего центральный градиентный план (см.п.3.7 настоящих Рекомендаций). Содержание таблиц и выполнение операций совершенно аналогичны описанным соответственно для табл.II,I2 в примере I настоящих Рекомендаций.

Таблица I3. Пример применения центрального градиентного плана. Опыты

К	$X^{(k,0)}$	Тип процедуры	j	Нормированные значения параметров			Размерные значения параметров			y, руб
				$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$X_1(b)$, см	$X_2(h)$, см	$X_3(R_б)$	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
-	-	-	0	0	0	0	20	45	200	4,57
I	20 45 200	а	I	-I	0	0	I8	45	200	4,48
			2	+I	0	0	22	45	200	4,87
			3	0	-I	0	20	40	200	4,44
			4	0	+I	0	20	50	200	4,9I
			5	0	0	-I	20	45	I50	4,5I
			6	0	0	+I	20	45	250	4,46
		б	7	-I	-I	0	I8	40	200	4,44
			8	-2	-2	0	I6	35	200	4,I9
			9	-2,5	-3	0	I5	30	200	4,55
2	I6 35 200	а	I	-I	0	0	I4	35	200	4,08
			2	+I	0	0	I8	35	200	4,39
			3	0	-I	0	I6	30	200	4,73
			4	0	+I	0	I6	40	200	4,24
			5	0	0	-I	I6	35	I50	4,I7
			6	0	0	+I	I6	35	250	4,I6
		б	7	-0,5	+I	0	I5	40	200	4,I8
			8	-I	+2	0	I4	45	200	3,5I
			9	-2	+3	0	I2	50	200	3,4I
			I0	-3	+4	0	I0	55	200	3,45
3	I2 50 200	а	I	-I	0	0	I0	50	200	3,39
			2	+I	0	0	I4	50	200	3,76
			3	0	-I	0	I2	45	200	3,59
			4	0	+I	0	I2	55	200	3,6
			5	0	0	-I	I2	50	I50	3,36
			6	0	0	+I	I2	50	250	3,46
		б	7	-I	0	0	I0	50	200	3,39
			8	-I	0	-I	I0	50	I50	3,44

Продолжение табл.I3

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
4	I2 50 I50	а	I	-I	0	0	I0	50	I50	3,44
			2	+I	0	0	I4	50	I50	3,9
			3	0	-I	0	I2	45	I50	3,63
			4	0	+I	0	I2	55	I50	3,44
			5	0	0	+I	I2	50	200	3,4I
		б	6	-I	0	0	I0	50	I50	3,44

Таблица I4. Пример применения центрального градиентного плана. Коэффициенты b_i и l_i (к табл.I3)

К	Коэффициенты b_i				Коэффициенты l_i		
	l	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
I	4,57	0,I95	0,235	-0,025	-0,83	-I	0,II
2	4,I9	0,I55	-0,245	-0,005	-0,63	I	0,02
3	3,4I	0,I85	0,005	0,050	-I	-0,03	-0,27
					-	-0,II	-I
4	3,36	0,23	-0,095	0,05	-I	0,4I	-0,22

Процедура "а" при К=I,2,3 включает опыты, проводимые в соответствии с центральным градиентным планом, представленным в табл.4. Коэффициенты b_i в табл.I4 определяем по формулам (I7). При К=3, j =7 (движение по антиградиенту) параметр X_1 принимает граничное значение d_{11} =I0 см. В соответствии с пп.2.20 и 3.I3 настоящих Рекомендаций параметр X_1 фиксируем, приравнивая его значение граничному. Продолжаем движение по антиградиенту, считая число внешних переменных параметров равным 2. В табл.I4 для К=3 имеем два набора коэффициентов l_i , соответствующих j =7 и j=8. Наименьшее значение целевой функции при К=3 получено в точке, задаваемой матрицей планирования; поэтому в соответствии с п.3.I3 настоящих Рекомендаций принимаем $x^{(4,0)} = x^{(3,5)}$. Так как в точке $x^{(4,0)}$ значение параметра X_3 =I50 совпадает с граничным, в процедуре "а" при К=4 параметр X_3 изменяем в соответствии с односторонним градиентным планом I.

Всего проведено 34 опыта. Точка локального минимума не найдена. Минимальное значение целевой функции $y(x^{(3,5)}) = y(I2,50,I50)$ = 3.36 руб.

Таблица I5. Пример применения линейного плана Бокса-Уилсона при $x^{(1,0)}$ = (20,45,200). Опыты

К	$X^{(k,0)}$	Тип процедуры	j	Нормированные значения параметров			Размерные значения параметров			y, руб
				$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_0)$	
–	–	–	0	0	0	0	20	45	200	4,57
I	20 45 200	а	I	-I	-I	+I	I8	40	250	4,24
			2	+I	-I	-I	22	40	I50	4,68
			3	-I	+I	-I	I8	50	I50	4,3
			4	+I	+I	+I	22	50	250	5,28
		б	5	-I	0	0	I8	45	200	4,48
			6	-2	-I	-I	I6	40	I50	4,26
			7	-2,5	-I	-I	I5	40	I50	3,85
			8	-3	-I	-I	I4	40	I50	3,82
			9	-4	-2	-I	I2	35	I50	3,84
2	I4 40 I50	а	I	-I	-I	0	I2	35	I50	3,84
			2	+I	-I	0	I6	35	I50	4,I7
			3	-I	+I	0	I2	45	I50	3,63
			4	+I	+I	0	I6	45	I50	4,03
			5	0	0	+I	I4	40	200	3,76
		б	6	-I	0	0	I2	40	I50	3,68
			7	-2	+I	+I	I0	45	200	3,37
			8	-2	+2	+2	I0	50	250	3,33
			9	-2	+3	+2	I0	55	250	3,I4
			I0	-2	+4	+3	I0	60	300	3,34
3	I0 55 250	а	I	0	-I	-I	I0	50	200	3,39
			2	0	+I	-I	I0	60	200	3,I9
			3	0	-I	+I	I0	50	300	3,38
			4	0	+I	+I	I0	60	300	3,34
			5	+I	0	0	I2	55	250	3,52
		б	6	0	+I	-I	I0	60	200	3,I9

Пример 3. В табл.I5,I6 представлено решение внешней задачи оптимизации изгибаемого железобетонного элемента с помощью алгоритма, включающего линейный план Бокса-Уилсона (см.пп.3.8-3.I0 настоящих Рекомендаций). В процедуре "а" на всех шагах используем дробную реплику, в которой p =3 и $\bar{X}_3 = \bar{X}_1\bar{X}_2$. При К=I,2 в

Таблица I6. Пример применения линейного плана Бокса–Уилсона при $x^{(I,0)}$ = (20,45,200). Коэффициенты b_i и l_i (к табл. I5)

К	Коэффициенты b_i				Коэффициенты l_i		
	1	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
I	4,62	0,355	0,I65	0,I35	–I	–0,46	–0,38
2	3,92	0,I82	–0,088	–0,060	–I –	–0,48 I	0,33 0,68
3	3,32	0,380	–0,060	0,035	–	I	–0,58

Таблица I7. Пример применения линейного плана Бокса–Уилсона при $x^{(I,0)}$ = (I5,30,250). Опыты

К	$X^{(K,0)}$	Тип процедуры	j	Нормированные значения параметров			Размерные значения параметров			y, руб
				$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$X_1(b)$, см	$X_2(h)$, см	$X_3(R_б)$	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
–	–	–	0	0	0	0	I5	30	250	4,44
I	I5 30 250	а	I	–I	–I	+I	I4	25	300	(ш) 5,37
			2	+I	–I	–I	I6	25	200	5,37
			3	–I	+I	–I	I4	35	200	4,08
			4	+I	+I	+I	I6	35	300	3,97
		б	5	0	+I	0	I5	35	250	4,08
			6	0	+2	0	I5	40	250	4,05
			7	0	+3	0	I5	45	250	3,99
			8	0	+4	0	I5	50	250	4,06
2	I5 45 250	а	I	–I	–I	+I	I4	40	300	3,66
			2	+I	–I	–I	I6	40	200	4,24
			3	–I	+I	–I	I4	50	200	3,76
			4	+I	+I	+I	I6	50	300	4,42
		б	5	–I	0	0	I4	45	250	3,88
			6	–3	–I	0	I2	40	250	3,56
			7	–5	–I	0	I0	40	250	3,68

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
3	I2	а	I	-I	-I	+I	I0	35	300	4,08(ш)
			2	+I	-I	-I	I4	35	200	4,08
			3	-I	+I	-I	I0	45	200	3,37
			4	+I	+I	+I	I4	45	300	3,94
	40									
	250	б	5	-I	+I	-I	I0	45	200	3,37
			6	-I	+2	-I	I0	50	200	3,39
4	I0	а	I	0	-I	-I	I0	40	I50	3,69(ш)
			2	0	+I	-I	I0	50	I50	3,44
			3	0	-I	+I	I0	40	250	3,68
	45		4	0	+I	+I	I0	50	250	3,33
	200		5	+I	0	0	I2	45	200	3,59
		б	6	0	+I	0	I0	50	200	3,39

Таблица I8. Пример применения линейного плана Бокса–Уилсона при $x^{(1,0)}$ = (I5,30,250) Коэффициенты b_i и l_i (к табл.I7)

К	Коэффициенты b_i				Коэффициенты l_i		
	1	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
I	4,70	-0,028	-0,672	-0,028	0,04	I	0,04
2	4,02	0,3I0	0,070	0,020	-I	-0,22	-0,06
3	3,87	0,I42	-0,2I2	0,I42	-0,67	I	-0,67
4	3,53	0,220	-0,I48	-0,028	-	I	0,I9

процессе движения по антиградиенту значения соответственно внешних переменных параметров x_3 и x_1 оказались равными граничным. Дальнейшее движение совершаем при числе внешних переменных параметров, равном 2. На первом шаге коэффициенты l_i не изменились, на втором шаге они изменились – в табл.I6 при К=2 указаны д в а набора значений коэффициентов l_i . При К=2,3 в процедуре „а" внешние переменные параметры x_3 , x_1 менялись в соответствии с односторонним градиентным планом I. Всего проведено 26 опытов. В результате *нашли глобальный минимум* y (I0,55,250)=3,I4 руб.

Пример 4. В табл.I7,I8 представлено решение внешней задачи оптимизации изгибаемого железобетонного элемента с помощью алгоритма, включающего линейный план Бокса–Уилсона (см.пп.3.8–3.I0 настоящих Рекомендаций). Начальное приближение $x^{(1,0)}$=(I5,30,250). В точке $x^{(1,1)}$ внутренняя задача оптимизации не имеет решения – нарушаются внутренние ограничения (5). В этой точке на целевую функцию накладываем штраф, принимая ее значение равным максимальному из полученных в точках $x^{(1,j)}$ при j =2,3,4 (см.п. 3,I4

настоящих Рекомендаций). Опыты, в которых нарушаются ограничения (3), (5), будем отмечать знаком (Ш) возле значения целевой функции. В табл.I6 ограничения (5) нарушаются также в точках $x^{(3,1)}$ и $x^{(4,1)}$.

Всего проведено 28 опытов. Наилучшее найденное значение y(I0, 50,250)= 3,33 руб. не является локальным минимумом. Можно продолжить линейную аппроксимацию, приняв $x^{(5,0)}$=(I0,50,250) на шаге 5. В этом случае в одном из опытов матрицы планирования найдем локальный минимум y (I0,45,300)=3,24 руб.

4. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Основные положения

4.I. В пп.4.5-4.I7 настоящих Рекомендаций приведены основные операции алгоритмов решения внешней задачи оптимизации, разработанные на основе следующих методов безусловной минимизации: овражного, сопряженного градиента, покоординатного спуска, поиска по образцу, вращающихся координат, поиска по деформируемому многограннику. Внешние переменные параметры считаются дискретными. Основные операции составлены в соответствии с п.I.3 настоящих Рекомендаций. Алгоритмы позволяют отыскивать локальный минимум целевой функции. Их рекомендуется использовать для создания универсальных программ оптимизации любых железобетонных конструкций на ЭВМ. Программы для ЭВМ рекомендуется оформлять в виде отдельных универсальных блоков оптимизации, которые могут подключаться к различным программам расчета железобетонных конструкций или их оптимизации по части параметров. Универсальные блоки оптимизации рекомендуется включать в системы автоматизированного проектирования железобетонных конструкций. Пример создания таких блоков приведен в прил.I настоящих Рекомендаций. Допускается также использование приведенных алгоритмов для оптимизации железобетонных конструкций при взаимодействии системы "человек-машина".

4.2. Выбор алгоритма решения конкретной задачи оптимизации рекомендуется проводить с использованием опыта применения различных алгоритмов. Не существует алгоритма, наилучшего для решения всех возможных задач. Поэтому рекомендуется использовать комбинации различных алгоритмов (см.пп.4.9 и 4.I8 настоящих Рекомендаций). Это практически всегда позволяет найти локальный минимум целевой функции.

4.3. Приводимые в пп.4.5–4.17 настоящих Рекомендаций алгоритмы можно разделить на три группы:

I. Алгоритмы, при применении которых вычисляются координаты антиградиента целевой функции. Сюда относятся алгоритмы овражного метода и метода сопряженного градиента.

2. Покоординатный спуск и связанные с ним алгоритмы методов поиска по образцу и вращающихся координат. Характерной чертой этих алгоритмов является поочередное движение по каждому из координатных направлений.

3. Алгоритм метода поиска по деформируемому многограннику, в котором учитывается информация о значениях целевой функции сразу в нескольких точках внешнего пространства.

Во всех разработанных алгоритмах, кроме алгоритма метода поиска по деформируемому многограннику, процесс оптимизации на каждом шаге состоит из двух этапов: на первом определяется некоторое направление движения; на втором проводится движение в этом направлении. Процедура движения описана в пп.2.18–2.20 настоящих Рекомендаций.

4.4. Принципы, использованные для разработки перечисленных алгоритмов, рекомендуется применять также и для создания алгоритмов решения внешней задачи оптимизации, основанных на других методах безусловной минимизации.

Основные операции алгоритмов

4.5. Алгоритм овражного метода состоит из следующих операций.

А, Б. Операции в начальном приближении и на К-ом шаге совпадают.

I. Выбирают две точки $x^{(K,1)}$ и $x^{(K,2)}$.

2. Определяют в этих точках направления антиградиента в соответствии с одним из линейных планов, приведенных в пп.3.5–3.11 настоящих Рекомендаций.

Обозначают эти направления $S^{(K,1)}$ и $S^{(K,2)}$.

3. Проводят движение в направлении антиградиента из точек $x^{(K,1)}$ и $x^{(K,2)}$: находят точки $x^{(K,3)}$ и $x^{(K,4)}$, в которых удовлетворяются внутренние и внешние ограничения и выполняются условия:

$$y(x^{(K,3)}) = \min_{\lambda_j} y[OK(x^{(K,1)} + \lambda_j S^{(K,1)})];$$
$$y(x^{(K,4)}) = \min_{\lambda_j} y[OK(x^{(K,2)} + \lambda_j S^{(K,2)})]. \qquad (29)$$

4. Соединяют точки $x^{(K,3)}$ и $x^{(K,4)}$ прямой линией. Уравнение прямой имеет вид

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2^{(K,3)}}{\bar{X}_1^{(K,4)} - \bar{X}_1^{(K,3)}} = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_2^{(K3)}}{\bar{X}_2^{(K,4)} - \bar{X}_2^{(K3)}} = \ldots = \frac{\bar{X}_n - \bar{X}_n^{(K3)}}{\bar{X}_n^{(K,4)} - \bar{X}_n^{(K,3)}}. \qquad (30)$$

Для записи уравнения (30) используют некоторую глобальную систему координат.

5. Находят направляющий вектор прямой (30)

$$\bar{S}^{(K,3)} = (\bar{X}_1^{(K,4)} - \bar{X}_1^{(K,3)}, \bar{X}_2^{(K,4)} - \bar{X}_2^{(K,3)}, \ldots, \bar{X}_n^{(K,4)} - \bar{X}^{(K,3)}). \quad (31)$$

По формуле (12) определяют вектор l, соответствующий вектору $\bar{S}^{(K,3)}$.

6. Проводят движение вдоль прямой (30). В результате движения находят точку $\bar{X}^{(K,5)}$, в которой удовлетворяются внутренние и внешние ограничения и выполняется условие

$$y(\bar{X}^{(K,5)}) = \begin{cases} \min y\,[0K(\bar{X}^{(K,3)} - \lambda_j l)], & \text{если } y(x^{(K,3)}) < y(x^{(K,4)}) \\ \min y\,[0K(\bar{X}^{(K,4)} + \lambda_j l)], & \text{если } y(x^{(K,3)}) > y(x^{(K,4)}) \end{cases} \quad (32)$$

При $y(\bar{X}^{(K,3)}) = y(x^{(K,4)})$ совершают движение из точки $x^{(K,3)}$. Если оно не приводит к успеху, за начало движения принимают точку $x^{(K,4)}$.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда исчерпана совокупность всех точек $x^{(K,1)}$ и $x^{(K,2)}$.

4.6. Основная идея овражного метода состоит в следующем. Если поверхность целевой функции имеет форму оврага, то движение в направлении антиградиента оказывается малоэффективным. Совершая движение из точек $x^{(K,1)}$ и $x^{(K,2)}$ по антиградиенту, получают две точки $x^{(K,3)}$ и $x^{(K,4)}$ на дне оврага, затем совершают движение по дну оврага. Движение прекращают, когда перестают выполняться какие-либо из ограничений или овраг меняет направление.

Таким образом, овражный метод тесно связан с линейными планами, по которым определяется направление антиградиента (см.пп.3.5-3.11 настоящих Рекомендаций). В конкретных алгоритмах должен быть задан процесс выбора точек $x^{(K,1)}$ и $x^{(K,2)}$. Этими точками могут быть точки начального приближения на некоторых шагах алгоритма линейного плана. Если поверхность целевой функции действительно имеет форму оврага (что заранее не известно), то результатом каждого движения по антиградиенту служат точки, расположенные близко ко дну оврага. Полученные точки можно соединять друг с другом прямой линией различными способами (например, наилучшие точки двух последних шагов или наилучшую точку, полученную на первом шаге, последовательно с наилучшими точками, полученными на следующих шагах и т.п.).

Движение вдоль прямой (30) проводят по направлению совпадающего с прямой вектора $S^{(K,3)}$, координаты которого определяются по формуле (31). Началом движения принимают одну из точек $x^{(K,3)}$ или

$X^{(K,4)}$, в которой значение целевой функции меньше.

Если в каких-либо точках $X^{(K,3)}$ и $X^{(K,4)}$ окажется, что $\bar{X}_i^{(K,3)} = \bar{X}_i^{(K,4)}$, то уравнение прямой в виде (30) записать нельзя - в одной или нескольких дробях $(\bar{X}_i - \bar{X}_i^{(K,3)})/(\bar{X}_i^{(K,4)} - \bar{X}_i^{(K,3)})$ знаменатели равны нулю. В этом случае переменные параметры, для которых $\bar{X}_i^{(K,3)} = \bar{X}_i^{(K,4)}$ в процессе движения по антиградиенту не меняют: уравнение прямой (30) записывают при меньшем числе внешних переменных параметров - дроби с $\bar{X}_i^{(K,3)} = \bar{X}_i^{(K,4)}$ из уравнения исключают.

Применяя овражный метод, используют несколько систем координат. В линейных планах применяют локальные системы координат с началом в точках начального приближения; при записи уравнения (30) - глобальную систему координат с началом в произвольной точке. Для нормирования внешних переменных параметров используют один из способов, указанных в п.2.I5 настоящих Рекомендаций.

Пример 5 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение овражного метода.

4.7. Алгоритм метода сопряженного градиента состоит из следующих основных операций.

А. Задают точку начального приближения $X^{(1,0)}$. В соответствии с одним из линейных планов (см.пп.3.5-3.II настоящих Рекомендаций) определяют направление антиградиента в точке $X^{(1,0)}$. Обозначают это направление $S^{(1,0)}$ ($S^{(1,0)}$ - вектор-строка антиградиента в глобальной системе координат). Принимают К=I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции:

I. Совершают движение в направлении $S^{(K,0)}$. Получают точку $\bar{X}^{(K,1)}$.

2. В соответствии с одним из линейных планов определяют направление градиента в точке $\bar{X}^{(K,1)}$.

3. Определяют направляющий вектор движения по формуле

$$S^{(K1)} = -\nabla y(\bar{X}^{(K,1)}) + S^{(K,0)} \frac{\nabla y(\bar{X}^{(K,1)})\ \nabla^T y(\bar{X}^{(K,1)})}{\nabla y(\bar{X}^{(K,0)})\ \nabla^T y(\bar{X}^{(K,0)})}, \qquad (33)$$

где $\nabla y(\bar{X}^{(K,0)})$, $\nabla y(\bar{X}^{(K,1)})$ - векторы-строки градиента соответственно в точках $\bar{X}^{(K,0)}$, $\bar{X}^{(K,1)}$ в локальной системе координат.

В числителе и знаменателе дроби записаны скалярные произведения векторов.

4. Принимают $\bar{X}^{(K+1,0)} = \bar{X}^{(K,1)}$, $S^{(K+1,0)} = S^{(K,1)}$ Переходят к выполнению (К+I)-го шага алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда движение в направлении $S^{(K,0)}$ не приводит к успеху.

4.8. Из описания операций алгоритма (см.п.4.7 настоящих Рекомендаций) видно, что в методе сопряженного градиента используются и глобальная и локальные системы координат. Начало глобальной системы координат допускается помещать в любую точку. Начало локальных систем координат помещают в точки $x^{(K,0)}$ и $x^{(K,1)}$.

Нормирование может быть выполнено любым из способов, указанных в п.2.I5 настоящих Рекомендаций. Однако способ должен быть одинаковым и для глобальной и для всех локальных систем координат. В этом случае расстояния между точками одинаковы в любой системе координат, а потому не меняются и коэффициенты градиента. При вычислениях глобальную систему координат в явном виде не используют.

Пример 6 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма метода сопряженного градиента.

4.9. При оптимизации железобетонных конструкций рекомендуется использовать комбинации алгоритмов теории планирования экстремальных экспериментов (см.разд.3 настоящих Рекомендаций) с алгоритмами методов овражного и сопряженного градиента (см.пп.4.5–4.8 настоящих Рекомендаций).

Имея линейную аппроксимацию зависимости между целевой функцией и переменными параметрами, определенную по рекомендациям разд.3, допускается совершать движение в одном из трех направлений:

I) в направлении антиградиента (алгоритмы методов, основанных на теории планирования экспериментов);

2) по дну оврага, соединяя две полученные в результате движений по антиградиенту точки (алгоритм овражного метода);

3) в направлении сопряженного градиента (алгоритм метода сопряженного градиента).

Если выбранное направление оказывается неудачным, можно совершить движение в другом направлении.

4.I0. Ниже приведены операции двух алгоритмов, основанных на методе покоординатного спуска. Через $+a_i$ и $-a_i$ обозначены расстояния от некоторого указанного значения внешнего переменного параметра X_i соответственно до ближайших большего и меньшего дискретных значений.

Алгоритм I.

А. Задают точку начального приближения $x^{(I,0)}$. Принимают К = I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции.

I. Совершают движение от точки $x^{(K,0)}$ в направлении вектора $\pm l^{(K,0)} = (\pm 1,0,\ldots,0)$. Вначале выполняют один шаг в направлении вектора $(+1,0,\ldots,0)$. Если шаг удачен, продолжают движение в этом направлении. Если шаг не удачен, совершают движение в направлении $(-1,0,\ldots,0)$. В результате получают точку $(x_1^{(K,1)}, x_2^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$.

2. Совершают движение от точки $(x_1^{(K,1)}, x_2^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$ в направлении вектора $\pm l^{(K,1)} = (0,\pm 1,0,\ldots,0)$. Получают точку $(x_1^{(K,1)}, x_2^{(K,1)}, x_3^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$.

3. Аналогично совершают движения по направлению векторов $\pm l^{(K,3)} = (0,0,\pm 1,\ldots,0),\ldots,\pm l^{(K,n)} = (0,0,\ldots,\pm 1)$ от точек $(x_1^{(K,1)}, x_2^{(K,1)}, x_3^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)}),\ldots,(x_1^{(K,1)}, x_2^{(K,1)},\ldots, x_{n-1}^{(K,1)}, x_n^{(K,0)})$. Получают точку $x^{(K,1)} = (x_1^{(K,1)},\ldots, x_n^{(K,1)})$.

4. Принимают $x^{(K+1,0)} = x^{(K,1)}$. Переходят к выполнению (К+I)-го шага.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда на каком-либо шаге ни одно из n движений не приводит к успеху.

Алгоритм 2.

Операции А и В алгоритма 2 совпадают с соответствующими операциями алгоритма I.

Б. На К-ом шаге выполняют следующие операции:

I. Изменяют поочередно каждый из внешних переменных параметров x_i $(i = 1,\ldots, n)$ на величину a_i. Проводят n опытов в точках $(x_1^{(K,0)},\ldots, x_i^{(K,0)} + a_i,\ldots, x_n^{(K,0)})$.

2. Сравнивают значения целевой функции y в этих точках с о значением $y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$.

3. При всех i, для которых $y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)}) \leq y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_i^{(K,0)} + a_i,\ldots, x_n^{(K,0)})$, проводят опыты в точках $(x_1^{(K,0)},\ldots, x_i^{(K,0)} - a_i,\ldots, x_n^{(K,0)})$.

4. Сравнивают значения $y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_i^{(K,0)} + a_i,\ldots, x_n^{(K,0)})$ или $y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_i^{(K,0)} - a_i,\ldots, x_n^{(K,0)})$ с $y(x_1^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$. Находят переменный параметр x_j, для которого изменение на величину a_j или $-a_j$ дает наибольшее уменьшение целевой функции.

5. Совершают движение, изменяя переменный параметр x_j и сохраняя постоянными значения всех остальных переменных параметров. Получают точку $x^{(K,1)}$.

6. Принимают $x^{(K+1,0)} = x^{(K,1)}$. Переходят к выполнению (К+I)-го шага алгоритма.

4.II. Алгоритм I реализует метод покоординатного спуска (метод Гаусса-Зайделя), а алгоритм 2 - модифицированный метод поко-

ординатного спуска. В обоих алгоритмах меняют только один переменный параметр при фиксированных значениях остальных.

В алгоритме I все параметры меняют поочередно; в алгоритме 2 выбирают наилучшее направление – изменяют параметр, наиболее сильно влияющий на целевую функцию.

Алгоритм 2 рекомендуется применять, если преимущество от движения вдоль наилучшего направления, по крайней мере, в n раз больше, чем от движения вдоль наихудшего направления. Если же все переменные параметры примерно равноправны, то рекомендуется применять алгоритм I.

Пример 7 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритмов метода покоординатного спуска.

4.I2. Ниже приведены основные операции алгоритма метода поиска по образцу. Как и в п.4.I0 настоящих Рекомендаций, через $+a_i$ и $-a_i$ обозначены расстояния от некоторого указанного значения внешнего переменного параметра x_i соответственно до ближайших большего и меньшего дискретных значений.

А. Задают точку начального приближения $x^{(1,0)}$. Находят значение $y(x^{(1,0)})$. Принимают К = I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции.

I. Проводят исследующий поиск типа I вокруг точки $x^{(K,0)}$:

а) проводят опыт и находят $y(x_1^{(K,0)}+a_1,\ x_2^{(K,0)},\ldots,\ x_n^{(K,0)})$. Если $y(x_1^{(K,0)}+a_1,\ x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})<y(x^{(K,0)})$, принимают $x^{(K,1)}=(x_1^{(K,0)}+a_1, x_2^{(K,0)},\ldots, x_n^{(K,0)})$ и переходят к операции "б". Если $y(x_1^{(K,0)}+a_1,\ x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})\geq y(x^{(K,0)})$, проводят опыт и находят значение $y(x_1^{(K,0)}-a_1, x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})$. Если $y(x_1^{(K,0)}-a_1,x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})<y(x^{(K,0)})$, принимают $x^{(K,1)}=(x_1^{(K,0)}-a_1,x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})$ и переходят к операции "б". Если $y(x_1^{(K,0)}-a_1,x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})\geq y(x^{(K,0)})$, принимают $x^{(K,1)}=(x_1^{(K,0)}, x_2^{(K,0)},\ldots,x_n^{(K,0)})$ и переходят в операции "б";

б) для каждого переменного параметра $x_2,\ldots,x_n$ выполняют опыты аналогично проведенным в операции „а" для параметра x_1. В результате получают точку $x^{(K,n)}$.

2. Выполняют поиск по образцу, проводя движение в направлении вектора $x^{(K,n)}-x^{(K,0)}$. Получают точку $x^{(K,n+1)}$.

3. Выполняют исследующий поиск типа П вокруг точки $x^{(K,n+1)}$ аналогично исследующему поиску типа I (операции I). В результате получают точку $x^{(K,2n+1)}$.

4. Если $y(x^{(K,2n+1)})<y(x^{(K,n)})$, поиск по образцу считают успешным. Принимают $x^{(K+1,0)}=x^{(K,n)}$; $x^{(K+1,n)}=x^{(K,2n+1)}$. Переходят к вы-

полнению второй операции (К+I)-го шага алгоритма. Если $y(x^{(K,2n+1)}) \geq y(x^{(K,n)})$, поиск по образцу считают неудачным. Принимают $x^{(K+1,0)} = x^{(K,n)}$. Переходят к выполнению первой операции (К+I)-го шага алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, если исследующий поиск типа I оказывается неудачным, т.е. $x^{(K,n)} = x^{(K,0)}$

4.I3. Алгоритм, основанный на методе поиска по образцу, состоит из трех основных этапов: исследующих поисков типов I и П и поиска по образцу. После проведения исследующего поиска типа I определяют направление движения. Поиск по образцу реализует это движение. Успех или неудачу поиска по образцу оценивают после проведения исследующего поиска типа П. Если поиск по образцу оказался успешным, продолжают движение в направлении, определяемом процедурой исследующего поиска типа П. Если же поиск по образцу не удачен, вновь проводят исследующий поиск типа I вокруг точки, в которой на предыдущем шаге алгоритма значение целевой функции было наименьшим.

Операции исследующих поисков типа I и П совпадают. Исследующий поиск типа П проводят после поиска по образцу, исследующий поиск типа I - в начальном приближении и после исследующего поиска типа П в случае неудачи поиска по образцу.

Процедура поиска по образцу может быть различной. Движение в направлении, определяемом исследующим поиском типа I, можно проводить в соответствии с указаниями пп.2.I8–2.20 настоящих Рекомендаций. Другой возможный вариант процедуры приведен в примере 8 настоящих Рекомендаций.

Исследующие поиски типов I и П не требуют нормирования. Необходимость нормирования определяет только принятая процедура поиска по образцу. Если проводить движение, последовательно выполняя опыты, то внешние переменные параметры необходимо нормировать. В этом случае рекомендуется ввести глобальную систему координат.

Внешние и внутренние ограничения (3), (5) могут нарушаться в некоторых точках при выполнении исследующих поисков типа I и П. Тогда считают, что в этих точках значение целевой функции не уменьшается.

Пример 8 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма метода поиска по образцу.

4.I4. Алгоритм метода вращающихся координат состоит из следующих основных операций.

А. Принимают точку начального приближения $\bar{X}^{(1,0)}$. Задают n направлений движения, характеризуемых векторами $\pm S^{(1,1)}=(\pm 1,\ldots,0);\ldots;$ $\pm S^{(1,n)}=(0,\ldots,\pm 1)$, заданными в некоторой глобальной системе координат. Принимают К=I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции.

I. Совершают движение в направлении вектора $\pm S^{(K,1)}$. Вначале выполняют один шаг в направлении вектора $+S^{(K,1)}$. Если шаг удачен, продолжают движение в этом направлении. Если шаг не удачен, совершают движение в направлении $-S^{(K,1)}$. В результате получают точку $\bar{X}^{(K,1)}$. Совершают движение в направлении вектора $\pm S^{(K,2)}$; получают точку $\bar{X}^{(K,2)}$ и т.д. Совершают движение в направлении вектора $\pm S^{(K,n)}$. Получают точку $\bar{X}^{(K,n)}=(\bar{X}_1^{(K,n)}, \bar{X}_2^{(K,n)}, \ldots, \bar{X}_n^{(K,n)})$.

2. Находят векторы

$$A^{(K,1)}=\bar{X}^{(K,n)}-\bar{X}^{(K,0)};\quad A^{(K,2)}=\bar{X}^{(K,n)}-\bar{X}^{(K,1)};\ldots;\quad A^{(K,n)}=\bar{X}^{(K,n)}-\bar{X}^{(K,n-1)} \qquad (34)$$

3. Определяют новые направляющие векторы:

$$S^{(K+1,1)}=A^{(K,1)}$$

$$S^{(K+1,i)}=A^{(K,i)}/\|A^{(K,i-1)}\|^2-A^{(K,i-1)}/\|A^{(K,i)}\|^2 \quad (i=2,\ldots,n), \qquad (35)$$

где $\|A^{(K,i)}\|$ –норма вектора $A^{(K,i)}$, определяемая по формуле

$$\|A^{(K,i)}\|=\sqrt{(A_1^{(K,i)})^2+\ldots+(A_n^{(K,i)})^2}$$

Если движение в направлении $\pm S^{(K,i)}$ не приводит к успеху, т.е. $A^{(K,i)}=A^{(K,i+1)}$, то $S^{(K+1,i+1)}=S^{(K,i)}$. Если для некоторого $j<n$ $A^{(K,j)}=A^{(K,j+1)}=\ldots=A^{(K,n)}$ (движения в последних $n-j-1$ направлениях не привели к успеху), то $S^{(K+1,j)}=S^{(K,j)}$; $S^{(K+1,j+1)}=S^{(K,j+1)}$; …; $S^{(K+1,n)}=S^{(K,n)}$.

4. Принимают $\bar{X}^{(K+1,0)}=\bar{X}^{(K,n)}$. Переходят к выполнению (К+I)-г о шага алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда на каком-либо шаге ни одно движение в направлениях $\pm S^{(K,1)},\ldots,\pm S^{(K,n)}$ не приводит к успеху.

4.I5. На первом шаге алгоритма метода вращающихся координат происходит покоординатный спуск с поочередным изменением переменных параметров $\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_n$. Операции выполняют аналогично описанным в п.4.I0 настоящих Рекомендаций. На остальных шагах происходят n движений в направлениях, определяемых векторами $\pm S^{(K,1)},\ldots,\pm S^{(K,n)}$.

Чтобы вычислить направления $S^{(K,1)},\ldots,S^{(K,n)}$ по формулам (35), вначале находят векторы $A^{(K,1)},\ldots,A^{(K,n)}$ по формулам (34). Вектор

$A^{(K,1)}$ представляет собой результирующее перемещение из точки $\bar{X}^{(K,0)}$ в точку $\bar{X}^{(K,m)}$, вектор $A^{(K,2)}$ – результирующее перемещение из точки $\bar{X}^{(K,1)}$ в точку $\bar{X}^{(K,m)}$ и т.д. По формулам (35) вектор $S^{(K+1,1)}$ совпадает с $A^{(K,1)}$. Векторы $S^{(K+1,2)}, \ldots, S^{(K+1,n)}$ строятся ортогонально к $S^{(K+1,1)}$ и друг к другу. В результате движения осуществляются вдоль главных осей квадратичной аппроксимации целевой функции. Ортогональные направления движений на (К+I)-ом шаге как бы поворачиваются по отношению к ортогональным направлениям движения на К-ом шаге, вытягиваясь вдоль оврагов или хребтов поверхности целевой функции. Это объясняет название метода.

Если движение в каких-либо направлениях не приводит к успеху, на шаге 3 алгоритма используют равенства $S^{(K+1,i+1)} = S^{(K,i)}$. В этом случае ортогональность направлений движения на (К+I)-ом шаге может нарушаться. Это вызвано тем, что движения на К-ом шаге производят не точно в ортогональных направлениях, а с округлением до ближайших дискретных значений переменных параметров. Ортогональность может нарушаться также из-за изменения направления, вызванного фиксированием некоторых внешних переменных параметров $x_i = d_{1i}$ или $x_i = d_{2i}$ (см.формулу (4) и п.2.20 настоящих Рекомендаций).

Для выполнения операций алгоритма внешние переменные параметры необходимо нормировать. С этой целью вводят некоторую глобальную систему координат. Начало координат можно поместить в любую точку.

Пример 9 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма метода вращающихся координат.

4.I6. Алгоритм метода поиска по деформируемому многограннику состоит из следующих основных операций.

А. Задают $(n+1)$ точек $X^{(1,j)}\ (j = 1, \ldots, n+1)$, образующих многогранник. Принимают К=I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции:

I. Проводят опыты в точках $X^{(K,j)}\ (j = 1, \ldots, n+1)$, если они не были проведены ранее; получают $(n+1)$ значений целевой функции $y_j^K = y(X^{(K,j)})$.

2. Находят $y_h^K = max\,(y_1^K, \ldots, y_{n+1}^K)$, (36)

где $y_h^K = y(X^{(K,h)})$; $X^{(K,h)}$ – вершина многогранника, в которой целевая функция y принимает наибольшее из $(n+1)$ ее значений на К-ом шаге.

3. Находят $y_l^K = min\,(y_1^K, \ldots, y_{n+1}^K)$, (37)

где $y_i^K = y(x^{(K,i)})$; $x^{(K,i)}$ – вершина многогранника, в котором целевая функция принимает наименьшее из $(n+1)$ ее значений на К-ом шаге.

4. Находят координаты центра тяжести всех вершин многогранника, исключая точку $x^{(K,h)}$

$$x_i^{(K,n+2)} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} x_i^{(K,j)} - x_i^{(K,h)}\right)/n\,; \quad i = 1,\ldots,n\,. \qquad (38)$$

5. Выполняют операцию отражения – находят точку $x^{(K,n+3)}$

$$x^{(K,n+3)} = OK\left[x^{(K,n+2)} + \alpha\left(x^{(K,n+2)} - x^{(K,h)}\right)\right], \qquad (39)$$

где α – коэффициент отражения ($\alpha > 0$).

Проводят опыт, вычисляя $y_{n+3}^K = y(x^{(K,n+3)})$.

6. Если $y_{n+3}^K < y_i^K$, то выполняют операцию растяжения – находят точку $x^{(K,n+4)}$

$$x^{(K,n+4)} = OK\left[x^{(K,n+2)} + \gamma\left(x^{(K,n+3)} - x^{(K,n+2)}\right)\right], \qquad (40)$$

где γ – коэффициент растяжения ($\gamma > 1$).

Проводят опыт, вычисляя $y_{n+4}^K = y(x^{(K,n+4)})$. Если $y_{n+4}^K < y_i^K$, то $x^{(K,h)}$ заменяют на $x^{(K,n+4)}$. Переходят к операции 10. В противном случае заменяют $x^{(K,h)}$ на $x^{(K,n+3)}$, переходят к операции 10.

7. Если $y_{n+3}^K > y_i^K$ для всех $i \neq h$, то выполняют операцию сжатия – находят точку $x^{(K,n+5)}$

$$x^{(K,n+5)} = OK\left[x^{(K,n+2)} + \beta\left(x^{(K,h)} - x^{(K,n+2)}\right)\right], \qquad (41)$$

где β $(0 < \beta < 1)$ – коэффициент сжатия.

Заменяют $x^{(K,h)}$ на $x^{(K,n+5)}$ переходят к операции 10.

8. Если $y_{n+3}^K > y_h^K$, то выполняют операцию редукции – находят $(n+1)$ точек $\hat{x}^{(K,j)}$

$$\hat{x}^{(K,j)} = OK\left[x^{(K,i)} + 0{,}5\left(x^{(K,j)} - x^{(K,i)}\right)\right];\ j = 1,\ldots,n+1\,. \qquad (42)$$

Переходят к операции 10.

9. Если ни одно из условий, указанных в операциях 6,7,8 не выполняется, заменяют точку $x^{(K,h)}$ точкой $x^{(K,n+3)}$. Переходят к операции 10.

10. Заменяют К на К+1 и осуществляют переход к первой операции (К+1)-го шага алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, если многогранник, получаемый на (К+1) шаге, совпадает с многогранником на К-ом шаге или вырождается в точку. Оптимальным считают значение целевой функции y_i^K.

4.17. На каждом шаге алгоритма поиска по деформируемому многограннику вычисляют значения целевой функции в точках, представляющих собой вершины многогранника. Вершины, в которых целевая

функция имеет максимальные значения, последовательно заменяют вершинами с меньшими значениями целевой функции. В процессе поиска минимального значения целевой функции многогранник деформируется, вытягиваясь вдоль оврагов поверхности целевой функции. Это объясняет название метода.

В качестве $(n+1)$ начальных вершин рекомендуется использовать $(n+1)$ точек, задаваемых начальным приближением и n строкам и матриц планирования линейных планов Бокса-Уилсона (см.пп.3.8-3.10 настоящих Рекомендаций).

Основной операцией на каждом шаге алгоритма является отражение, выполняемое по формуле (39). Суть операции состоит в проектировании точки $x^{(k,h)}$ с наибольшим значением целевой функции через центр тяжести всех остальных вершин многогранника. Коэффициент отражения α характеризует расстояние между точками $x^{(k,n+3)}$ (результатом отражения) и $x^{(k,n+2)}$ (центром тяжести всех вершин, исключая $x^{(k,h)}$).

Если в точке $x^{(k,n+3)}$ значение целевой функции меньше наименьшего ее значения в вершинах многогранника, то делают попытку дальнейшего ее уменьшения - выполняют растяжение (40). В результате операции растягивают в γ раз вектор $(x^{(k,n+3)} - x^{(k,n+2)})$. В зависимости от значений целевой функции в точках $x^{(k,n+4)}$ и $x^{(k,n+3)}$ заменяют одной из этих точек точку $x^{(k,h)}$.

Если значение целевой функции в точке $x^{(k,n+3)}$ больше ее значения во всех вершинах многогранника, кроме $x^{(k,h)}$, то производят операцию сжатия (41) - в β раз сжимают вектор $(x^{(k,h)} - x^{(k,n+2)})$. Полученную в результате точку принимают вместо $x^{(k,h)}$. Если же значение целевой функции в точке $x^{(k,n+3)}$ больше ее значения и в точке $x^{(k,h)}$, то выполняют операцию редукции - уменьшают в два раза все векторы $(x^{(k,j)} - x^{(k,l)})$ с отсчетом от точки $x^{(k,l)}$. Полученные точки принимают вершинами нового многогранника.

Рекомендуется принимать следующие значения коэффициентов отражения, растяжения и сжатия: $\alpha = 1$; $\beta = 0{,}5$; $\gamma = 2$.

Рекомендуется использовать следующий критерий останова. Из-за выполнения операций округления многогранник либо вырождается в точку (состоит только из одной вершины), либо процесс заканчивается - многогранники не меняются. В обоих случаях алгоритм заканчивает работу.

В процессе выполнения опытов может произойти нарушение внеш-

них или внутренних ограничений (3), (5). Значение целевой функции в таких опытах принимают равным

$$y = y_h^k + H, \qquad (43)$$

где H – штраф за нарушение указанных ограничений (H > 0).

Таким образом, в первую очередь исключаются те вершины, в которых нарушаются ограничения.

Метод поиска по деформируемому многограннику не требует нормирования внешних параметров, поскольку все операции алгоритма предусматривают только действия сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пример 10 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма метода поиска по деформируемому многограннику.

4.18. При оптимизации железобетонных конструкций, кроме комбинации алгоритмов теории планирования экстремальных экспериментов с алгоритмами методов овражного и сопряженного градиента (см. п.4.9 настоящих Рекомендаций) рекомендуется использовать также комбинации любых алгоритмов, изложенных в пп.4.5–4.17 настоящих Рекомендаций.

Если какой-либо алгоритм после ряда успешных шагов перестает улучшать значения целевой функции, рекомендуется использовать второй, третий и т.д. алгоритмы, принимая начальными приближениями ранее полученные точки с минимальными значениями целевой функции. Это позволяет практически всегда найти локальный минимум или прекратить вычисления, когда затраты на оптимизацию начнут превышать получаемую экономию.

Примеры 5,6,11 настоящих Рекомендаций иллюстрируют применение комбинаций различных алгоритмов.

Примеры расчета

Пример 5. Решение внешней задачи оптимизации прямоугольного железобетонного элемента с помощью алгоритма, включающего односторонний градиентный план (табл.11 и 12), не позволило найти локальный минимум. Наилучшей оказалась точка (12,45,400) со значением целевой функции 3,46 руб. Покажем, как это решение можно улучшить, используя овражный метод.

Введем глобальную систему координат, поместив ее начало в точку (10,25,150) с минимальными значениями параметров. Для нормирования переменных параметров назначим $a_1 = 2$ см; $a_2 = 5$ см; $a_3 = 50$. Формулы перехода от размерных параметров к нормирован—

ным, аналогичные (9), имеют вид

$$\bar{X}_1 = (X_1 - 10)/2\,; \quad \bar{X}_2 = (X_2 - 25)/5\,; \quad \bar{X}_3 = (X_3 - 150)/50\,. \qquad (44)$$

Рассмотрим работу алгоритма при К=I. Пусть $x^{(1,1)}$=(20,45,200) ; $x^{(1,2)}$=(I2,35,400) - точки начального приближения соответственно на первом и третьем шагах в табл.II. Совершая движение по антиградиенту и выбирая точки с минимальными значениями целевой функции, получаем (см.табл.II) $x^{(1,3)}$ =(I6,35,250), $x^{(1,4)}$=(I2,40,400) . Соединяем точки $x^{(1,3)}$ и $x^{(1,4)}$ прямой линией. Движение вдоль этой прямой к успеху не приводит.

При К=2 (см.табл.II) $x^{(2,1)}$ =(20,45,200); $x^{(2,2)}$ = (I2,40,400) ; $x^{(2,3)}$=(I6,35,250); $x^{(2,4)}$=(I2,45,400). Соединим прямой точки $x^{(2,3)}$ и $x^{(2,4)}$. В глобальной системе координат, используя формулы (44), представим точки (I6,35,250) и (I2,45,400) соответственно к а к (3,2,2) и (I,4,5).

Уравнение прямой в записи (30) имеет вид

$$\frac{\bar{X}_1 - 3}{1-3} = \frac{\bar{X}_2 - 2}{4-2} = \frac{\bar{X}_3 - 3}{5-2} \,. \qquad (45)$$

По формуле (3I) $\bar{S}^{(K,3)}$ =(-2,2,3); по формуле (I2) l =(-2/3 ; 2/3; I). Так как $y(\bar{X}^{(2,3)}) = y$ (3,2,2)=4,I6 руб.> $y(\bar{X}^{(2,4)})$ = y (I,4,5)=3,46 руб., то по формуле (32)

$$y(\bar{X}^{(K,3)}) = \min_{\lambda_j} y\{0K[(1,4,5) + \lambda_j(-2/3\,;\,2/3\,;\,1)]\}$$

Если принять λ_j =I, то 0к[(I,4,5)+(-2/3;2/3;I)]=(0,5,6); y(0,5,6)= y (I0,50,450)=3,34 руб. < y (I2,45,400)=3,46 руб. Внешний переменный параметр $\bar{X}_1$ принял граничное значение $\bar{X}_1$ =0. Далее выполняем движение при числе внешних переменных параметров, равном 2 - проводим опыты в точках, в которых значения внешних переменных параметров $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ определяются из выражения 0к[(4,5)+λ_j(2/3;I)], а $\bar{X}_1$ =0. При λ_2 =2 получаем точку (0,5,7); y (0,5,7)= y (I0, 50, 500)=3,39 руб. Значение целевой функции увеличилось, поэтому движение заканчиваем.

Пример 6. В примере 5 настоящих Рекомендаций показано, ч т о алгоритм овражного метода позволяет улучшить решение, полученное с помощью алгоритма, основанного на одностороннем градиентном плане I. Покажем, как улучшить это же решение, используя алгоритм метода сопряженного градиента.

Рассмотрим табл.II. Выберем точками $x^{(1,0)}$, $x^{(1,1)}$ соответственно точки (I2,40,400) и (I2,45,400), служившие начальными приближениями на шагах 4 и 5. Для локальных систем координат с началом в точках $x^{(1,0)}$, $x^{(1,1)}$ a_1 =2 см; a_2 =5 см; a_3 =50.

Координаты градиента равны коэффициентам b_i, полученным в табл.I2 при К=4 и К=5.

$$S^{(1,0)} = -\nabla y(\bar{x}^{(1,0)}) = (-0,31;0,08;-0,07); \quad (46)$$
$$-\nabla y(\bar{x}^{(2,1)}) = (-0,44;-0,27;-0,08).$$

Направление движения $S^{(1,1)}$ определяем по формуле (33), используя значения (46):

$$S^{(1,1)} = (-0,44;-0,27;-0,08) + \quad (47)$$
$$+(-0,31;0,08;-0,07)\frac{0,44^2+0,27^2+0,08^2}{0,31^2+0,08^2+0,07^2} = (-1,23;-0,07;-0,26)$$

Принимаем $x^{(2,0)} = x^{(1,1)} = (12,45,400)$;
$S^{(2,0)} = S^{(1,1)} = (-1,23;-0,07;-0,26)$. На втором шаге совершаем движение в направлении $S^{(2,0)}$ от точки $x^{(2,0)}$. Для вектора $S^{(2,0)}$ по формуле (I2) находим, что $l = (-1;-0,06;-0,21)$. Тогда имеем: y (I0,45,400)=3,33 руб. $\prec y$ (I2,45,400)=3,46 руб. Дальнейшее движение к успеху не приводит, т.е. $x^{(2,1)} = (10,45,200)$.

Определяем направление градиента в точке $x^{(2,1)}$ в соответствии с односторонним градиентным планом I. Тогда в одной из точек матрицы планирования получим локальный минимум y (I0,50,400)=3,27 руб.

Пример 7. В табл.I9-2I представлены результаты решения внешней задачи оптимизации прямоугольного изгибаемого железобетонного элемента алгоритмами метода покоординатного спуска. В табл.I9, 20 приведено решение алгоритмом обычного метода, в табл.2I - алгоритмом модифицированного.

Рассмотрим табл.I9. Начальным приближением, как и ранее, выберем точку $x^{(1,0)}$=(20,45,200). На шаге I алгоритма для выявления направления изменения параметра x_1 проводим опыт 2 в точке ($x_1^{(1,0)} + a_1, x_2^{(1,0)}, x_3^{(1,0)}$)=(22,45,200). Получаем, что значение целевой функции (y =4,87 руб.) больше, чем в точке начального приближения (y = =4,57 руб.). Совершаем движение, уменьшая параметр x_1 до его граничного значения x_1 =I0 см (опыты 3-8); получаем y (I0,45, 200) = =3,37 руб. Аналогично совершаем движение, изменяя параметры x_2, x_3 (соответственно опыты 9,I0 и II-I3). Наилучшее значение целевой функции на первом шаге y (I0,45,300)=3,24 руб. На втором шаге ни одно из движений не приводит к успеху - алгоритм заканчивает работу. Точка (I0,45,300) является локальным минимумом.

Результат применения метода покоординатного спуска зависит от порядка изменения переменных параметров. Если переменные параметры x_1, x_2, x_3 соответствуют высоте h, марке бетона $R_б$, шири-

Таблица I9. Пример применения алгоритма метода покоординатного спуска

К	№ опыта	Переменные параметры			y, руб.	К	№ опыта	Переменные параметры			y, руб.
		$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_\delta)$				$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_\delta)$	
0	I	20	45	200	4,57		9	I0	50	200	3,39
	2	22	45	200	4,87		I0	I0	40	200	-
	3	I8	45	200	4,48	I	II	I0	45	250	3,34
I	4	I6	45	200	4,I3		I2	I0	45	300	3,24
	5	I5	45	200	3,89		I3	I0	45	350	3,57
	6	I4	45	200	3,8I		I4	I2	45	300	3,57
	7	I2	45	200	3,59	2	I5	I0	50	300	3,38
	8	I0	45	200	3,37		I6	I0	40	300	3,6I

Таблица 20. Пример применения алгоритма метода покоординатнатного спуска (по сравнению с табл.I9 изменена нумерация параметров)

К	№ опыта	Переменные параметры			y, руб.	К	№ опыта	Переменные параметры			y, руб
		$x_3(b)$ см	$x_1(h)$ см	$x_2(R_\delta)$				$x_3(b)$ см	$x_1(h)$ см	$x_2(R_\delta)$	
0	I	20	45	200	4,57		I0	I5	40	200	4,I8
	2	20	50	200	4,9I		II	I4	40	200	3,76
	3	20	40	200	4,44	I	I2	I2	40	200	3,55
I	4	20	35	200	4,60		I3	I0	40	200	-
	5	20	40	250	4,47		I4	I2	45	200	3,59
	6	20	40	I50	4,66		I5	I2	35	200	3,95
	7	22	40	200	4,75	2	I6	I2	40	250	3,56
	8	I8	40	200	4,44		I7	I2	40	I50	3,68
	9	I6	40	200	4,24						

не b (табл.20), то локального минимума найти не удается - наилучшее значение y (I2,40,200)=3,55 руб.

Рассмотрим применение алгоритма 2 модифицированного метода (табл.2I). Точка начального приближения $(x_1^{(1,0)}, x_2^{(1,0)}, x_3^{(1,0)})$ = =(20,45,200). На шаге I проводим вначале опыты 2-4 в точках $(x_1^{(1,0)} + a_1, x_2^{(1,0)}, x_3^{(1,0)})$, $(x_1^{(1,0)}, x_2^{(1,0)} + a_2, x_3^{(1,0)})$, $(x_1^{(1,0)}, x_2^{(1,0)}, x_3^{(1,0)} + a_3)$. Получаем y (22,45,200)=4,87 руб. > 4,57 руб.; y (20,50,200) =

Таблица 21. Пример применения алгоритма модифицированного метода покоординатного спуска

К	№ опыта	Переменные параметры $x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	y, руб.	К	№ опыта	Переменные параметры $x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	y, руб.
0	I	20	45	200	4,57		I2	20	35	200	4,60
	2	22	45	200	4,87		I3	20	40	I50	4,66
	3	20	50	200	4,9I		I4	I6	40	200	4,24
	4	20	45	250	4,46	2	I5	I5	40	200	4,I8
I	5	I8	45	200	4,48		I6	I4	40	200	3,76
	6	20	40	200	4,44		I7	I2	40	200	3,55
	7	20	35	200	4,60		I8	I0	40	200	-
	8	22	40	200	4,75		I9	I2	45	200	3,59
2	9	20	45	200	4,57	3	20	I2	40	250	3,56
	I0	20	40	250	4,47		2I	I2	35	200	3,95
	II	I8	40	200	4,44		22	I2	40	I50	3,68

=4,9I руб.> 4,57 руб.; $y(20,45,250)$=4,46 руб.< 4,57 руб. Изменения параметров x_1 и x_2 (опыты 2,3) привели к ухудшению целевой функции, поэтому проводим опыты 5,6 в точках

$$\left(x_1^{(1,0)} - a_1, x_2^{(1,0)}, x_3^{(1,0)}\right), \left(x_1^{(1,0)}, x_2^{(1,0)} - a_2, x_3^{(1,0)}\right).$$

Получим y (I8,45,200)=4,48 руб. < 4,57 руб.; y (20,40,200) = 4,44 руб. < 4,57 руб. Теперь значение целевой функции уменьшилось при изменении каждого из параметров. Наибольшее уменьшение целевой функции получено в опыте 6 при изменении параметра x_2 . Проводим опыт 7, где получаем y (20,35,200)=4,60 руб.> 4,44 руб. Шаг 1 закончен.

На шаге 2 начальным приближением принимаем точку (20,40,200). Все операции выполняем аналогично проведенным на шаге I. При изменении параметра x_1 значение целевой функции по сравнению с ее значением в начальном приближении не меняется, изменение параметров x_2 , x_3 приводит к увеличению y . Поэтому меняем x_1 , получаем y (I2,40,200)=3,55 руб.

На шаге 3, меняя значения параметров, уменьшения целевой функции не получаем. Работа алгоритма окончена.

Результаты опытов шага I показывают, что улучшение целевой функции при изменении каждого из параметров примерно одинаково.

Таблица 22. Пример применения алгоритма метода поиска по образцу

К	№ опыта	Переменные параметры			y, руб.
		$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	
0	I	20	45	200	4,57
I	2	22	45	200	4,87
	3	I8	45	200	4,48
	4	I8	50	200	4,53
	5	I8	40	200	4,44
	6	I8	40	250	4,24
	7	I6	35	300	3,97
	8	I8	35	300	4,32
	9	I5	35	300	3,95
	I0	I5	40	300	3,82
	II	I5	40	350	3,82
	I2	I5	40	250	4,05
2	I3	I2	40	350	3,44
	I4	I4	40	350	3,74
	I5	I0	40	350	3,67
2	I6	I2	45	350	3,40
	I7	I2	45	400	3,46
	I8	I2	45	300	3,57
3	I9	I0	50	400	3,27
	20	I2	50	400	3,73
	2I	I0	55	400	3,39
	22	I0	45	400	3,33
	23	I0	50	450	3,34
	24	I0	50	350	3,48
	25	I0	55	450	3,47
4	26	I2	55	450	3,92
	27	I0	60	450	3,50
	28	I0	50	450	3,34
	29	I0	55	500	3,53
	30	I0	55	400	3,39

Поэтому применение модифицированного метода не эффективно. Наименьшее найденное значение целевой функции y (I2,40,200)=3,55руб. совпадает с полученным обычным методом (табл.20), однако количество опытов оказалось большим.

Пример 8. В табл.22 приведено решение внешней задачи оптимизации изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения алгоритмом метода поиска по образцу. Начальным приближением (опыт I), как и ранее, примем точку (20,45,200). Процедуру поиска по образцу определим формулой

$$x^{(\kappa,n-1)} = 0\kappa\left(2x^{(\kappa,n)} - x^{(\kappa,0)}\right). \qquad (48)$$

В опытах 2-6 проводим исследующий поиск типа 2 на первом ша-

ге. Получаем $X^{(1,1)}$=(I8,45,200) в опыте 3; $X^{(1,2)}$=(I8,40,200) в опыте 5; $X^{(1,3)}$=(I8,40,250) в опыте 6.

Проводим поиск по образцу. В соответствии с формулой (48) при n =3 имеем:

$$X_1^{(1,4)}=0к(2\cdot I8-20)=I6; \qquad X_2^{(1,4)}=0к(2\cdot 40-45)=35;$$

$$X_3^{(1,4)}=0к(2\cdot 250-200)=300 .$$

В опыте 7 y (I6,35,300)=3,97 руб.

Проводим исследующий поиск типа П (опыты 8-I2). Получаем $X^{(1,5)}$= =(I5,35,300) в опыте 9, $X^{(1,6)}= X^{(1,7)}$=(I5,40,300) в опыте I0. Исследующий поиск типа П удачен, так как y (I5,40,300)=3,82 руб. < <y(I8,40,250)=4,24 руб.

Переходим к шагу 2, принимая $X^{(2,0)} = X^{(1,3)}$ =(I8,40,250); $X^{(2,3)}$= =$X^{(1,7)}$=(I5,40,300). По формуле (48) находим, что $X^{(2,4)}$=(I2,40,350) и т.д.

На шагах 3 и 4 при использовании формулы (48) параметр X_1 пришлось округлить до ближайшего возможного значения, равного I0 см. На шагах 2,3 исследующий поиск типа П оказался успешным, на шаге 4 - неудачным. В соответствии с описанным алгоритмом мы на шаге 5 должны провести исследующий поиск типа I вокруг точки (I0,50,400). Опыты этого поиска совпадают с проведенными на шаге 3 опытами 20-24; поэтому в табл.22 они не приведены. Исследующий поиск типа I на шаге 5 оказался неудачным. Работа алгоритма закончена.

Наилучшее значение целевой функции y (I0,50,400)=3,27 руб, является локальным минимумом.

Пример 9. В табл.23 представлено решение внешней задачи оптимизации изгибаемого прямоугольного железобетонного элемента с помощью алгоритма метода вращающихся координат. Чтобы более полно продемонстрировать работу алгоритма, изменим нумерацию внешних переменных параметров по сравнению с принятой в табл.I9, 2I, 22, обозначив ширину b , высоту h и марку бетона $R_б$ соответственно как X_3 , X_2 , X_1 . Глобальную систему координат введем так же, как в примере 5 настоящих Рекомендаций: значения нормированных параметров находим по формулам, аналогичным (44), с учетом другой нумерации. Для удобства точку будем записывать так: X=(X_3 , X_2 , X_1). Начальным приближением, как и ранее, выбираем точку $X^{(1,0)}$ =(20,45,200) или $\bar{X}^{(1,0)}$=(5,4,I).

На шаге I алгоритма осуществляем покоординатный спуск. В результате имеем: $\bar{X}^{(1,1)}= \bar{X}^{(1,2)}$=(5,4,2); $\bar{X}^{(1,3)}$=(3,4,2).

Таблица 23. Пример применения алгоритма метода вращающихся координат

К	№ опыта	Нормированные параметры			Размерные параметры			y, руб
		$\bar{X}_3$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1$	$x_3(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_1(R_б)$	
0	I	5	4	I	20	45	200	4,57
I	2	5	4	2	20	45	250	4,46
	3	5	4	3	20	45	300	4,75
	4	5	5	2	20	50	250	5,06
	5	5	3	2	20	40	250	4,47
	6	6	4	2	22	45	250	5,02
	7	4	4	2	I8	45	250	4,34
	8	3	4	2	I6	45	250	3,98
	9	2,5	4	2	I5	45	250	3,99
2	I0	2,5	4	2	I5	45	250	3,99
	II	4	4	2	I8	45	250	4,34
	I2	2,5	4	I	I5	45	200	3,89
	I3	2	4	0	I4	45	I50	3,87
	I4	I	4	0	I2	45	I50	3,63
	I5	0	4	0	I0	45	I50	3,37
	I6	0	5	0	I0	50	I50	3,44
	I7	0	3	0	I0	40	I50	-
3	I8	I	4	I	I2	45	200	3,59
	I9	0	4	I	I0	45	200	3,37
	20	0	4	2	I0	45	250	3,34
	2I	0	4	3	I0	45	300	3,24
	22	0	4	4	I0	45	350	3,57
	23	0	5	3	I0	50	300	3,38
	24	0	3	3	I0	40	300	3,6I

По формулам (34) находим:

$$A^{(1,1)} = (3,4,2)-(5,4,I)=(-2,0,I);$$

$$A^{(1,2)} = A^{(1,3)} =(3,4,2)-(5,4,2)=(-2,0,0).$$

По формулам (35) находим:

$$S^{(2,1)} = A^{(1,1)}=(-2,0,I);$$

$$S^{(2,2)} = A^{(1,2)} - \frac{A^{(1,1)}}{\|A^{(1,1)}\|^2} - \frac{A^{(1,1)}}{\|A^{(1,2)}\|^2} =$$

$$=(-2,0,0)\cdot 5-(-2,0,I)\cdot 4=(-2,0,-4).$$

Так как $A^{(1,2)}=A^{(1,3)}$, то $S^{(2,3)}=S^{(1,2)}=(0,1,0)$. Далее считаем $\bar{X}^{(2,0)}=(3,4,2)$. Переходим к шагу 2.

На втором шаге алгоритма проводим движение в направлениях $\pm S^{(2,1)}$, $\pm S^{(2,2)}$, $\pm S^{(2,3)}$. Движение в направлении $\pm S^{(2,1)}$ возможно в две стороны, характеризуемые векторами $+l=(-1;0;0,5)$ и $-l=(1;0;-0,5)$. Оба эти движения (опыты 10,11) не приводят к успеху, поэтому $\bar{X}^{(2,1)}=\bar{X}^{(2,0)}=(3,4,2)$. Движение в направлении $\pm S^{(2,2)}$ проводим, используя вектор $+l=(-0,5;0;-1)$. В опытах 13 и 15 соответственно параметры X_1 и X_3 принимают граничные значения: $X_1=150$; $X_3=10$ см, движение в этом направлении окончено; $\bar{X}^{(2,2)}=(0,4,0)$. Движение в направлении $S^{(2,3)}$ (опыты 16,17) к успеху не приводит: $\bar{X}^{(2,3)}=\bar{X}^{(2,2)}=(0,4,0)$.

Аналогично предыдущему получаем: $A^{(2,1)}=A^{(2,2)}=(-3,0,-2)$; $A^{(2,3)}=(0,0,0)$; $S^{(3,1)}=(-3,0,-2)$. Так как $A^{(2,1)}=A^{(2,2)}$, то $S^{(3,2)}=S^{(2,1)}=(-2,0,1)$, Так как $A^{(3,3)}=0$, то $S^{(3,3)}=S^{(2,3)}=(0,1,0)$. В результате получаем, что направления $S^{(3,1)}$ и $S^{(3,2)}$ не ортогональны. На шаге 2 успешным оказалось только движение в направлении $S^{(2,2)}$. Если бы на шаге 2 мы не двигались по границе, определяемой неравенствами (8), направления движения на шагах 3 и 2 отличались бы только нумерацией – выполнялись бы равенства $S^{(3,1)}=S^{(2,2)}$; $S^{(3,2)}=S^{(2,1)}$; $S^{(3,3)}=S^{(2,3)}$. Из-за движения по границе (опыты 14,15) мы получили, что $S^{(3,1)}\neq S^{(2,2)}$, поэтому оказалась нарушенной ортогональность направлений $S^{(3,1)}$ и $S^{(3,2)}$.

Движения в направлениях $S^{(3,1)}$, $S^{(3,2)}$, $S^{(3,3)}$ (соответственно опыты 18,19-22, 23,24) позволили найти локальный минимум y (10, 45,300)=3,24 руб. На шаге 4 (здесь неприведенном) движение ни в одном из направлений не приводит к успеху – алгоритм заканчивает работу.

Пример 10. Результаты решения внешней задачи оптимизации прямоугольного изгибаемого железобетонного элемента алгоритмом метода поиска по деформируемому многограннику представлены в табл.24. При $n=3$; $\alpha=1$; $\beta=0,5$; $\gamma=2$ формулы (38)-(42) имеют соответственно вид

$$X_i^{(k,5)}=\left(\sum_{j=1}^{4}X_i^{(k,j)}-X_i^{(k,h)}\right)/3;\quad i=1,2,3 \qquad (38')$$

$$X^{(k,6)}=OK\left[2X^{(k,5)}-X^{(k,h)}\right]; \qquad (39')$$

$$X^{(k,7)}=OK\left[2X^{(k,6)}-X^{(k,5)}\right]; \qquad (40')$$

$$X^{(k,8)}=OK\left[0,5\left(X^{(k,h)}+X^{(k,5)}\right)\right]; \qquad (41')$$

$$\hat{X}^{(k,j)}=OK\left[0,5\left(X^{(k,j)}+X^{(k,l)}\right)\right]. \qquad (42')$$

В табл.24 на каждом шаге алгоритма приведены значения индекса j в точках $x^{(k,j)}$. При j =I,...,4 имеем вершины многогранника; j =5 обозначает центр тяжести всех вершин, исключая $x^{(k,h)}$; j =6,7 обозначают точки, получаемые соответственно в результате выполнения операций отражения и растяжения.

Вершинами начального многогранника выберем точку (20,45,200) и первые три точки, определяемые матрицей планирования - дробной репликой.

На шаге I по формулам (36), (37) находим $y_h' = y_3' =$ $= y$ (22,50,I50)=4,68 руб; $y_l' = y_2' = y$ (I8,40,250)= =4,24 руб. Координаты центра тяжести всех вершин многогранника, кроме точки $x^{(1,3)}$ =(22,40,I50), находим по формуле (38'):

$x_1^{(1,5)}$=(20+I8+22+I8-22)/3=I8,7; $x_2^{(1,5)}$ =45; $x_3^{(1,5)}$ =200.

Выполняем операцию отражения, используя формулу (39')

$x^{(1,6)}$=0к[2(I8,7; 45; 200)-(22;40;I50)]=(I5; 50; 250).

В дальнейшем при округлении примем следующее правило: если полученное значение переменного параметра x_i (i =I,2,3) находится на равном расстоянии от двух ближайших дискретных значений, то округление производим до ближайшего меньшего.

Полученное значение целевой функции $y_6' = y$(I5,50,250)=4,06 руб. < $y_l' = y_2'$ =4,24 руб. Поэтому выполняем операцию растяжения, используя формулу (40'):

$x^{(1,7)}$ =0к[2(I5;50;250)-(I8,7;45;200)]=(I2;55;300).

Проведя опыт, находим y_7' =3,59 руб. < y_l' =4,24 руб. Заменяем точку $x^{(1,3)}$=(22,40,I50) на точку (I2,55,300) и переходим к шагу 2.

Остальные шаги алгоритма выполняем аналогично. Если в результате выполнения операций алгоритма нарушаются условия (8), то значения переменных параметров принимаем равными ближайшим возможным граничным значениям. На шагах I,2 выполняем операцию растяжения; на шагах 3-5 заменяем $x^{(k,h)}$ на $x^{(k,n+3)}$; на шагах 6,7 выполняем редукцию, на шаге 8 - сжатие. На шаге 9 получаем тот же многогранник, что и на шаге 8 - алгоритм работу заканчивает.

В результате найден локальный минимум y (I0,50,400)=3,27 руб., после проведения I3 различных опытов.

Пример II. Приведем еще один пример использования комбинаций различных алгоритмов. Применяя методы покоординатного спуска, обычный и модифицированный (табл.20,2I в примере 7 настоящих Рекомендаций), мы нашли наименьшее значение целевой функции y (I2, 40,200)=3,55 руб. Продолжим оптимизацию методом поиска по дефор-

Таблица 24. Пример применения алгоритма метода поиска по деформируемому многограннику

К	j	Размерные параметры $x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_б)$	y, руб
	I	20	45	200	4,57
	2	I8	40	250	4,24
	3	22	40	I50	4,68
I	4	I8	50	I50	4,3
	5	I8,7	45	200	-
	6	I5	50	250	4,06
	7	I2	55	300	3,59
	I	20	45	200	4,57
	2	I8	40	250	4,24
	3	I2	55	300	3,59
2	4	I8	50	I50	4,3
	5	I6	48	233	-
	6	I2	50	250	3,46
	7	I0	50	250	3,33
	I	I0	50	250	3,33
	2	I8	40	250	4,24
	3	I2	55	300	3,59
3	4	I8	50	I50	4,3
	5	I3,3	48	267	-
	6	I0	50	400	3,27
	7	I0	50	500	3,39
	I	I0	50	250	3,33
	2	I8	40	250	4,24
	3	I2	55	300	3,59
4	4	I0	50	400	3,27
	5	I0,7	52	3I7	-
	6	I0	60	400	3,4I

К	j	Размерные параметры $x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_б)$	y, руб
	I	I0	50	250	3,33
	2	I0	60	400	3,4I
	3	I2	55	300	3,59
5	4	I0	50	400	3,27
	5	I0	53	350	-
	6	I0	50	400	3,27
	I	I0	50	250	3,37
	2	I0	60	400	3,4I
	3	I0	50	400	3,27
6	4	I0	50	400	3,27
	5	I0	50	350	-
	6	I0	40	300	3,6I
	I	I0	50	300	3,38
	2	I0	55	400	3,39
	3	I0	50	400	3,27
7	4	I0	50	400	3,27
	5	I0	50	367	-
	6	I0	45	350	3,57
	I	I0	50	350	3,48
	2	I0	50	400	3,27
	3	I0	50	400	3,27
8	4	I0	50	400	3,27
	5	I0	50	400	-
	6	I0	50	450	3,34
	I	I0	50	350	3,48
9	2	I0	50	400	3,27
	3	I0	50	400	3,27
	4	I0	50	400	3,27

мируемому многограннику. В табл.25 приведены первые два шага алгоритма. Все операции выполняем аналогично приведенным в табл.24.

Таблица 25. Пример применения комбинации алгоритмов методов покоординатного спуска и поиска по деформируемому многограннику

K	i	Размерные параметры			y, руб	K	i	Размерные параметры			y, руб
		$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$				$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	
I	I	I2	40	200	3,55	2	I	I2	40	200	3,55
	2	I0	35	250	4,I9		2	I4	45	I50	3,87
	3	I4	35	I50	4,09		3	I4	35	I50	4,09
	4	I0	45	I50	3,37		4	I0	45	I50	3,37
	5	I2	40	I67	-		5	I2	43	I67	-
	6	I4	45	I50	3,87		6	I0	50	200	3,39

Для точки $x^{(1,2)}$=(I0,35,250) внутренняя задача оптимизации не имеет решения. Значение целевой функции в этой точке определяем по формуле (43), принимая H=0,I руб.

Выполнив пять шагов алгоритма, нашли минимальное значение целевой функции y (I0,45,200)=3,37 руб. Применив далее еще раз метод покоординатного спуска, нашли локальный минимум y (I0,45, 300)=3,34 руб.

5. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Основные положения

5.I. Для решения многоэкстремальных внешних задач оптимизации железобетонных конструкций рекомендуется использовать алгоритмы, основанные на методах случайного поиска, а также алгоритмы локального поиска в сочетании со случайным поиском.

5.2. В пп.5.5-5.8 настоящих Рекомендаций представлены два алгоритма глобального поиска для решения многоэкстремальных задач оптимизации железобетонных конструкций.

Алгоритм I задает значения внешних переменных параметров в опытах случайно, используя равномерный закон распределения; алгоритм 2 использует нормальный закон распределения. Значения внешних переменных параметров считаются дискретными.

Принципы, использованные при разработке указанных алгоритмов, рекомендуется применять и при разработке других алгоритмов глобального поиска на основе различных методов случайного поиска.

5.3. Приведенные алгоритмы так же, как и алгоритмы локального поиска, рекомендуется использовать для создания универсальных программ оптимизации любых железобетонных конструкций на ЭВМ (см.п.4.I настоящих Рекомендаций). Допускается использование приведенных алгоритмов, когда оптимизация проводится при взаимодействии системы "человек-машина".

5.4. Для получения равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных чисел, которые необходимы для проведения случайного поиска, рекомендуется использовать следующий алгоритм.

А. Принимают $u_1 = 3,14159265$; $u_2 = 0,54210I887$; $K=I$.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции.

I. Вычисляют $t = u_1 + u_2$

2. Присваивают значение $u_1 = u_2$.

3. Если оказывается, что $t \geq 4$, то принимают $t = t - 4$. В противном случае t оставляют без изменений.

4. Присваивают $u_2 = t$

5. Получают К-ое число r_K из последовательности случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$:

$$r_K = t / 4$$

6. Переходят к выполнению первой операции (К+I)-го шага алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда исчерпана совокупность всех необходимых чисел r_K .

Если оптимизация проводится при взаимодействии системы "человек-машина", случайные числа рекомендуется брать по прил.7 настоящих Рекомендаций.

Основные операции алгоритмов

5.5. При решении задачи с помощью алгоритма I глобального поиска используют глобальную систему координат и нормируют внешние переменные параметры, принимая расстояние между ближайшими значениями каждого параметра равными единице (см.п.2.I5 настоящих Рекомендаций).

Алгоритм I глобального поиска состоит из следующих основных операций.

А. Назначают следующие величины:

$x^{(1,0)}$ – точку начального приближения;

N_K – число опытов на каждом шаге;

ψ_i – минимальное число используемых в поиске дискретных

значений внешнего переменного параметра x_i ;

η_i – натуральное число, уменьшающее число используемых в поиске дискретных значений внешнего переменного параметра x_i .

Принимают $\bar{d}_{i1}^{(1)} = \bar{d}_{i1}^{(0)} = \bar{d}_{i1}$; $\bar{d}_{i2}^{(1)} = \bar{d}_{i2}^{(0)} = \bar{d}_{i2}$ $(i = 1,\dots,n)$, где $\bar{d}_{i1}$ и $\bar{d}_{i2}$ – нормированные граничные значения внешних переменных параметров, соответствующие их размерным значениям d_{i1} и d_{i2} из формулы (4). Вычисляют

$$\delta_i^{(1)} = \bar{d}_{i2}^{(1)} - \bar{d}_{i1}^{(1)} \quad (i = 1,\dots,n). \tag{49}$$

Проводят опыт, вычисляя $y(x^{(1,0)})$. Принимают К=I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции:

I. Проводят N_K опытов. Значения внешних переменных параметров определяют по формуле

$$\bar{x}_i^{(K)} = \bar{d}_{i1}^{(K)} + \mathcal{U}[\gamma_i(\delta_i^{(K)} + 1)] \quad (i = 1,\dots,n), \tag{50}$$

где γ_i – случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$; $\mathcal{U}(a)$– целая часть числа a , т.е. наибольшее целое число, не превышающее a .

2. Из N_K опытов выделяют точку $x^{(K,1)}$ с минимальным значением целевой функции, равным $y(x^{(K,1)})$. Если $y(x^{(K,1)}) < y(x^{(K,0)})$, принимают $x^{(K,0)} = x^{(K,1)}$.

3. Проверяют выполнение равенств:

$$\delta_i^{(K)} + 1 = \psi_i \quad (i = 1,\dots,n). \tag{51}$$

Для тех i , при которых равенства (5I) выполняются, переходят к операции 6; для остальных i – к операции 4.

4. Находят

$$\delta_i^{(K)} = \delta_i^{(K)} - \eta_i . \tag{52}$$

Для тех i , при которых справедливо неравенство $\delta_i^{(K)} \geq \psi_i - 1$, переходят к операции 6; для остальных i – к операции 5.

5. Принимают $\delta_i^{(K)} = \psi_i - 1$

6. Принимают

$$\bar{d}_{i2}^{(K)} = \mathcal{U}(\bar{x}_i^{(K,0)} + 0{,}5\,\delta_i^{(K)}); \qquad \bar{d}_{i1}^{(K)} = \bar{d}_{i2}^{(K)} - \delta_i^{(K)}. \tag{53}$$

Если $\bar{d}_{i2}^{(K)} > \bar{d}_{i2}^{(0)}$ или $\bar{d}_{i1}^{(K)} < \bar{d}_{i1}^{(0)}$, то соответственно принимают:

$$\bar{d}_{i2}^{(K)} = \bar{d}_{i2}^{(0)}; \quad \bar{d}_{i1}^{(K)} = d_{i2}^{(K)} - \delta_i^{(K)}$$

или

$$\bar{d}_{i1}^{(K)} = \bar{d}_{i1}^{(0)}; \quad \bar{d}_{i2}^{(K)} = d_{i1}^{(K)} - \delta_i^{(K)} . \tag{54}$$

7. Принимают К=К+I. Переходят к выполнению (К+I)-го шага алгоритма.

В. Для проверки окончания работы рекомендуется использовать один из следующих критериев:

I. Алгоритм заканчивает работу после выполнения заранее наз-

наченного числа шагов.

2. Алгоритм заканчивает работу, если после выполнения заранее назначенного числа шагов с момента улучшения целевой функции дальнейшего ее улучшения не происходит.

3. Алгоритм заканчивает работу, если затраты на оптимизацию начинают превышать получаемую экономию.

5.6. На каждом шаге К алгоритма проводят N_K опытов. Значения внешних переменных параметров в опытах задают случайно по формуле (50). Эта формула равновероятным образом выбирает какое-либо значение каждого внешнего переменного параметра из некоторого множества его возможных дискретных значений – зоны поиска. На первом шаге, принимая $\bar{d}_{i1}^{(1)} = \bar{d}_{i1}$ и $\bar{d}_{i2}^{(1)} = \bar{d}_{i2}$, включают в указанное множество всю совокупность возможных значений каждого переменного параметра. Затем зону поиска сужают, используя формулу (52).

При уменьшении целевой функции центр зоны поиска помещают в точку $x^{(K,0)}$ с минимальным значением y – используют формулы (53). Формулы (54) не допускают выхода новой зоны поиска за границы исходной. Сужение зоны поиска производят так, чтобы число возможных значений каждого переменного параметра не было меньше наперед заданного числа ψ_i – формула (51), операция 5.

Таким образом, при уменьшении целевой функции сужают зону поиска по (52); в соответствии с формулой (50) вероятность того, что переменный параметр примет одно из значений тем больше, чем меньше выражение $\bar{d}_{i2}^{(K)} - \bar{d}_{i1}^{(K)} + 1$, характеризующее все множество возможных значений параметра x_i. Точность метода во многом зависит от величин ψ_i, определяющих минимальные размеры зоны поиска. Чем величины ψ_i больше, тем меньше вероятность потери глобального минимума, но вместе с тем возрастает число опытов.

В опытах, где нарушаются внутренние и внешние ограничения (3), (5), считают, что значение целевой функции не уменьшается по сравнению с $y(x^{(K,0)})$.

Пример 12 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма 1 глобального поиска.

5.7. При решении внешней задачи оптимизации с помощью алгоритма 2 глобального поиска используют глобальную систему координат, помещая ее начало в центр начальной зоны поиска (4). Внешние переменные параметры нормируют, принимая расстояния между

ближайшими значениями переменного параметра равными единице.

Алгоритм 2 глобального поиска состоит из следующих основных операций.

А. Назначают следующие величины:

$x^{(1,0)}$ – точку начального приближения;

$\sigma^{(1)} = (\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_n^{(1)})$ – вектор среднего квадратического отклонения;

$f(\sigma^{(K)})$ – функцию, уменьшающую $\sigma^{(K)}$ при удачных опытах;

Q – число неудачных опытов, после которых значение среднего квадратического отклонения принимается равным $\sigma^{(1)}$.

Проводят опыт, определяя $y(x^{(1,0)})$. Принимают К=I.

Б. На К-ом шаге алгоритма выполняют следующие операции:

I. Задают значение внешних переменных параметров по формуле:

$$x_i^{(K,1)} = Ox\left[\bar{x}_i^{(K,0)} + \sigma_i^{(K)}\varphi\right]; \quad i = 1, \ldots, n; \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{12}\gamma_j - 6, \tag{55}$$

где γ_j – случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$.

2. Проводят опыт в точке $x^{(K,1)}$, вычисляя $y(x^{(K,1)})$. Если $y(x^{(K,1)}) < y(x^{(K,0)})$, принимают $x^{(K,0)} = x^{(K,1)}$; $\sigma^{(K)} = f(\sigma^{(K-1)})$. Переходят к операции 4. Иначе – к операции 3.

3. Если число опытов после улучшения целевой функции равно Q, принимают $\sigma^{(K)} = \sigma^{(1)}$.

4. Принимают К=К+I. Переходят к выполнению (К+I)-го опыта.

В. Критерии окончания работы алгоритма 2 принимают такими же, как в алгоритме I (см.п.5.5 настоящих Рекомендаций).

5.8. При использовании алгоритма 2 глобального поиска в опытах значения внешних переменных параметров задают случайно по формулам (55). Эти формулы реализуют нормальный закон распределения с математическим ожиданием в точке $x^{(K,0)}$ и средним квадратическим отклонением, равным $\sigma^{(1)}$ или $f(\sigma^{(K)})$. После удачного опыта, когда значение целевой функции уменьшается, среднее квадратическое отклонение, принимавшееся на предыдущем шаге, уменьшают в соответствии с законом $f(\sigma^{(K)})$; математическое ожидание помещают в точку с минимальным значением целевой функции. Если целевая функция не уменьшается, величины математического ожидания не меняют; среднее квадратическое отклонение также оставляют неизменным, если число опытов после уменьшения целевой функции меньше Q, и принимают равным начальному $\sigma^{(1)}$, если указанное число опытов равно Q.

Алгоритм 2 является более осторожным, чем алгоритм I: нормальный закон распределения имеет бесконечные "хвосты", благодаря чему глобальный минимум не может быть утерян.

В опытах, где нарушаются внешние и внутренние ограничения (3), (5) считают, что значение целевой функции не уменьшается по сравнению с $y(x^{(K,0)})$. Если нарушаются ограничения (4), то можно либо не проводить опыта в этой точке, либо использовать некоторый закон, ставящий в соответствие точке вне зоны поиска (4) точку внутри нее, где и провести опыт.

Пример I3 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма 2 глобального поиска.

5.9. Алгоритмы, основанные на теории планирования экстремальных экспериментов и методах безусловной минимизации (см.разд. 3, 4 настоящих Рекомендаций), предназначены для решения одноэкстремальных задач. В сочетании с процедурой случайного поиска, проверяющей многоэкстремальность целевой функции, разработанные алгоритмы рекомендуется использовать также и для решения многоэкстремальных задач.

Пусть алгоритмы локального поиска нашли точку $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ с минимальным значением целевой функции $y(x^{(1)})$. Проверку задачи на многоэкстремальность проводят в следующем порядке. Используя всю зону поиска (4), находят случайно n координат точки $x^{(K)}$ при К=2 по формуле

$$x_i^{(K)} = OK\left[\gamma_i\,(d_{2i} - d_{1i})\right]; \quad i = 1,\dots,n, \qquad (56)$$

где γ_i – случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$.

Если $y(x^{(2)}) \leq y(x^{(1)})$, принимают точку $x^{(2)}$ новым начальным приближением и вновь применяют алгоритмы локального поиска. Если $y(x^{(2)}) > y(x^{(1)})$, применяют формулу (56) для К=3 и т.д. Вычисления прекращают, если после заранее назначенного числа опытов в точках, определяемых по формуле (56), улучшения целевой функции не происходит.

Примеры расчета.

Пример I2. Решим внешнюю задачу оптимизации прямоугольного изгибаемого железобетонного элемента с помощью алгоритма I глобального поиска.

Нормированные значения внешних переменных параметров приведены в табл.26; начало глобальной системы координат находится в

Таблица 26. Пример применения алгоритма I глобального поиска. Нормирование переменных параметров

Нормированные параметры		0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
Размерные параметры	x_1,см	I0	I2	I4	I5	I6	I8	20	22	24	25	-	-
	x_2,см	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	x_3	I50	200	250	300	350	400	450	500	-	-	-	-

точке (I0,25,I50). Табл.27 содержит данные об условиях и результатах опытов; табл.28 – данные о центральной точке зоны поиска $\bar{x}^{(k)}=(\bar{x}_1^{(k)}, \bar{x}_2^{(k)}, \bar{x}_3^{(k)})$, ее границах $\bar{a}_{i1}^{(k)}$ и $\bar{a}_{i2}^{(k)}$ и размерах, характеризуемых величинами $\delta_i^{(k)}$ +I. Приведены результаты вычислений на первых пяти шагах алгоритма.

Для выполнения операций алгоритма задаем следующие исходные значения величин: N_k =5 при всех К; ψ_i =4; η_i =I для i =I,2,3. Начальным приближением принимаем точку $x^{(1,0)}$=(20,45,200); y(20,45, 200)=4,57 руб.

Случайные числа γ_i записываем в виде $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$. Значения ε_1, ε_2, ε_3 бэрем из прил.7 настоящих Рекомендаций, выписывая три цифры и пропуская четвертую.

На первом шаге принимаем $\bar{a}_{11}^{(1)}=\bar{a}_{21}^{(1)}=\bar{a}_{31}^{(1)}=0$; $\bar{a}_{12}^{(1)}=9$; $\bar{a}_{22}^{(1)}=11$; $\bar{a}_{32}^{(1)}=7$. Используя формулы (49), находим $\delta_i^{(1)}$ и $\delta_i^{(1)}$ +I для i =I,2,3. Записываем эти значения в табл.27.

В опыте1при К=I γ_1 =0,I53. По формуле (50)

$$\bar{x}_1^{(1)}=0+Ц(0,I53.I0)=I.$$

Аналогично $\bar{x}_2^{(1)}$ =3; $\bar{x}_3^{(1)}$=6. Тогда y (I,3,6)= y (I2,40,450)=3,6Iру

Проводя опыты 2–5 при К=I, находим, что $x^{(1,1)}$=(I2,40,450); $y(x^{(1,1)})$= 3,65 руб. < $y(x^{(1,0)})$ =4,57 руб. Принимаем $x^{(1,0)}$=(I2,40,450).

Равенства (5I) не выполняются для всех i . По формуле (52) : $\delta_1^{(1)}$ =9–I=8; $\delta_2^{(1)}$=I0; $\delta_3^{(1)}$=6. Поскольку $\delta_i^{(1)}>\psi_i$ –I=3 для i =I,2,3, по формулам (53) находим: $\bar{a}_{12}^{(1)}$ =Ц(I+0,5.8)=5; $\bar{a}_{11}^{(1)}$=5–8=–3. Видим, что $\bar{a}_{11}^{(1)}$ =–3 < $\bar{a}_{11}^{(0)}$ =0. По формулам (54) находим: $\bar{a}_{11}^{(1)}$=0; $\bar{a}_{12}^{(1)}$ = =0+8=8. Аналогично вычисляем $\bar{a}_{i1}^{(1)}$, $\bar{a}_{i2}^{(1)}$ для i =2,3. Затем переходим к выполнению второго шага алгоритма и т.д.

Алгоритм нашел глобальный минимум за I4 шагов.

Пример I3. Решим внешнюю задачу оптимизации прямоугольного изгибаемого железобетонного элемента с помощью алгоритма 2 глобального поиска.

Таблица 27. Пример применения алгоритма I глобального поиска. Опыты

К	№ опыта	Случайные числа			Нормированные параметры			Размерные параметры			y, руб
		γ_1	γ_2	γ_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_b)$	
0	–	–	–	–	6	4	I	20	45	200	4,57
I	I	0,I53	0,288	0,8I8	I	3	6	I2	40	450	3,6I
	2	0,6I2	0,92I	0,382	6	II	3	20	80	300	7,I3
	3	0,604	0,84I	0,98	6	I0	7	20	75	500	7,62
	4	0,08	0,997	0,56	0	II	4	I0	80	350	3,98
	5	0,99I	0,34	0,07I	9	4	0	25	45	I50	5,06
2	I	0,46I	0,763	0,I03	4	8	I	I6	65	200	4,59
	2	0,678	0,323	0,66	6	3	5	20	40	400	4,66
	3	0,67	0,39I	0,453	6	4	4	20	45	350	4,89
	4	0,384	0,9I3	0,425	3	I0	3	I5	75	300	5,25
	5	0,766	0,835	0,522	6	9	4	20	I0	350	6,57
3	I	0,687	0,555	0,576	5	5	5	I8	50	400	4,89
	2	0,863	0,938	0,7I9	6	9	6	20	70	450	7,06
	3	0,995	0,99	0,238	7	9	3	22	70	300	6,77
	4	0,026	0,653	0,732	0	6	6	I0	55	450	3,47
	5	0,898	0,867	0,I64	7	8	2	22	65	250	6,32
4	I	0,45I	0,7I	0,7I5	3	8	6	I5	65	450	5,27
	2	0,8I4	0,899	0,I22	6	I0	3	20	75	300	6,72
	3	0,372	0,856	0,983	2	9	7	I4	70	500	5,27
	4	0,885	0,52	0,236	6	6	4	20	55	350	5,56
	5	0,352	0,827	0,8I6	2	9	7	I4	70	500	5,27
5	I	0,659	0,565	0,286	3	6	5	I5	55	400	4,62
	2	0,702	0,627	0,72	4	7	6	I6	60	450	5,I6
	3	0,878	0,497	0,627	5	5	6	I8	50	450	5,02
	4	0,I25	0,I08	0,939	0	2	7	I0	35	500	3,73
	5	0,375	0,393	0,589	2	5	6	I4	50	450	4,I

В табл.29 представим нормированные значения внешних переменных параметров и соответствующие им размерные значения; начало глобальной системы координат поместим в центр зоны поиска (8) – точку (I8,55,350). В табл.30 представлены результаты первых 20 опытов.

Таблица 28. Пример применения алгоритма I глобального поиска. Значения $\bar{x}^{(k)}$, $\bar{d}_{i1}^{(k)}$, $\bar{d}_{i2}^{(k)}$, $\delta_i^{(k)}+1$.

К	x_1				x_2				x_3			
	$\bar{x}_1^{(k,0)}$	$\bar{d}_{11}^{(k)}$	$\bar{d}_{12}^{(k)}$	$\delta_1^{(k)}+1$	$\bar{x}_2^{(k,0)}$	$\bar{d}_{21}^{(k)}$	$\bar{d}_{22}^{(k)}$	$\delta_2^{(k)}+1$	$\bar{x}_3^{(k,0)}$	$\bar{d}_{31}^{(k)}$	$\bar{d}_{32}^{(k)}$	$\delta_3^{(k)}+1$
I	6	0	9	I0	4	0	II	I2	I	0	7	8
2	I	0	8	9	3	0	I0	II	6	I	7	7
3	I	0	7	8	3	0	9	I0	6	2	7	6
4	0	0	6	7	6	2	I0	9	6	3	7	5
5	0	0	5	6	6	2	9	8	6	4	7	4

Таблица 29. Пример применения алгоритма 2 глобального поиска. Нормирование переменных параметров

Нормированные параметры		-6	-5	-4	-3	-2	-I	0	I	2	3	4	5
Размерные параметры	x_1, см	-	I0	I2	I4	I5	I6	I8	20	22	24	25	-
	x_2, см	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	x_3	—	—	I50	200	250	300	350	400	450	500	-	-

Принимаем: $\sigma^{(1)}=(2,3,2)$; $f(\sigma^{(k)})=0,9\sigma^{(k-1)}$; $Q=3$. Случайные числа γ_j представляем в виде $0,\varepsilon_1\varepsilon_2$, где ε_1, ε_2 – случайные цифры, приведенные в прил.7 настоящих Рекомендаций. Начальное приближение $x^{(1,0)}=(20,45,200)$; $y(x^{(1,0)})=4,57$ руб.

При К=I, i =I выписываем I2 случайных чисел из прил.7: 0,I5; 0,34; 0,6I; 0,28; 0,60; 0,47; 0,08; 0,06; 0,99; 0,I5; 0,28; 0,82. Тогда ξ =-I,I7; $\bar{x}_1^{(1,1)}=0к[I-2.I,I7]=-I$. Аналогично $\bar{x}_2^{(1,1)}=-I$; $\bar{x}_3^{(1,1)}=-4$. Из прил.6 находим $y(\bar{x}^{(1,1)})=y(-I,-I,-4)=y(I6,50,I50)=4,02$ руб. $< y(x^{(1,0)})=4,57$ руб. Поэтому принимаем $\bar{x}^{(2,0)}=(-I,-I,-4)$; $\sigma_2=0,9(2,3,2)=(I,8;2,7;I,8)$; переходим к выполнению опыта при К=2 и т.д. Если значения параметров оказываются

Таблица 30. Пример применения алгоритма 2 глобального поиска. Опыты

i	K	ξ	$\sigma_i^{(K)}$	$\bar{x}_i^{(K,0)}$	$\bar{x}_i^{(K,1)}$	$x_i^{(K,1)}$	y	K	ξ	$\sigma_i^{(K)}$	$\bar{x}_i^{(K,0)}$	$\bar{x}_i^{(K,1)}$	$x_i^{(K,1)}$	y
I		-I,I7	2	I	-I	I6			0,04	2	-I	-I	I6	
2	I	0,4	3	-2	-I	50	4,02	II	0,58	3	-4	-2	45	4,05
3		-I,3	2	-3	-4	I50			0,II	2	-I	-I	300	
I		-0,I5	I,8	-I	-I	I6			0,39	2	-I	0	I8	
2	2	-0,93	2,7	-I	-4	35	3,97	I2	-0,66	3	-4	-6	25	5,20
3		I,7I	I,8	-4	-I	300			0,42	2	-I	0	350	
I		2,29	I,62	-I	3	24			-I,02	2	-I	-3	I4	
2	3	I,39	2,43	-4	-I	50	6,22	I3	0,08	3	-4	-4	35	3,92
3		I,48	I,62	-I	I	400			0,79	2	-I	I	400	
I		0,48	I,62	-I	0	I8			0,06	I,8	-3	-3	I4	
2	4	I,08	2,43	-4	-I	50	4,7I	I4	I,45	2,7	-4	0	55	4,42
3		0,66	I,62	-I	0	350			I,6	I,8	I	2	450	
I		0,06	I,62	-I	-I	I6			-0,I	I,8	-3	-3	I4	
2	5	0,75	2,43	-4	-2	45	4,I6	I5	-0,65	2,7	-4	-6	25	6,20
3		0,74	I,62	-I	0	350			0,02	I,8	I	I	400	
I		-0,I9	2	-I	-I	I6			-0,47	I,8	-3	-4	I2	
2	6	-I,47	3	-4	-6	25	5,43	I6	-0,42	2,7	-4	-5	30	4,44
3		-0,59	2	-I	-2	250			-I,64	I,8	I	-2	250	
I		-0,I4	2	-I	-I	I6			0,07	2	-3	-3	I4	
2	7	-I	3	-4	-6	25	5,I3	I7	-0,94	3	-4	-5	30	4,37
3		-0,0I	2	-I	-I	300			0,3I	2	I	2	450	
I		I,94	2	-I	3	24			-0,08	2	-3	-3	I4	
2	8	-0,03	3	-4	-4	35	5,22	I8	-0,55	3	-4	-6	25	-
3		I,34	2	-I	2	450			-I,72	2	I	-2	250	
I		I,39	2	-I	2	22			I,46	2	-3	0	I8	
2	9	0,5I	3	-4	-2	45	5,47	I9	-3,I2	3	-4	-6	25	5,I8
3		0,92	2	-I	I	400			I,37	2	I	2	450	
I		0,29	2	-I	0	I8			I,29	2	-3	-I	I6	
2	I0	0,44	3	-4	-3	40	4,24	20	-I,I8	3	-4	-6	25	5,I9
3		-0,26	2	-I	-2	250			-0,48	2	I	0	350	

больше или меньше граничных d_{i1} , d_{i2} , то в формуле (55) используем значение $\delta_{it} = \delta_i^{(k)} / 2^t$, подбирая такое наименьшее натуральное число t , чтобы точка оказалась внутри гиперпараллелепипеда или на его границе.

Алгоритм нашел глобальный минимум за 60 опытов.

6. РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Основные положения

6.I. При решении многокритериальных задач оптимизации железобетонных конструкций рекомендуется использовать алгоритмы, в которых векторная целевая функция не приводится к скалярной (с м. п.I.4 настоящих Рекомендаций).

Допускается также приводить векторную целевую функцию к скалярной по формуле

$$y = f(y_1, \ldots, y_p), \qquad (57)$$

где y - скалярная целевая функция, к которой приводится векторная; f - функция приведения векторной целевой функции к скалярной.

В функцию f в формуле (57) каждый из критериев y_i (i=I,..., p) входит со своим весом α_i . Например, формула (57) может иметь вид

$$y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i$$

Веса α_i выражают степень предпочтения одних критериев другим.

Если векторная целевая функция приводится к скалярной по формуле (57), то для ее оптимизации рекомендуется использовать алгоритмы, изложенные в разд.3-5 настоящих Рекомендаций.

6.2. В пп.6.4-6.8 настоящих Рекомендаций представлены подходы к решению многокритериальных задач оптимизации, когда векторная целевая функция не приводится к скалярной. Эти подходы включают: методы оптимизации на множество Парето (с использованием чебышевского, интегрального и дифференциального принципов), оптимизацию при известных минимальных значениях критериев y_i (i=I,..., p), методы пороговой оптимизации и уступок, оптимизацию на основе принципа справедливого компромиса.

При выборе подхода к решению многокритериальных задач, когда векторная целевая функция не приводится к скалярной, следует учитывать, что наибольшую информацию о векторной целевой функции дает множество Парето. Выделив это множество, получают набор всех оп-

тимальных решений, которые можно оценить с инженерной точки зрения либо воспользоваться одним из принципов оптимизации – чебышевским, интегральным, дифференциальным. Поэтому рекомендуется проводить оптимизацию на множестве Парето.

Чтобы выделить множество Парето, необходимо провести полный перебор вариантов по внешним переменным параметрам. Если число внешних параметров велико, эта задача становится невыполнимой. Тогда допускается использовать другие методы векторной оптимизации.

Решения, наиболее близкие к получаемым при оптимизации на множестве Парето, можно найти, если известны минимальные значения критериев. В этом случае рекомендуется использовать те же принципы – чебышевский, интегральный, дифференциальный. Если из скалярных критериев, входящих в векторный, можно выделить один главный, а для остальных указать максимальные возможные значения, то рекомендуется использовать метод пороговой оптимизации. В этом случае задача сводится к однокритериальной с дополнительными внешними ограничениями. Если критерии можно ранжировать по значимости, рекомендуется применять метод уступок. И, наконец, если нет информации об относительной ценности критериев, рекомендуется применять алгоритмы, использующие принцип справедливого компромисса.

Алгоритмы решения многокритериальных задач

6.3. Для выделения множества Парето (определение множества Парето – см.п.I.4 настоящих Рекомендаций) следует провести опыты при различных значениях внешних переменных параметров. Если есть возможность, выполняют полный перебор – проводят опыты при всех возможных значениях внешних переменных параметров. Если такой возможности нет, проводят опыты при той совокупности значений внешних переменных параметров, где, по мнению исследователя, наиболее вероятна оптимальная точка. Однако в этом случае нет уверенности, что будет выделено все множество Парето.

Имея результаты опытов, для выделения множества Парето рекомендуется использовать следующий алгоритм:

А. Засылают в память алгоритма результаты первого опыта – точку $x^{(1)}$ и значение векторной целевой функции $y(x^{(1)})$. Принимают K=2.

Б. На K-ом шаге алгоритма рассматривают точку $x^{(K)}$ и $y(x^{(K)})$.

Если среди точек, находящихся в памяти алгоритма, нет более предпочтительных, чем $x^{(k)}$, или эквивалентных $x^{(k)}$, то засылают в память алгоритма $x^{(k)}$ и $y(x^{(k)})$. Исключают из памяти алгоритма менее предпочтительные точки. Переходят к (К+I)-му шагу алгоритма.

В. Алгоритм заканчивает работу, когда исчерпано множество всех точек, в которых были проведены опыты.

6.4. Алгоритмы оптимизации на множество Парето строятся следующим образом. Имея множество Парето, следует выделить минимальные значения каждого из критериев $y_{1\,min}, \ldots, y_{p\,min}$. В алгоритмах используются безразмерные, или нормированные критерии $\bar{y}_i$, определяемые путем деления их размерного значения y_i на минимальное.

$$\bar{y}_i = y_i / y_{i\,min} \quad (i = 1, \ldots p). \qquad (58)$$

Нормированный векторный критерий определяется так: $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p)$ При построении алгоритмов рекомендуется применять один из трех принципов многокритериальной оптимизации – чебышевский, интегральный или дифференциальный.

I. Согласно чебышевскому принципу оптимизации оптимальное решение определяется следующим соотношением:

$$\underset{x}{opt}\ \bar{y}(x) = \min_{x \in \Pi} \max_{x} \bar{y}_i(x). \qquad (59)$$

Чебышевский принцип предусматривает наиболее равномерное понижение всех критериев "путем подтягивания" наиболее отстающего из критериев до уровня остальных критериев.

2. Согласно принципу интегральной оптимизации (или принципу оптимизации в среднем) оптимальное решение определяется соотношением

$$opt\ \bar{y}(x) = \min_{x \in \Pi} \sum_{i=1}^{p} \bar{y}_i(x), \qquad (60)$$

а в более общем случае соотношением

$$opt\ \bar{y}(x) = \min_{x \in \Pi} \sum_{i=1}^{p} y_i^S(x). \qquad (61)$$

Формула (61) выражает принцип средней оптимизации степени S. Принцип интегральной оптимизации предусматривает понижение суммы всех нормированных критериев, или, что то же, понижение среднего уровня всех критериев. Недостаток этого принципа состоит в том, что низкое значение обобщенного критерия может достигаться за счет одного или группы критериев при весьма высоком уровне остальных критериев. Однако принцип интегральной оптимизации имеет и положительное свойство: он позволяет реализовать различные

принципы оптимизации за счет изменения степени S в формуле (61), приближаясь к чебышевскому принципу или удаляясь от него.

3. Согласно принципу дифференциальной оптимизации оптимальное решение определяется соотношением

$$\underset{x}{opt}\ \bar{y}(x) = \min_{x \in \Pi}\ \min_{i}\ \bar{y}_i(x). \qquad (62)$$

Этот принцип противоположен чебышевскому, предусматривая наибольшую дифференциацию критериев.

Применяя различные принципы оптимизации на множестве Парето, при каждом наборе внешних переменных параметров векторный критерий качества оценивается одним числом, определяемым по формулам (59)-(62). Это позволяет использовать для векторной оптимизации алгоритмы, изложенные в разд.3,4,5 настоящих Рекомендаций.

Пример 14 настоящих Рекомендаций иллюстрирует проведение оптимизации на множестве Парето.

6.5. Если известны минимальные значения скалярных критериев, входящих в векторный, то критерии следует нормировать по формуле (58), а затем провести оптимизацию одним из изложенных в разд.3,4,5 настоящих Рекомендаций алгоритмом с использованием какого-либо принципа векторной оптимизации (59)-(62).

Назначать минимальные значения критериев рекомендуется на основе имеющихся аналогов либо интуитивно. Например, могут быть взяты наилучшие показатели ранее запроектированных аналогичных конструкций или показатели, которых хотят достичь. При этом, однако, следует принимать во внимание относительные ценности критериев. Если, например, применяя чебышевский принцип, назначить минимальное значение одного из критериев слишком малым по сравнению с остальными, то оптимизация практически будет выполняться только по одному этому критерию (нормированные значения указанного критерия в опытах будут велики). Аналогичная ситуация возникает, если применяя дифференциальный принцип оптимизации, минимальное значение одного из критериев принять слишком большим .

Пример 15 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритмов многокритериальной оптимизации при известных минимальных значениях скалярных критериев, входящих в векторный.

6.6. Для применения алгоритмов на основе метода пороговой оптимизации из скалярных критериев, входящих в векторный, следует выделить один наиболее важный (его обозначают y_1), а для всех остальных критериев следует указать максимально допустимое зна-

чение $y_{i\,max}$. В процессе решения внешней задачи оптимизации должны выполняться неравенства:

$$y_i \leq y_{i\,max}; \quad i = 2, \ldots, p. \qquad (63)$$

Вначале следует провести оптимизацию по наиболее важному критерию y_1, используя один из алгоритмов, изложенных в разд.3,4, 5 настоящих Рекомендаций. Для остальных критериев $y_{i\,max}\,(i=2,\ldots,p)$ является некоторым "порогом", ограничивающим их возможные значения. Неравенства (63) представляют собой дополнительные внешние ограничения. Таким образом, многокритериальная задача сводится к однокритериальной с дополнительными внешними ограничениями.

Пример I6 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма на основе метода уступок.

6.7. Для применения алгоритмов на основе метода уступок необходимо все скалярные критерии, входящие в векторный, ранжировать по значимости. Наиболее важный критерий обозначают y_1, второй по важности – y_2 и т.д.; наименее важный критерий обозначают y_p.

Вначале проводят оптимизацию по наиболее важному критерию y_1 – находят такую точку $x^{(1)}$, где y_1 принимает минимальное значение $y_{1\,min}$ при выполнении внешних и внутренних ограничений (3), (5); остальные критерии пока во внимание не принимают. Затем назначают "уступку" $\Delta y_1 > 0$ по критерию y_1: в дальнейшем требуют выполнения неравенства

$$y_1 \leq y_{1\,min} + \Delta y_1 \qquad (64)$$

Таким образом, допускают некоторое увеличение критерия y_1 по сравнению с найденным минимальным значением $y_{1\,min}$.

Далее проводят оптимизацию по критерию y_2, принимая $x^{(1)}$ начальным приближением; находят точку $x^{(2)}$, где y_2 имеет минимальное значение $y_{2\,min}$ при выполнении ограничений (3),(5),(64). Назначают уступку $\Delta y_2 > 0$; составляют неравенство для y_2, аналогичное (64), требуя его выполнения на дальнейших этапах решения внешней задачи оптимизации и т.д. На последнем этапе, проводя оптимизацию по критерию y_p, требуют выполнения $(p-1)$ неравенств, аналогичных (64).

Для оптимизации по каждому из критериев $y_1, \ldots, y_p$ рекомендуется использовать алгоритмы, рассмотренные в разд.3,4,5 настоящих Рекомендаций, добавляя к внешним ограничениям неравенства вида (64).

Пример I7 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма на основе метода пороговой оптимизации.

6.8. Для применения алгоритмов на основе принципа справедливого компромисса рассматриваются две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. П у с т ь векторные критерии качества в этих точках соответственно характеризуются значениями $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(1)})$ и $y^{(2)} = (y_1^{(2)}, \ldots, y_p^{(2)})$. Находят разности $\Delta y_i = y_i^{(1)} - y_i^{(2)}$ для $i = 1, \ldots, p$. Вычисляют две суммы:

$$\sigma_1 = \sum_i \Delta y_i \Big/ \min_{x^{(1)}, x^{(2)}} y_i \qquad \text{для } \Delta y_i < 0; \qquad (65)$$

$$\sigma_2 = \sum_i \Delta y_i \Big/ \min_{x^{(1)}, x^{(2)}} y_i \qquad \text{для } \Delta y_i > 0.$$

Сумма σ_1 характеризует относительное ухудшение качества при переходе из точки $x^{(1)}$ в точку $x^{(2)}$, а сумма σ_2 – относительное ухудшение качества при переходе из точки $x^{(2)}$ в $x^{(1)}$. Если $|\sigma_1| \geq \sigma_2$, то, согласно принципу справедливого компромисса, точка $x^{(1)}$ считается более предпочтительной, чем $x^{(2)}$; если же $|\sigma_1| < \sigma_2$, то более предпочтительной считается точка $x^{(2)}$.

На основе принципа справедливого компромисса внешнюю задачу оптимизации можно решать теми методами, алгоритмы которых основаны на сравнении значений целевой функции в двух каких-либо точках. К ним относятся, например, методы покоординатного спуска и поиска по образцу (см.пп.4.I0–4.I3 настоящих Рекомендаций).

Пример I8 настоящих Рекомендаций иллюстрирует применение алгоритма на основе принципа справедливого компромисса.

Примеры расчета

Пример I4. Приведем пример оптимизации на множестве Парето (табл.3I). В приложении 6 даны результаты опытов при всех возможных значениях внешних переменных параметров. С помощью алгоритма, описанного в п.6.3 настоящих Рекомендаций, выделим множество Парето. Оказывается, что оно состоит из I6 точек $x^{(i)}$, приведенных в табл.3I. Небольшое число точек множества Парето позволяет выполнить оптимизацию, проведя полный перебор.

В каждой точке множество Парето в табл.3I указаны значения трех критериев – $C_б$, $C_а$, y. Минимальные значения этих критериев оказываются равными: $C_б$=I,30 руб.; $C_а$=0,57 руб.; y=3,I4 руб. соответственно в точках $x^{(1)}$, $x^{(16)}$, $x^{(11)}$. Нормируем критерии по формуле (58). Применяем все три принципа оптимизации – (59), (60), (62). В соответствии с чебышевским принципом (59) оптимальной оказывается точка $x^{(11)}$=(I0,55,250); $\bar{y}(x^{11})$=I,69. Согласно принципу

Таблица 31. Пример решения многокритериальной задачи оптимизации на множестве Парето

i	Размерные значения параметров			Размерные значения критериев, руб			Нормированные значения критериев			$\bar{y}(x)$ по принципам		
	$x_1^{(1)}(b)$ см	$x_2^{(1)}(h)$ см	$x_3(R_б)$	$C_б$	C_a	y	$\bar{C}_б$	$\bar{C}_a$	$\bar{y}$	(59)	(60)	(62)
I	I2	30	I50	I,3	3,26	4,56	I	5,72	I,45	5,72	8,I7	I
2	I2	30	250	I,44	3	4,44	I,II	5,26	I,4I	5,26	7,78	I,II
3	I2	35	I50	I,5I	2,33	3,84	I,I6	4,09	I,22	4,09	6,47	I,I6
4	I0	40	250	I,6	2,08	3,68	I,23	3,65	I,I7	3,65	6,05	I,I7
5	I0	45	I50	I,62	I,75	3,37	I,25	3,07	I,07	3,07	5,39	I,07
6	I0	45	200	I,73	I,64	3,37	I,33	2,88	I,07	2,88	5,28	I,07
7	I0	45	250	I,8	I,54	3,34	I,38	2,7	I,06	2,7	5,I4	I,06
8	I0	45	300	I,85	I,39	3,24	I,42	2,44	I,03	2,44	4,89	I,03
9	I0	45	400	2	I,33	3,33	I,54	2,33	I,06	2,33	4,93	I,06
I0	I0	60	I50	2,I6	I,04	3,2	I,66	I,82	I,02	I,82	4,5	I,02
II	I0	55	250	2,2	0,94	3,I4	I,69	I,65	I	I,69	4,34	I
I2	I0	60	200	2,3I	0,88	3,I9	I,78	I,54	I,02	I,78	4,34	I,02
I3	I0	65	200	2,5	0,74	3,24	I,92	I,3	I,03	I,92	4,25	I,03
I4	I0	70	I50	2,52	0,72	3,24	I,94	I,26	I,03	I,94	4,23	I,03
I5	I0	80	I50	2,88	0,62	3,5	2,22	I,09	I,II	2,22	4,42	I,09
I6	I0	80	200	3,08	0,57	3,65	2,37	I	I,I6	2,37	4,53	I

интегральной оптимизации (60) оптимальной является точка $x^{(14)}$ = (I0,70,I50); $\bar{y}(x^{(14)})$=4,23. Применяя принцип дифференциальной оптимизации (62), находим три оптимальные точки $x^{(1)}$=(I2,30,I50); $x^{(11)}$= =(I0,55,250); $x^{(16)}$=(I0,80,200), в которых нормированный критерий качества принимает минимально возможное значение $\bar{y}$ =I.

Пример I5. В табл.32 приведен пример решения многокритериальной задачи оптимизации изгибаемого элемента при известных минимальных значениях критериев $C_{б\,min}$=I,30 руб.; $C_{a\,min}$=0,57 руб., y_{min}=3,I4 руб. (см.п.6.5 настоящих Рекомендаций). Использованы алгоритмы методов поиска по образцу и методов теории планирования экспериментов (см.п.4.I2 и разд.3 настоящих Рекомендаций) в сочетании с чебышевским принципом (59).

В каждом опыте нормируем критерии $C_б$, C_a, y ; результатом опыта является максимальный из нормированных критериев. Начальным приближением выбираем точку (20,45,200). На шаге I исследующий

Таблица 32. Пример решения многокритериальной задачи оптимизации при известных минимальных значениях критериев $C_{б\,min}$ = 1,30 руб; $C_{а\,min}$ = 0,57 руб; y_{min} =3,14 руб

К	№ опыта	Размерные значения параметров			Размерные значения критериев, руб			Нормированные значения критериев			$\max(\bar{C}_б, \bar{C}_а, \bar{y})$
		$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	$C_б$	$C_а$	y	$\bar{C}_б$	$\bar{C}_а$	$\bar{y}$	
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I	0	20	45	200	3,47	I,I0	4,57	2,67	I,93	I,46	2,67
	I	22	45	200	3,8I	I,06	4,87	2,93	I,86	I,55	2,93
	2	I8	45	200	3,I2	I,36	4,48	2,40	2,39	I,43	2,40
	3	I8	50	200	3,47	I,06	4,53	2,67	I,86	I,44	2,67
	4	I8	40	200	2,77	I,67	4,44	2,I3	2,93	I,4I	2,93
	5	I8	45	250	3,24	I,I0	4,34	2,49	I,93	I,38	2,49
	6	I8	45	I50	2,98	I,33	4,3I	2,29	2,33	I,37	2,33
	7	I6	45	I50	2,56	I,47	4,03	I,97	2,58	I,28	2,58
	8	I8	45	I50	2,98	I,33	4,3I	2,29	2,33	I,37	2,33
	9	I8	50	I50	3,24	I,06	4,30	2,49	I,86	I,37	2,49
	I0	I8	40	I50	2,59	I,87	4,46	I,99	3,28	I,42	3,28
	II	I8	40	200	2,77	I,67	4,44	2,I3	2,93	I,4I	2,93
2	I2	20	45	I50	3,24	I,27	4,5I	2,49	2,23	I,44	2,49
	I3	I6	45	I50	2,56	I,47	4,03	I,97	2,58	I,28	2,58
	I4	I8	50	I50	3,24	I,06	4,30	2,49	I,86	I,37	2,49
	I5	I8	40	I50	2,59	I,87	4,46	I,99	3,28	I,42	3,28
	I6	I8	45	200	3,I2	I,36	4,48	2,40	2,39	I,43	2,40
3	I7	I6	40	I50	2,30	I,96	4,26	I,77	3,44	I,36	3,44
	I8	20	40	I50	2,88	I,78	4,66	2,22	3,I2	I,48	3,I2
	I9	I6	50	I50	2,92	I,I0	4,02	2,25	I,93	I,28	2,25
	20	20	50	I50	3,60	I,06	4,66	2,77	I,86	I,48	2,77
	2I	I8	45	200	3,I2	I,36	4,48	2,40	2,39	I,43	2,40
4	22	I8	50	I50	3,24	I,06	4,30	2,49	I,86	I,37	2,49
	23	I5	50	I50	2,70	I,27	3,97	2,08	2,23	I,26	2,23
	24	I5	55	I50	3,02	I,06	4,08	2,32	I,86	I,30	2,32
	25	I5	45	I50	2,45	I,5I	3,96	I,88	2,65	I,26	2,65
	26	I5	50	200	2,89	I,06	3,95	2,22	I,86	I,26	2,22
	27	I4	50	250	2,80	I,06	3,86	2,I5	I,86	I,23	2,I5
	28	I5	50	250	3,00	I,06	4,06	2,3I	I,86	I,29	2,3I
	29	I2	50	250	2,40	I,06	3,46	I,85	I,86	I,I0	I,86

Продолжение табл. 32

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
	30	I2	55	250	2,64	0,88	3,52	2,03	I,54	I,I2	2,03
4	3I	I2	45	250	2,I6	I,36	3,52	I,66	2,39	I,I2	2,39
	32	I2	50	300	2,46	I,06	3,52	I,89	I,86	I,I2	I,89
	33	I2	50	200	2,3I	I,I0	3,4I	I,79	I,93	I,09	I,93
	34	I0	50	300	2,05	I,33	3,38	I,58	2,33	I,08	2,33
	35	I2	50	300	2,46	I,06	3,52	I,89	I,86	I,I2	I,89
5	36	I0	55	300	2,26	0,94	3,20	I,74	I,65	I,02	I,74
	37	I0	55	350	2,34	0,94	3,28	I,80	I,65	I,05	I,80
	38	I0	55	350	2,20	0,94	3,I4	I,69	I,65	I,00	I,69

Таблица 33. Пример решения многокритериальной задачи методом пороговой оптимизации. Поиск $min\, y$ при $C_б$ = 4 руб; $C_а \leq 0{,}9$ руб

К	№ опыта	Размерные значения параметров			$C_б$, руб	$C_а$, руб	y, руб
		$x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	x_3 ($R_б$)			
0	I	I4	70	250	3,96	0,72	4,68
	2	I5	70	250	4,2	-	-
	3	I2	70	250	3,36	0,72	4,08
	4	I0	70	250	2,8	0,72	3,52
	5	I0	75	250	3	0,62	3,62
	6	I0	65	250	2,6	0,72	3,32
I	7	I0	60	250	2,4	0,88	3,28
	8	I0	55	250	2,2	0,94	-
	9	I0	60	300	2,46	0,88	3,34
	I0	I0	60	200	2,3I	0,88	3,I9
	II	I0	60	I50	2,I6	I,04	-
	I2	I2	60	200	2,77	0,88	3,65
2	I3	I0	65	200	2,5	0,74	3,24
	I4	I0	55	200	2,I2	I,33	-

поиск типа I (опыты I-6) удачен, а исследующий поиск типа II (опыты 7-II) к успеху не приводит. Неудачен также и исследующий поиск типа I на шаге 2. На шаге 3 применяем алгоритм, основанный на теории планирования экстремальных экспериментов, в котором используется линейный план Бокса-Уилсона для параметров X_I , X_2

и односторонний градиентный план I для параметра x_3; начальным приближением взята точка (I8,45,I50). Движение по антиградиенту к успеху не приводит, однако в опыте I9 матрицы планирования целевая функция уменьшилась. Принимаем точку (I6,50,I50) новым начальным приближением и вновь используем алгоритм метода поиска по образцу. В опыте 38 найдена точка (I0,55,250) с минимальным значением целевой функции.

Пример I6. Приведем пример решения многокритериальной задачи оптимизации прямоугольного железобетонного изгибаемого элемента с применением алгоритма метода покоординатного спуска в сочетании с методом пороговой оптимизации (см.пп.4.I0 и 6.6 настоящих Рекомендаций). Наиболее важным критерием выберем стоимость y . Для критериев C_a и $C_б$ неравенства (63) имеют вид:

$$C_б \leq 4 \text{ руб.}; \qquad C_a \leq 0{,}9 \text{ руб.} \qquad (63')$$

Начальным приближением возьмем точку (I4,70,250).

В табл.33 представлены результаты опытов. В каждом из них проверяли условия (63). Эти условия не выполнялись в опытах 2, 8 , II,I4, для которых значения целевой функции y не приведены. Тогда движение в соответствующем координатном направлении прекращали.

В результате опытов нашли значение целевой функции y (I0, 60, 200)=3,I9 руб. Из прил.6 видно, что это значение действительно является минимальным, если принимать во внимание условия (63').

Пример I7. Приведем пример решения многокритериальной задачи оптимизации изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения с применением алгоритма на основе метода уступок (с м. п.6.7 настоящих Рекомендаций).

Наиболее важным критерием будем считать общую стоимость y , вторым и третьим по значимости - соответственно стоимости арматуры C_a и бетона $C_б$. В табл.I5,I6 провели оптимизацию по y , не принимая во внимание критерии C_a и $C_б$. Использовался план Бокса-Уилсона. В результате нашли глобальный минимум $y_{min} = y$ (I0,55,250)= 3,I4 руб. Назначим уступку Δy =0,86 руб. Тогда неравенство (64) имеет вид

$$y \leq 4 \text{ руб.} \qquad (64')$$

Продолжим оптимизацию, используя различные линейные планы (см. раздел 3 настоящих Рекомендаций) и проверяя в каждом опыте условия (64'). Результаты представлены в табл.34. Начальным приближением выберем точку (I0,55,250), в которой был получен глобаль-

Таблица 34. Пример решения многокритериальной задачи методом уступок. Поиск $min C_a$ при $y \leq 4$ руб

К	$x^{(K,0)}$	Тип процедуры	j	Нормированные параметры			Размерные параметры			y, руб	C_a, руб
				$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1(b)$, см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_\delta)$		
–	–	–	0	0	0	0	I0	55	250	3,I4	0,94
I	I0 55 250	*а*	I	0	–I	–I	I0	50	200	3,39	I,46
			2	0	+I	–I	I0	60	200	3,I9	0,88
			3	0	–I	+I	I0	50	300	3,38	I,33
			4	0	+I	+I	I0	60	300	3,34	0,88
			5	+I	0	0	I2	55	250	3,52	0,88
		б	6	0	+I	0	I0	60	250	3,28	0,88
			7	0	+2	0	I0	65	250	3,32	0,72
			8	+I	+3	0	I2	70	250	4,08	0,72
2	I0 65 250	*а*	I	0	–I	–I	I0	60	200	3,I9	0,88
			2	0	+I	–I	I0	70	200	3,42	0,72
			3	0	–I	+I	I0	60	300	3,34	0,88
			4	0	+I	+I	I0	70	300	3,59	0,72
			5	+I	0	0	I2	65	250	3,8	0,72
		б	6	0	+I	0	I0	70	250	3,52	0,72
			7	0	+2	0	I0	75	250	3,62	0,62
			8	0	+3	0	I0	80	250	3,77	0,57
3	I0 80 250	*а*	I	+I	0	0	I2	80	250	4,4I	(и)0,62
			2	0	–I	0	I0	75	250	3,62	0,62
			3	0	0	–I	I0	80	200	3,65	0,57
			4	0	0	+I	I0	80	300	3,85	0,57
		б	5	0	–I	+I	I0	75	300	3,7	0,62

ный оптимум y . Векторы коэффициентов $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ линейной функции (I4) при К=I,2,3 оказались соответственно равными (I,I4; –0,06; –0,26; –0,03); (0,80; 0; –0,08; 0); (0,57; 0,05; –0,05; 0). Условия (64′) не выполнялись в точках $x^{(1,8)}$, $x^{(1,1)}$. В первом случае прекратили движение по антиградиенту, во втором на целевую функцию был наложен штраф. При К=3 движение по антиградиенту не приводит к успеху. В результате нашли значение C_a = =0,57 руб. в точках $x^{(2,8)}$, $x^{(3,3)}$, $x^{(3,4)}$. Начальным приближением при оптимизации по C_δ выбираем точку $x^{(3,3)}$, так как $y(x^{(3,3)})$=3,65руб < $< y(x^{(2,8)})$=3,77 руб. < $y(x^{(3,4)})$=3,85 руб.

Таблица 35. Пример решения многокритериальной задачи методом уступок. Поиск $min\ C_б$ при $y \leq 4$ руб; $C_а \leq 0{,}9$ руб

К	$x^{(k,j)}$	Тип процедуры	j	Нормированные значения параметров			Размерные значения параметров			y, руб	$C_а$, руб	$C_б$, руб
				$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_б)$, см			
–	–	–	0	0	0	0	I0	80	200	3,65	0,57	3,08
I		*а*	I	+I	0	0	I2	80	200	4,27	0,57	(ш)3,2
			2	0	–I	0	I0	75	200	3,5I	0,62	2,89
			3	0	0	–I	I0	80	I50	3,5	0,62	2,88
	I0		4	0	0	+I	I0	80	250	3,77	0,57	3,20
	80	*б*	5	0	–I	–I	I0	75	I50	3,42	0,72	2,70
	200		6	0	–2	–I	I0	70	I50	3,24	0,72	2,52
			7	0	–3	–I	I0	65	I50	3,22	0,88	2,34
			8	0	–4	–I	I0	60	I50	3,20	I,04	–
2		*а*	I	+I	0	0	I2	65	I50	3,65	0,88	2,77
	I0		2	0	–I	0	I0	60	I50	3,20	I,04	(ш)2,77
	65		3	0	+I	0	I0	70	I50	3,24	0,72	2,52
	I50		4	0	0	+I	I0	65	200	3,24	0,74	2,50
		б	5	0	+I	0	I0	70	I50	3,24	0,72	2,52

Назначим уступку $\Delta C_а$=0,33 руб. В табл.35 представлены результаты решения внешней задачи оптимизации по $C_б$ при дополнительных условиях $y \leq 4$ руб.; $C_а \leq 0{,}9$ руб. Использованы различные линейные планы. Векторы коэффициентов $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ линейной функции (I4) при К=I,2 оказались соответственно равными (3,08; 0,I2; 0,I9; 0,32) и (2,34; 0,43 –0,25; 0,I6). Условия $y \leq$ $\leq$4 руб., $C_б \leq 0{,}9$ руб. нарушались в точках $x^{(1,1)}$ и $x^{(2,2)}$, где на целевую функцию был наложен штраф, и в точке $x^{(1,8)}$, где было прекращено движение по антиградиенту.

В результате опытов нашли точку $x^{(1,7)}$=(I0,65,I50), в которой $C_б$=2,34 руб. при y =3,22 руб. и $C_а$=0,88 руб. Точку действительного минимума (I0,60,200) легко найти из таблиц прил.Б. В этой точке $C_б$=2,3I руб. при y =3,I9 руб.; $C_а$=0,88 руб. В обеих точках значения целевых функций близки.

Пример I8. Приведем пример решения внешней задачи оптимизации

прямоугольного изгибаемого железобетонного элемента на основе принципа справедливого компромисса алгоритмом метода поиска по образцу (см.пп.4.12 и 6.8 настоящих Рекомендаций). В табл.36 даны условия и результаты первых 18 опытов.

Начальным приближением выбрана точка (20,45,200) - опыт 1. В опыте 2 точку (22,45,200) сравниваем на основе принципа справедливого компромисса с точкой (20,45,200). В табл.36 точка сравнения (20,45,200) указана номером опыта, в котором в этой точке определялись критерии $C_б$, $C_а$, y (опыт 1). Определяем разности: $\Delta C_б = 3{,}47 - 3{,}81 = -0{,}34$; $\Delta C_а = 1{,}10 - 1{,}06 = 0{,}04$; $\Delta y = 4{,}57 - 4{,}87 = -0{,}30$. Затем находим:

$$\Delta C_б / C_{б\,min} = -0{,}34/3{,}47 = -0{,}098;$$

$$\Delta C_а / C_{а\,min} = 0{,}04/1{,}06 = 0{,}038;$$

$$\Delta y / \Delta y_{min} = -0{,}30/4{,}57 = -0{,}066.$$

Записываем полученные значения в табл.36. По формулам (64): $б_1 = -0{,}098 - 0{,}066 = -0{,}164$; $б_2 = 0{,}038$. Так как $|б_1| = 0{,}164 > б_2 = 0{,}038$, предпочтение отдаем точке в опыте 1. Записываем это в последней графе табл.36. Точку в опыте 3 сравниваем с точкой в опыте 1 и т.д.

При К=1 опыты 1-6 и 8-12 представляют соответственно исследующие поиски типов I и II; опыт 7 - поиск по образцу. Последняя строка при К=1 представляет сравнение наилучшей точки, полученной в исследующем поиске типа II, с наилучшей точкой в исследующем поиске типа I.

На шестом шаге алгоритм нашел наиболее предпочтительную точку (10,80,150).

7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ НОМЕНКЛАТУР ТИПОВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Основные положения

7.1. При проектировании серий типовых железобетонных конструкций либо номенклатур конструкций для района, объекта рекомендуется использовать методы оптимального проектирования с учетом унификации. В качестве критериев оптимальности номенклатуры следует принимать средневзвешенные показатели, определяемые по формуле

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i C_i ,$$

где C_i - соответствующий показатель i-ого изделия (стоимость, расход арматуры, цемента или др.); t_i - относительная потреб-

Таблица 36. Пример решения многокритериальной задачи оптимизации на основе принципа справедливого компромисса

К	№ опыта	Точка сравнения (№ опыта)	Размерные параметры			Размерные критерии, руб			Относительные критерии			δ_1	δ_2	Точка предпочтения (№ опыта)
			$x_1(b)$, см	$x_2(h)$, см	$x_3(R_\delta)$	C_δ	C_a	y	$\frac{\Delta C_\delta}{C_{\delta\,min}}$	$\frac{\Delta C_a}{C_{a\,min}}$	$\frac{\Delta y}{y_{min}}$			
I	I	–	20	45	200	3,47	I,I0	4,57	–	–	–	–	–	–
	2	I	22	45	200	3,8I	I,06	4,87	-0,098	0,038	-0,066	-0,I64	0,038	I
	3	I	I8	45	200	3,I2	I,36	4,48	0,II2	-0,236	0,02	-0,236	0,I32	I
	4	I	20	50	200	3,85	I,06	4,9I	-0,II	0,038	-0,074	-0,I84	0,038	I
	5	I	20	40	200	3,08	I,36	4,44	0,I27	-0,236	0,029	-0,236	0,I56	I
	6	I	20	45	250	3,4	I,06	4,46	0,02I	0,038	0,025	0	0,084	6
	7	–	20	45	300	3,69	I,06	4,75	–	–	–	–	–	–
	8	7	22	45	300	4,06	I,06	5,I2	-0,I	0	-0,078	-0,I78	0	7
	9	7	I8	45	300	3,32	I,I	4,42	0,III	-0,038	0,075	-0,038	0,I86	9
	I0	9	I8	50	300	3,69	0,88	4,57	-0,III	0,25	-0,034	-0,I45	0,25	I0
	II	I0	I8	50	350	3,83	0,88	4,7I	-0,038	0	-0,03I	-0,069	0	I0
	I2	I0	I8	50	250	3,6	I,06	4,66	0,025	-0,205	-0,02	-0,225	0,025	I0
	I0	6	I8	50	300	3,69	0,88	4,57	-0,085	0,205	-0,025	-0,II	0,205	I0
2	I3	–	I6	55	350	3,74	0,88	4,62	–	–	–	–	–	–
	I4	I3	I8	55	350	4,2I	0,88	5,09	-0,I26	0	-0,I02	-0,228	0	I3
	I5	I3	I5	55	350	3,57	0,88	4,45	0,048	0	0,038	0	0,086	I5
	I6	I5	I5	60	350	3,83	0,74	4,57	-0,073	0,I89	-0,027	-0,I	0,I89	I6
	I7	I6	I5	60	400	4,0I	0,72	4,73	-0,047	0,028	-0,035	-0,082	0,028	I6
	I8	I6	I5	60	300	3,69	0,74	4,43	0,038	-0,028	0,032	-0,028	0,07	I8
	I8	I0	I5	60	300	3,69	0,74	4,43	0	0,I89	0,032	0	0,22I	I8

ность в i -ых изделиях.

Относительную потребность при известном количестве элементов (например, на здание) следует определять как отношение числа i-ых изделий к общему числу однотипных элементов.

Для серий типовых конструкций, применяемых в масштабе района или страны, относительная потребность должна определяться по кривым распределения потребностей в элементах, построенным на основании статистических данных.

7.2. В сериях типовых железобетонных изделий рекомендуется предусматривать разделение серии по типоразмерам и маркам. В типоразмеры выделяют конструкции, имеющие одинаковые опалубочные размеры. Типоразмеры разделяют на марки, отличающиеся армированием, характеристиками бетона и арматуры.

При проектировании серий определяют диапазон их применения, число типоразмеров и марок элементов, а также градации типоразмеров и марок, т.е. пределы изменения параметров серии для каждого типоразмера и марки.

7.3. При определении оптимального числа типоразмеров и марок элементов рекомендуется учитывать удорожание сортамента при увеличении числа типоразмеров и марок.

Функции удорожания должны строиться по данным анализа заводских условий изготовления конкретных изделий с учетом оборачиваемости и переналадки форм.

При отсутствии более точных данных допускается использовать коэффициенты удорожания конструкций при увеличении числа типоразмеров, приведенные в табл.3*[*].

7.4. Различают однопараметрические и многопараметрические задачи проектирования серий. Однопараметрические - это задачи, в которых каждую марку элемента определяет один главный параметр (например, равномерно распределенная нагрузка для плит покрытий и перекрытий). При этом элемент с большей величиной главного параметра заменяет элемент с меньшей величиной.

В многопараметрических задачах каждую марку определяют сочетания нескольких параметров (например, моменты и нормальные силы в сечениях колонн) и подбор элементов производится по ключу.

---

[*] Таблица составлена на основании данных, приведенных в кн.: "Определение снижения себестоимости от сокращения типоразмеров железобетонных конструкций на стадии проектирования с применением ЭВМ" (М, Гипротис Госстроя СССР, 1965).

Таблица 37

Тип конструкций	Снижение себестоимости (%) при сокращении количества типоразмеров в число раз								
	I,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
Фермы	3,8	6	7,7	9,I	I0	I0,9	II,5	I2	I3
Стеновые панели	I,8	2,9	4,3	5,3	6	6,6	7	7,5	8,2
Плиты покрытия	I,2	2,2	3,I	4	4,6	5,I	5,5	5,9	6,6
Подкрановые балки	I,9	3,2	4,2	5,I	5,7	6,3	6,7	7	7,7
Балки покрытий	2,7	4,4	5,7	6,7	7,5	8,I	8,6	9	9,7
Колонны прямоугольного сечения	2,I	3,5	4,5	5,4	6,I	6,6	7,I	7,4	8,I
Двухветвевые колонны	3,7	6,I	7,8	9,2	I0,2	II,I	II,8	I2,5	I3,5

В этом случае при формировании серии используется матрица замен, характеризующая применимость марок для различных сочетаний параметров серии.

В прил.I настоящих Рекомендаций приведено описание двух программ решения задач оптимального проектирования номенклатур типовых конструкций: *UNIFIKAT* - для решения однопараметрических задач и УНИФ-2 для решения многопараметрических задач.

7.5. Для иллюстрации методов, применяемых при проектировании номенклатур, в пп.7.6-7.8 описаны алгоритмы, рекомендуемые для решения следующих трех задач проектирования.

Задача I состоит в оптимальном проектировании нескольких однотипных изделий, у которых некоторые внешние переменные параметры должны иметь одинаковые значения.

Такая задача возникает, например, при проектировании серии двутавровых стропильных балок для широкого диапазона нагрузок. Высота балок принимается одинаковой. При назначении типоразмеров элементов варьируются остальные параметры двутаврового сечения.

Задача 2 состоит в оптимальном выборе заданного числа изделий из большего числа оптимально запроектированных. При этом считается, что более дорогие изделия могут быть использованы вместо более дешевых, но не наоборот.

Задачу 2 можно поставить, например, так. Для заданного диапа-

зона нагрузок $\{q_{min}, q_{max}\}$ с известной кривой распределения потребностей $p(q)$ запроектированы оптимальные конструкции для n нагрузок, назначенных с шагом $(q_{max} - q_{min})/(n-1)$. Требуется из них выделить $S < n$ марок с обеспечением минимума средневзвешенной стоимости

$$C = \sum_{i=1}^{S} C_i \int_{q_{i-1}}^{q_i} p(q)\, dq \ .$$

Задача 3 состоит в оптимальном выборе числа марок и определении оптимальных значений внешних и внутренних переменных параметров каждой марки.

Задачу 3 можно поставить, например, так. Пусть требуется запроектировать номенклатуру изделий для диапазона нагрузок $\{q_{max}, q_{min}\}$ с заданным распределением потребностей $p(q)$. Требуется найти число S марок, характеристики каждой марки и градацию нагрузок $q_{min} = q_1 < \ldots < q_S = q_{max}$ с обеспечением минимума средневзвешенной стоимости при известной функции удорожания номенклатуры при увеличении числа марок.

Методы решения задач

7.6. Для решения задачи I рекомендуется использовать алгоритмы, изложенные в разд.3-5 настоящих Рекомендаций. Задача формулируется следующим образом.

Пусть требуется запроектировать t однотипных изделий; каждое из них имеет n внешних переменных параметров $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$ $(i = 1, \ldots, t)$. Пусть $v < n$ параметров должны иметь одинаковые значения. Тогда общее число независимых переменных параметров определяется выражением $(n - v)t + v$.

Пример I9 настоящих Рекомендаций иллюстрирует решение задачи I оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий.

7.7. Для решения задачи 2 рекомендуется использовать метод динамического программирования. Задача формализуется следующим образом.

Пусть имеется p оптимально запроектированных изделий с неубывающими стоимостями $y(1), \ldots, y(p)$; частота повторяемости каждого из них равна t_v . Тогда стоимость всех изделий определится выражением

$$y = \sum_{v=1}^{p} t_v\, y(v) \qquad (66)$$

Требуется выбрать $N < p$ изделий, считая, что более дорогие изделия могут заменять более дешевые. При этом минимизируют стоимость

$$y = \sum_{u=1}^{N} y(s_u) \sum_{v=s_{u-1}+1}^{s_u} t_v \ , \qquad (67)$$

где u – номер марки; S_u – номер изделия, на котором кончается u-я марка; $S_{u-1}+1$ – номер изделия, на котором начинается u-я марка;

Таким образом, вместо $S_u - S_{u-1}$ изделий принимают изделие со стоимостью $y(S_u)$.

Задачу минимизации стоимости, определяемой по формуле (67), решают с помощью рекуррентного уравнения Беллмана.

$$f_u(S_u) = \min_{S_{u-1}} \left[y(S_u) \sum_{v=S_{u-1}+1}^{S_u} t_v + f_{u-1}(S_{u-1}) \right] (u=2,\ldots,N), \quad (68)$$

где $f_u(S_u)$ – стоимость u марок при стоимости u-й марки $y(S_u)$. Обозначают S^*_{u-1} то из значений S_{u-1}, при котором достигает минимума правая часть уравнения (68).

Пример 20 настоящих Рекомендаций иллюстрирует решение задачи 2 оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий.

7.8. Для решения задачи 3 рекомендуется использовать методы глобального поиска (см.разд.5 настоящих Рекомендаций). Процедура строится следующим образом. Алгоритм глобального поиска назначает число марок и значения внешних переменных параметров в каждой марке. Затем решается внутренняя задача оптимизации для каждой марки и вычисляется значение целевой функции для всей номенклатуры. После этого выполняется следующий шаг алгоритма и т. д.

Пример 21 настоящих Рекомендаций иллюстрирует решение задачи 3 оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий.

7.9. Постановка задач в приводимых ниже примерах привязана к использованию данных тестового примера (см.прил.5), в котором варианты расчетов выполнены для одной нагрузки. Поэтому в примерах 19–21 задаются ряды размеров элементов, а не нагрузок и л и усилий, как это обычно делается в задачах проектирования номенклатур. Однако принципиально постановка и методы решения задач не меняются.

Примеры расчета

Пример 19. Приведем пример решения задачи 1 оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий (см.п.7.6 настоящих Рекомендаций). Пусть требуется оптимально запроектировать набор изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного поперечного сечения. В набор входят 10 элементов, ширина которых соответственно равна 10,12,...,25 см (см.пп.1.6–1.7 настоящих

Таблица 38. Пример решения задачи I оптимизации номенклатур алгоритмом покоординатного спуска

№ опыта	Размерные параметры										Стоимости элементов, руб										y_1, руб
	x_h, см	x_{10}	x_{12}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{18}	x_{20}	x_{22}	x_{24}	x_{25}	y_{10}	y_{12}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{18}	y_{20}	y_{22}	y_{24}	y_{25}	
0	60	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,28	3,76	4,24	4,34	4,58	5,04	5,54	6	6,48	6,72	5
I	65	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,32	3,8	4,36	4,68	4,9	5,4	5,92	6,44	6,96	7,22	5,3
2	55	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,I4	3,52	3,96	4,24	4,4	4,84	5,28	5,72	6,I6	6,38	4,76
3	50	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,33	3,46	3,86	4,06	4,34	4,66	5,06	5,28	5,9	5,88	4,58
4	45	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,34	3,52	3,88	3,99	3,98	4,34	4,46	5,02	5,42	5,56	4,35
5	40	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	3,68	3,56	3,95	4,05	4,I6	4,24	4,47	4,79	5,II	5,27	4,33
6	35	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	40	300	200	300	350	300	250	200	I50	200	200	3,6I	3,55	3,66	3,82	3,98	4,24	4,44	4,68	4,97	5,I2	4,2I
8	45	300	200	300	350	300	250	200	I50	200	200	3,24	3,59	3,94	3,99	4,05	4,34	4,57	4,83	5,26	5,39	4,32
9	35	300	200	300	350	300	250	200	I50	200	200	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Рекомендаций). Высота всех элементов одинакова. Целевой функцией служит стоимость. Внешними переменными параметрами являются: x_h – высота, общая для всех элементов; $x_{10}, x_{12}, \ldots, x_{25}$ – марка бетона (нижний индекс указывает ширину элемента в см).

В табл.38 приведено решение задачи с помощью алгоритма метода покоординатного спуска (см.пп.4.I0–4.II настоящих Рекомендаций). Начальным приближением выберем точку с координатами $x_h = 60$ см; $x_{10} = x_{12} = \ldots = x_{25} = 250$. Для каждого элемента решаем внутреннюю задачу оптимизации и вычисляем стоимости $y_{10}, y_{12}, \ldots, y_{25}$ (нижний индекс указывает ширину элемента). Стоимость набора элементов определяем по формуле $y = (y_{10} + y_{12} + \ldots + y_{25})/10$.

В опытах 0–6 табл.38 меняем переменный параметр x_h (в опыте 6 внутренняя задача оптимизации для элемента с шириной $b = 10$ см не имеет решения).

Таблица 39. Исходные данные для примера решения задачи 2 оптимизации номенклатур

i	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
b, см	I0	I2	I4	I5	I6	I8	20	22	24	25
h, см	55	50	40	40	35	40	30	35	30	30
$R_б$	250	I50	300	350	350	250	400	350	450	350
y, руб	3,I4	3,36	3,66	3,82	3,94	4,24	4,4I	4,63	4,9I	4,93

Затем при x_h =40 см изменяем параметры x_{10}, x_{12}, ..., x_{25}. Э т и параметры, представляющие собой марки бетона разных элементов, друг с другом не связаны; при фиксированных ширине и высоте находим в каждом элементе марку бетона, соответствующую минимальной стоимости. Эти опыты в табл.38 не приведены; в результате получаем значения внешних переменных параметров, указанные в опыте 7. В опытах 8 и 9 вновь меняем x_h, но значение целевой функции не уменьшается - алгоритм заканчивает работу.

В результате (опыт 7) нашли y =4,2I руб. Это значение близко к глобальному оптимуму y (45,300,350,350,300,250,I50,250,I50,I50, I50)=4,20 руб., найденному в результате полного перебора.

Пример 20. Приведем пример решения задачи 2 оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий (см.п.7.7 настоящих Рекомендаций). В табл.39 даны исходные данные примера: из прил.6 настоящих Рекомендаций при каждой ширине изгибаемого элемента b =I0,I2,...,25 см выписаны высота (h) и марка бетона ($R_б$), при которых стоимость элемента минимальна. Задачу ставим так: из I0 элементов, приведенных в табл.39, выбрать 4 элемента таким образом, чтобы минимизировать целевую функцию y, определяемую по формуле (67). Элемент с большей шириной может менять элемент с меньшей шириной, но не наоборот. Один из выбранных элементов должен иметь максимальную ширину b =25 см. Считаем, что t_i =I(i =I,...,I0). Определяя стоимость по формуле (66), находим y =4I,04 руб.

В табл.40 приведены стоимости f_1 (s_1) при всех возможных значениях s_1. Например, если s_1 =4, то элемент с шириной b =I5 см заменяет элементы с шириной b =I0,I2,I4 см.

Тогда $f_1(4)=3,82.4=15,28$ руб., где 3,82 руб. – стоимость элемента с шириной b =15 см (см.табл.39).

Таблица 40. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Определение $f_1(S_1)$

S_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(S_1)$, руб	3,14	6,72	10,98	15,28	19,7	25,44	30,87	37,04	44,19	49,3

В табл.41 определяем значения $f_2(S_2)$ по формуле (68). Задавая все возможные значения S_2, находим такое значение S_1^*, при котором $f_2(S_2)$ имеет минимальное значение. Например, пусть S_2=4. Тогда, если S_1 =1, то $f_{1\,u}(S_1)$=3,14 руб. (см.табл.40) $y(4)$ = =3,82 руб. (см.табл.39); $\sum_{v=2}^{4} t_v$=3; $f_2(4)$=3,14+3,82.3. Задавая S_1 =2,3 и вычисляя $f_2(S_2)$, находим, что минимальное значение $f_2(S_2)$=14,36 руб. достигается при S_1^*=2.

Аналогично в табл.42 определяем значения $f_3(S_3)$.

Так как один из четырех выбираемых элементов должен иметь ширину b =25 см, то достаточно вычислить:

$f_4(10) = min\{3,14+4,93.9;\ 6,50+4,93.8;\ 10,16+4,93.7;$
$14,14+4,93.6;\ 18,26+4,93.5;\ 22,78+4,93.4;\ 27,36+4,93.3;$
$32,43+4,93.2;\ 38,18+4,93\} = 42,15$ при S_3^*=7.

Тогда по табл.42 находим, что S_2^*=5 (при S_3 =7), а по табл.41, что S_1^*=2 (при S_2^* =5). Таким образом, оптимальный набор состоит из элементов с шириной 12,16,20 и 25 см.

Пример 21. Приведем пример решения задачи 3 оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий. Пусть имеем 10 изгибаемых железобетонных элементов с шириной x_I=10,12,..., 25 см, указанной в п.1.7 настоящих Рекомендаций. Требуется составить номенклатуру, определив оптимальное число элементов в номенклатуре N, а также оптимальные размеры и марку бетона выбранных элементов. Будем рассматривать значения N =1,2,3,4. Считаем, что элемент с большей шириной может менять элемент с меньшей шириной, но не наоборот. Один из выбранных элементов должен иметь максимальную ширину, равную 25 см.

Будем стремиться минимизировать общую стоимость номенклатуры, определяемую по формуле, аналогичной (67)

$$y = \sum_{u=1}^{N} y(s_u) \sum_{v=s_{u-1}+1}^{s_u} t_v + 1,10N, \qquad (69)$$

где элементы с шириной 10,12,...,25 см имеют номера 1,2,...,10.

Таблица 41. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Определение $f_2(S_2)$

S_2	S_1									S_1^*	$f_2(S_2)$, руб
	I	2	3	4	5	6	7	8	9		
2	3,I4 + +3,36	–	–	–	–	–	–	–	–	I	6,5
3	3,I4 + +3,66·2	6,72 + +3,66	–	–	–	–	–	–	–	2	I0,38
4	3,I4 + +3,82·3	6,72 + +3,82·2	I0,98 + +3,82	–	–	–	–	–	–	2	I4,36
5	3,I4 + +3,94·4	6,72 + +3,94·3	I0,98 + +3,94·2	I5,28 + +3,94	–	–	–	–	–	2	I8,54
6	3,I4 + +4,24·5	6,72 + +4,24·4	I0,98 + +4.24·3	I5,28 + +4.24·2	I9,70 + +4.24	–	–	–	–	2	23,68
7	3,I4 + +4,4I·6	6,72 + +4,4I·5	I0,98 + +4,4I·4	I5,28 + +4,4I·3	I9,70 + +4.4I·2	25,44 + +4,4I	–	–	–	4	28,5I
8	3,I4 + +4,63·7	6,72 + +4,63·6	I0,98 + +4,63·5	I5,28 + +4,63·4	I9,70 + +4,63·3	25,44 + +4,63·2	30,87 + +4,63	–	–	5	33,59
9	3,I4 + +4,9I·8	6,72 + +4,9I·7	I0,98 + +4,9I·6	I5,28 + +4,9I·5	I9,70 + +4,9I·4	25,44 + +4,9I·3	30,87 + +4,9I·2	37,04 + +4,9I	–	5	39,34
I0	3,I4 + +4,93·9	6,72 + +4,93·8	I0,98 + +4,93·7	I5,28 + +4,93·6	I9,70 + +4,93·5	25,44 + +4,93·4	30,87 + +4,93·3	37,04 + +4,93·2	44,I9 + +4,93	5	44,35

Таблица 42. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Определение $f_3(S_3)$

S_3	S_2									S_2^*	$f_3(S_3)$ руб.
	I	2	3	4	5	6	7	8	9		
3	3,I4 + +3,66·2	6,50 + +3,66	-	-	-	-	-	-	-	2	I0,I6
4	3,I4 + +3,82·3	6,50 + +3,82·2	I0,38 + +3,82	-	-	-	-	-	-	2	I4,I4
5	3,I4 + +3,94·4	6,50 + +3,94·3	I0,38 + +3,94·2	I4,36 + +3,94	-	-	-	-	-	3	I8,26
6	3,I4 + +4,24·5	6,50 + +4,24·4	I0,38 + +4,24·3	I4,36 + +4,24·2	I8,54 + +4,24	-	-	-	-	5	22,78
7	3,I4 + +4,4I·6	6,50 + +4,4I·5	I0,38 + +4,4I·4	I4,36 + +4,4I·3	I8,54 + +4,4I·2	23,68 + +4,4I	-	-	-	5	27,36
8	3,I4 + +4,63·7	6,50 + +4,63·6	I0,38 + +4,63·5	I4,36 + +4,63·4	I8,54 + +4,63·3	23,68 + +4,63·2	28,5I + +4,63	-	-	5	32,43
9	3,I4 + +4,9I·8	6,50 + +4,9I·7	I0,38 + +4,9I·6	I4,36 + +4,9I·5	I8,54 + +4,9I·4	23,68 + +4,9I·3	28,5I + +4,9I·2	33,59 + +4,9I	-	5	38,I8
I0	3,I4 + +4,93·9	6,50 + +4,93·8	I0,38 + +4,93·7	I4,36 + +4,93·6	I8,54 + +4,93·5	23,68 + +4,93·4	28,5I + +4,93·3	33,59 + +4,93·2	39,34 + +4,93	5	43,I9

Принимаем t_v =I для v =I,...,I0. Второе слагаемое в формуле (69) учитывает повышение стоимости номенклатуры при увеличении числа типоразмеров.

Использовав результаты решения примера 20 настоящих Рекомендаций, найдем, что при N =I,2,3,4 оптимальные значения целевой функции соответственно равны: y_1 =50,4; y_2 =46,55; y_3 = 46,49; y_4 =46,55 руб. Таким образом, оптимальное число типоразмеров N =3. Сюда входят элементы, определяемые следующими наборами внешних переменных параметров: (I2,50,I50); (I6,35,350); (25,30,350). Найденное решение представляет собой глобальный оптимум.

В дальнейшем предполагаем, что мы не знаем оптимальных значений высоты и марки бетона элемента при заданной его ширине, а должны определить их, одновременно определив также оптимальные значения числа элементов N и ширины каждого элемента b .

Для решения задачи применяем алгоритм 2 глобального поиска (см. пп.5.7–5.8 настоящих Рекомендаций), несколько изменив его. Сначала выбираем случайно число элементов в каталоге (табл.43), а затем случайно – сами элементы (табл.44, 45).

Зададим в начальном приближении число элементов N =4; элементы, входящие в каталог, определяются следующими векторами: (I0, 50,300); (I4,50,300); (I8,50,300); (25,50,300).

Используя обозначения, принятые в формулах (67), (69), имеем: S_0=0; S_1 =I; S_2 =3; S_3 =6; S_4 =I0. Стоимости элементов соответственно равны $y(S_1)$=3,38; $y(S_2)$ =3,93; $y(S_3)$=4,57; $y(S_4)$=6,0I руб. Определяя стоимость каталога по формуле (68), получим:

y =3,38+3,93.2+4,57.3+6,0I.4+4,40=53,39 руб.

Определяя случайно число элементов в каталоге N , зададим $6^{(1)}$ =I. Остальные условия проведения опытов сохраняем такими же, как и в примере I3 настоящих Рекомендаций.

В табл.43 при К=I по формуле (55) найдем, что число элементов N =3. Переходим к табл.45. Приняв указанные здесь значения $x_i^{(1,0)}$, задаем случайно по формуле (55) геометрические размеры и марку бетона трех элементов b_1 , h_1 , $R_{б1}$; b_2, h_2, $R_{б2}$; h_3 , $R_{б3}$. Считаем, что b_3 =25 см (элемент с максимальной шириной должен присутствовать в любом наборе). Используя прил.6 настоящих Рекомендаций, находим стоимости $y(S_u)$ всех входящих в набор элементов.

При К=I оказалось, что $b_1 = b_2$ =I6 см, а $h_1 \neq h_2$; $R_{б1} \neq R_{б2}$. Вместо двух элементов с одинаковой шириной принимаем один, более

Таблица 43. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Выбор числа элементов N

К	ξ	σ	N^*	$N=6\xi+N^*$	$y_{руб}$	К	ξ	σ	N^*	$N=6\xi+N^*$	$y_{руб}$
I	-I,I8	I	4	3	52,5	I2	-0,89	0,48	3	3	-
2	0,48	0,9	2	2	50,I9	I3	-0,77	0,48	3	3	49,2
3	-0,I9	0,8I	2	2	49,54	I4	-0,07	I	3	3	49,2
4	I,94	0,73	2	3	52,29	I5	-0,I3	I	3	3	48,49
5	0,04	0,73	2	2	49,45	I6	-I,I7	0,9	3	2	49,24
6	-I,02	0,66	2	I	52,4	I7	-0,I6	0,9	3	3	50,04
7	0,06	0,66	2	2	49,44	I8	-I,22	0,9	3	2	47,7
8	-0,47	0,59	2	2	49,24	I9	-0,9I	0,8I	2	I	5I,6
9	-0,08	0,53	2	2	50,26	20	0,08	0,8I	2	2	48,3
I0	I,29	0,53	2	3	48,5I	2I	I,37	0,8I	2	3	47,5
II	-I,48	0,48	3	2	49,54						

Таблица 44. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Опыты при $N = 2$

К	Параметры	ξ	$\sigma_i^{(к)}$	$\bar{X}_i^{(к,0)}$	$\bar{X}_i^{(к,1)}$	$X_i^{(к,1)}$	$y^н(S_u)_{руб}$	$\bar{x}_{in}^{(к,1)}$	$y(S_u)\cdot t$	$y_{руб}$
2	b_1	I,08	2	-I	I	20		I		
	h_1	0,66	3	-5	-3	40	4,55	-3	4,55·7	50,I9
	$R_{б1}$	0,06	2	-I	-I	300		-I		
	h_2	0,75	3	-6	-4	35	5,38	-4	5,38·3	
	$R_{б2}$	0,74	2	2	3	500		3		
3	b_1	-I,47	I,8	I	-2	I5		-2		
	h_1	-0,59	2,7	-3	-5	30	4,49	-I	4,I4·4	
	$R_{б1}$	-0,I4	I,8	-I	-I	300		-I		49,54
	h_2	-I	2,7	-4	-5	30	5,I3	-5	5,I3·6	
	$R_{б2}$	-0,0I	I,8	3	3	500		3		

дешевый, т.е. фактически при К=I вместо трех имеем только два различных элемента в каталоге. В столбце $\bar{X}_{in}^{(к,1)}$ записываем принятые нормированные значения внешних переменных параметров. Далее определяем стоимость каталога по формуле (69).

В дальнейшем в памяти алгоритма будем хранить полученные в опытах минимальные значения $y(S_u)$ для каждой ширины b_i. Вновь вычисляемые значения $y^н(S_u)$ будем сравнивать с хранящимися в памяти алгоритма для той же ширины. Если $y^н(S_u) < y(S_u)$, то засы-

Таблица 45. Пример решения задачи 2 оптимизации номенклатур. Опыты при $N = 3$.

К	Параметры	ξ	$\sigma_i^{(K)}$	$\bar{X}_i^{(K,0)}$	$\bar{X}_i^{(K,\ell)}$	$X_i^{(K,1)}$	$y^H(S_u)$, руб	$\bar{X}_{in}^{(K,1)}$	$y(S_u)\cdot t$	y, руб
	b_1	0,4	2	-2	-I	I6		-I		
	h_1	-I,3	3	-I	-5	30	4,5I	-5	4,5I.5	
	$R_{б1}$	-0,I5	2	-I	-I	300		-I		
I	b_2	-0,93	2	I	-I	I6		-I		52,50
	h_2	I,7I	3	-I	4	75	5,9I	-5		
	$R_{б2}$	2,29	2	-I	I	400		-I		
	h_3	-I,39	3	-I	-6	25	5,55	-6	5,55.5	
	$R_{б3}$	I,48	2	-I	2	450		2		
	b_1	-0,03	I,8	-I	-I	I6		-I		
	h_1	I,34	2,7	-5	-I	50	4,6I	-5	4,6I.5	
	$R_{б1}$	I,39	I,8	-I	2	450		-I		
	b_2	0,5I	I,8	-I	0	I8		0		
	h_2	0,92	2,7	-5	-3	40	4,42	-3	4,42.I	52,29
4	$R_{б2}$	0,29	I,8	-I	0	350		0		
	h_3	0,44	2,7	-5	-4	35	5,38	-5	5,38.4	
	$R_{б3}$	-0,26	I,8	3	3	500		3		

лаем в память алгоритма $y(S_u) = y^H(S_u)$ и в столбце $\bar{X}_{in}^{(K,1)}$ записываем значения b_i, h_i, $R_{бi}$, соответствующие $y^H(S_u)$. Если же $y^H(S_u) \geq y(S_u)$, то в столбце $\bar{X}_{in}^{(K,1)}$ записываем значения b_i, h_i, $R_{бi}$, соответствующие $y(S_u)$.

При К=I в табл.45 получили y =52,50 руб., что меньше y = =53,39 руб. в начальном приближении. Поэтому при К=2 в табл.43 принимаем N^*=2; σ =0,9. По формуле (55) получаем, что N =2. Переходим к табл.44 и т.д.

В табл.44, 45 приведены результаты первых четырех опытов. Всего провели 2I опыт (табл.43). В результате нашли, что y =47,50 руб. Это значение довольно близко к оптимальному y =46,49 руб.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ОПТИМИЗАЦИИ. ОПТИМИЗАЦИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И УНИФИЦИРОВАННЫХ СЕРИЙ

Основные положения

Кроме методов, изложенных в разд.2-7, для оптимального проектирования рекомендуется использовать изложенные ниже программы и алгоритмы. В настоящем приложении приведены универсальные программы оптимизации и рекомендации по оптимизации железобетонных конструкций определенных классов.

Универсальные программы оптимизации железобетонных конструкций

Универсальные программы оптимизации допускается использовать при оптимальном проектировании любых железобетонных конструкций, подключая их к различным блокам расчета. В универсальных программах оптимизации рекомендуется реализовывать алгоритмы локального и глобального поиска, изложенные в разд.3-5 настоящих Рекомендаций.

Для оптимизации какой-либо конструкции необходимо иметь три основных блока: универсальную программу оптимизации, блок стыковки и блок расчета конструкции или ее оптимизации по части параметров. Взаимодействие блоков показано на рис.2. Блок стыковки содержит: массивы возможных значений внешних переменных параметров; значения внешних переменных параметров в начальном приближении; данные для вычисления целевой функции и для проверки внешних ограничений, не входящих в блок расчета. При необходимости блок стыковки включает подпрограммы перевода нормированных значений внешних переменных параметров в размерные и наоборот. Далее рассматривается случай, когда алгоритм универсальной программы оптимизации требует нормирования внешних переменных параметров.

Блок стыковки пересылает значения внешних переменных параметров в начальном приближении в блок расчета, где решается внутренняя задача оптимизации. Затем значения внутренних переменных параметров пересылаются в блок стыковки, где вычисляется значение целевой функции. В блоке стыковки значения внешних переменных параметров в начальном приближении нормируются и вместе с соответствующим значением целевой функции пересылаются в блок

универсальной программы оптимизации. Здесь на основе принятого алгоритма назначается следующий набор значений внешних переменных параметров, который пересылается в блок стыковки. Производится нормирование параметров и проверка внешних ограничений, не входящих в блок расчета. Если эти ограничения не выполняются, сведения об этом передаются в блок универсальной программы оптимизации, где назначается следующий набор значений внешних переменных параметров. Если ограничения выполняются, размерные внешние переменные параметры передаются в блок расчета для решения внутренней задачи оптимизации. Соответствующие значения внутренних переменных параметров пересылаются в блок стыковки, где вычисляется значение целевой функции, и т.д. Значения внешних и внутренних переменных параметров в каждом опыте, а также соответствующие значения целевой функции выводятся на печать. Проверка условий окончания работы проводится в блоке универсальной программы оптимизации.

Таким образом, при работе различных универсальных программ оптимизации с различными блоками расчета меняется только блок стыковки.

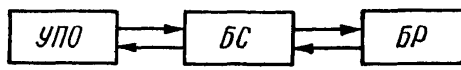


Рис.2. Схема работы универсальных программ оптимизации
УПО – универсальная программа оптимизации; БС – блок стыковки; БР – блок расчета конструкции или е е оптимизации по части параметров

В ЦНИИПИАСС и НИИЖБ для ЭВМ "Минск-22" разработаны три универсальных программы оптимизации, основанные на алгоритмах методов покоординатного спуска, поиска по деформируемому многограннику и случайного поиска с нормальным законом распределения (см. пп.4.10, 4.16, 5.7 настоящих Рекомендаций). В качестве блока расчета использована разработанная в ЦНИПИАСС программа расчета и конструирования изгибаемых железобетонных конструкций "Проба-77". Все три универсальные программы оптимизации совместно с программой "Проба-77" объединены в комплексную программу оптимального проектирования изгибаемых железобетонных конструкций "Проба-оптима".

Программа оптимизации железобетонных стержневых конструкций

В Ленпромстройпроекте разработана программа автоматизирован—

ного расчета и оптимизации железобетонных стержневых конструкций "АВРОРА-ЕС". Программу рекомендуется использовать для оптимизации каркасов зданий в виде плоских рам при действии статических и динамических нагрузок.

На проектируемую конструкцию накладываются следующие основные количественные ограничения: число стержней не более 256; число узлов не более 190. Под стержнем понимается элемент конструкции между точками закрепления. Каждый стержень может иметь до 7 расчетных сечений. Возможен учет бесконечно-жестких вставок и упругой заделки элемента в узел. Колонны прямоугольного сечения, ригели прямоугольного, таврового и двутаврового сечения. Бетон - тяжелый любой марки, класс арматуры не выше А-Ш. В колоннах осуществляется подбор симметричной либо несимметричной арматуры, в ригелях - одиночной либо двойной.

При оптимизации проводится подбор опалубочных размеров сечений и параметров арматурных каркасов колонн и ригелей, отвечающих наиболее рациональному распределению материала (стали и бетона) в конструкции с учетом унификации по опалубочным размерам и типизации по маркам.

Подбор расчетной продольной и поперечной арматуры по предельным состояниям осуществляется на основе главы СНиП П-21-75. Расчетная арматура в железобетонных элементах определяется из условий прочности и допустимой ширины раскрытия трещин, в изгибаемых элементах (ригелях) прогибы определяются с учетом переменной (из-за раскрытия трещин) жесткости по длине элемента.

Определение напряженного состояния элементов конструкции в случае воздействия на нее многих независимых и логически взаимосвязанных загружений производится на основе алгоритма, позволяющего отыскивать невыгоднейшие сочетания усилий независимо о т случая напряженного состояния конструкции. Различные виды нагрузок по характеру воздействия учитываются в сочетаниях согласно указаниям главы СНиП П-6-74 "Нагрузки и воздействия".

Для оптимального проектирования статически неопределимой стержневой конструкции используется "метод шагового перепроектирования". Суть метода заключается в следующем:

задаются начальные значения варьируемых параметров (размеры поперечных сечений элементов);

определяется напряженное состояние элементов конструкции;

по полученному напряженному состоянию для каждой унифицированной группы стержней определяются оптимальные размеры поперечных сечений элементов;

определяются новые жесткости и комплексный расчет повторяется.

Опыт использования программы показал, что оптимум достигается за 3–5 циклов комплексного перерасчета.

Задача оптимизации конструкции при использовании метода шагового перепроектирования сводится на каждом шаге к оптимизации отдельных групп элементов, т.е. к нахождению таких варьируемых параметров, при которых достигает минимума функция С:

$$C = \sum_{K=1}^{N} \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{t_r} \left(b_K h_K C_б + F_{ar} C_a + p C_{ax} \right) l_{ir} , \qquad (70)$$

где N – число групп; b_K, h_K – соответственно ширина и высота поперечного сечения для К-ой группы; F_{ar} – продольное армирование r -ой подгруппы; p – расход поперечной и монтажной арматуры; $C_б$, C_a, C_{ax} – стоимость бетона, продольной и поперечной арматуры.

При этом должны выполняться ограничения по прочности, жесткости и трещиностойкости, а также ограничения вида (4) для переменных параметров b и h .

Продольное армирование F_{ar} в элементах r -ой подгруппы определяется из условия

$$F_{ar} = \max F_{aij} ,$$

где F_{aij} – продольное армирование в i -ом элементе при действии j -ого сочетания усилий.

Целевая функция при оптимизации имеет вид

$$C_{эф} = n \left(C_i - C_{i+1} \right) - C_м t_м ,$$

где $C_{эф}$ – эффект в денежном выражении, получаемый от оптимизации конструкции; $(C_i - C_{i+1})$ – снижение сметной стоимости конструкции за очередной итерационный цикл; n – коэффициент повторяемости расчетной схемы в проектируемом объекте; $C_м$ – стоимость машинного часа; $t_м$ – затраты машинного времени на I полный цикл перерасчета.

Оптимизация продолжается до тех пор, пока $C_{эф} > 0$.

Программная система разработана для ЕС ЭВМ с объемом оперативной памяти 256 К. Язык программирования – PL/I.

Результатом работы является информация о конструкции, представленная в виде таблиц и текстов, выдаваемых на алфавитно-цифровом печатающем устройстве. Время подготовки исходной инфор-

мации не превышает 2-4 ч. Время счета зависит от сложности рассчитываемой конструкции, числа загружений, состава задач и может колебаться от 15 мин до 3-4 ч.

Программа оптимизации ребристых сборных железобетонных плит

В Киевском НИИСКе разработана программа "ОРТІМИМ" расчета и оптимального проектирования плит. Программу рекомендуется использовать для оптимизации плит из тяжелого и легкого бетонов с преднапряженными продольными ребрами и ненапряженными поперечными, имеющими регулярный шаг. Учитывается действие равномерно распределенной нагрузки. Поверочный расчет может выполняться д л я преднапряженных и ненапряженных ребер. Конструкция плиты показана на рис.3.

Принимается, что элементы ребристой железобетонной плиты армируются следующим образом:

полка - сеткой с постоянными сечениями арматуры по длине и ширине;

продольные ребра - напрягаемой арматурой постоянного по длине сечения в нижней и, если требуется, в верхней зоне; каркасом с постоянной по длине верхней и нижней конструктивной продольной арматурой и поперечными стержнями одного диаметра (участки каркаса в средней половине и крайних четвертях имеют разный шаг поперечных стержней); ненапрягаемыми коротышами в верхней и нижней зонах (если требуется по расчету); U -образными сетками в опорной зоне;

поперечные ребра - каркасом с верхней продольной конструктивной арматурой и нижней рабочей (поперечные стержни могут иметь разный шаг в средней половине и крайних четвертях по длине ребра).

Ребристая плита является пространственной конструкцией, в которой поле плиты воспринимает сжатие с изгибом в двух направлениях, поперечные ребра работают на изгиб, а продольные - на изгиб с кручением.

В основу программы "ОРТІМИМ" положены следующие расчетные предпосылки.

I. Продольные ребра рассматриваются как балки таврового сечения. Ширина полки, вводимая в расчет ребер, определяется с учетом коэффициента полноты эпюры напряжений, принимаемого равным 0,65-I в зависимости от ширины плиты, шага ребер и нагрузки.

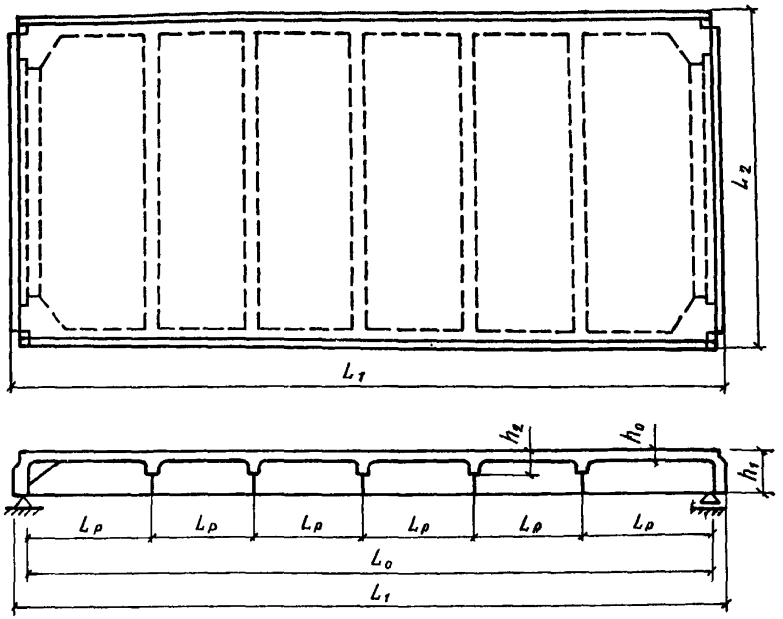


Рис.3. Конструкция сборной железобетонной ребристой плиты

Расчет наклонных сечений в опорной зоне продольных ребер по прочности, трещиностойкости и раскрытию трещин ведется с учетом действия крутящего момента. Крутящий момент, вводимый в расчет опорного сечения по образованию трещин, вычисляется в предположении упругой работы продольного ребра и упруго-пластической работы поперечных ребер; при расчете по прочности и ширине раскрытия трещин учитывается уменьшение крутящего момента за счет образования трещин в опорной зоне ребер.

2. Поперечные ребра рассматриваются как балки таврового сечения, нагрузка на которые собирается с грузовой площади, ограни-

ченной линиями излома полки.

3. Полка рассчитывается методом предельного равновесия как плита, защемленная в продольных и поперечных ребрах при отношении ширины плиты к шагу поперечных ребер $l_2 / l_p < 3$, либо как балочная неразрезная плита при $l_2 / l_p \geq 3$. При расчете полки учитывается возможность исчерпания ее прочности при совместном действии изгибающих моментов и нормальной силы, а также потери устойчивости полки.

Примечание. Расчет прогиба полки относительно ребер выполняется исходя из экспериментальных данных о том, что при нормативной нагрузке полка работает без трещин.

В качестве критерия оптимальности приняты приведенные затраты. Формулы для вычисления приведенных затрат для плит пролетом 6-12 м получены на основе анализа стоимости значительного количества вариантов конструкций плит, запроектированных под различные нагрузки. Зависимости для вычисления стоимостных показателей представлены полиномом в функции от марки и объема бетона, класса арматуры, расхода арматуры, приведенной толщины бетона. Аппроксимация проведена методом наименьших квадратов.

В зависимости от индикатора, задаваемого в исходных данных, критерием оптимальности может приниматься оптовая цена, расход арматуры, бетона.

При решении задачи прямого проектирования заданными являются размеры плиты в плане, конструктивно минимальная ширина ребер понизу, конструктивная арматура каркасов. Высота ребер, рабочая продольная и поперечная арматура ребер и полки, величина предварительного напряжения арматуры плиты, число поперечных ребер являются переменными параметрами.

При оптимизации плит учитываются следующие ограничения.

I. Для продольных ребер:

прочность нормальных сечений в стадии эксплуатации на действие изгибающего момента;

прочность наклонных сечений на действие перерезывающих сил и крутящих моментов;

прочность в стадии предварительного напряжения на внецентренное сжатие при действии усилия обжатия N_0, определенного с учетом первых потерь предварительного напряжения;

ограничение напряжений в краевых волокнах бетона в стадии предварительного обжатия;

трещиностойкость (для элементов I категории трещиностойкости); ограничение ширины раскрытия нормальных трещин в стадии предварительного обжатия и в стадии эксплуатации;

ограничение ширины раскрытия наклонных трещин;

жесткость.

2. Для поперечных ребер:

прочность нормальных и наклонных сечений;

ограничение ширины раскрытия трещин нормальных и наклонных сечений;

жесткость.

3. Для полки:

прочность при изгибе;

соблюдение условия, при котором прочность средних полей плиты, работающих на сжатие с изгибом, должна быть не ниже прочности крайних полей, работающих на изгиб;

устойчивость полки (условие устойчивости принимается исходя из того, что критические напряжения должны превышать напряжение в полке, соответствующее моменту исчерпания несущей способности продольных ребер);

жесткость.

Ограничения по прочности, жесткости, трещиностойкости и ограничения ширины раскрытия трещин выражаются в соответствии с главой СНиП П-21-75.

Кроме указанных ограничений, при решении задачи оптимизации учитываются также конструктивные и технологические требования.

Алгоритм решения задачи оптимизации состоит из следующих основных операций.

Назначается конструктивно минимальная толщина полки плиты, и исходя из условий жесткости полки, определяется минимальное число поперечных ребер. После получения шага поперечных ребер решаются локальные задачи оптимизации их сечения и армирования полки, а также проводится оптимизация сечения продольных ребер. Затем вычисляется значение целевой функции на данном цикле расчета.

Аналогичные циклы расчета повторяются с увеличением числа поперечных ребер и толщины полки до тех пор, пока изменение этих параметров перестанет влиять на сечение продольных ребер и минимальное значение числа ребер при фиксированной толщине полки

будет соответствовать минимуму стоимости.

Оптимальным является вариант, отвечающий минимальному значению целевой функции.

Если опалубочные размеры плиты заданы, то решается задача минимизации расхода арматуры. При частично заданных опалубочных размерах подбираются недостающие параметры. При этом принципиальная схема расчета не меняется. Например, если задан шаг поперечных ребер и толщина полки, выполняется один цикл решения локальных задач.

Программа составлена на алгоритмическом языке фортран и реализована на ЭВМ Минск-32 и ЕС ЭВМ.

Время счета по программе:

для задач оптимизации армирования при заданных размерах 20-50 с (Минск-32) и 5-20 с (ЕС-1030) на одну плиту; для задач оптимизации размеров и армирования 1-30 мин (Минск-32), 0,3-15 мин (ЕС-1030) в зависимости от размеров плиты и количества варьируемых параметров.

Программа оптимального армирования круглых плит и кольцевых фундаментов

В Челябинском политехническом институте разработана программа АРПОС-2, предназначенная для подбора оптимальной арматуры из условий прочности и допустимой ширины трещин в круглых и кольцевых железобетонных плитах переменной по радиусу толщины, нагруженных вертикальной осесимметричной нагрузкой и опирающихся на упругое основание или упругие концентрические опоры. При заданном армировании программа выполняет поверочный расчет по первому и второму предельным состояниям. Программу рекомендуется использовать для расчета оптимального армирования фундаментов дымовых труб, доменных печей, водонапорных башен, резервуаров, фундаментов под колонны и опоры, а также круглых и кольцевых плит перекрытий.

В качестве моделей грунтового основания приняты однородный упругий слой постоянной толщины, винклерова модель основания с переменным по радиусу коэффициентом постели и их комбинация.

Вводятся следующие предпосылки:

1. Справедливы геометрические и статические уравнения изгиба тонких пластин с малыми прогибами.

2. Связи между плитой и основанием (упругими опорами) верти-

кальные, двухсторонние.

3. Нормальные силы в срединной плоскости отсутствуют.

4. Арматура радиально-кольцевая, проценты армирования могут меняться только по радиусу.

Приняты физические уравнения теории деформирования железобетона с трещинами Н.И.Карпенко, устанавливающие связь между изгибающими моментами и кривизнами. Учитываются неупругие деформации бетона, образование и раскрытие трещин, а также другие специфические особенности, свойственные железобетону.

Решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния плиты при заданном армировании осуществляется вариационно-разностным методом.

При расчетах плит с кольцевыми ребрами горизонтальные силы и моменты в местах сопряжений находятся из условий совместности деформаций. Для ребер используются уравнения линейно-деформируемого кольцевого бруса.

Ширина раскрытия трещин вычисляется согласно "Руководству по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона (без предварительного напряжения)" (М., 1977).

Несущая способность плиты считается исчерпанной, когда радиальные и кольцевые линии изломов (пластические шарниры) смыкаются, образуя замкнутые области.

Подбор оптимальных сечений арматуры осуществляется путем последовательного увеличения процентов армирования в узлах разностной сетки и проверки выполнения ограничений по ширине раскрытия трещин и несущей способности. В начальном приближении принимается, что арматура во всех узлах отсутствует.

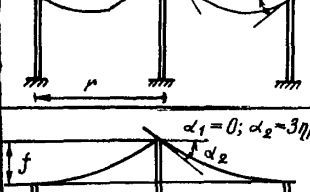
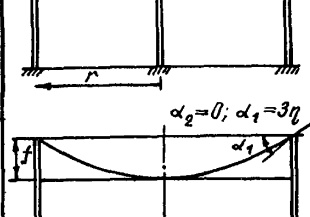
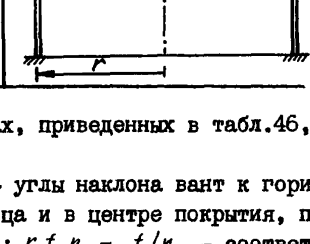
Программа составлена для ЕС ЭВМ, начиная с ЕС-1020 и более мощных. Язык программирования - фортран IУ. Объем внутренней памяти, требуемой для размещения программы составляет 58К; объем внешней памяти на магнитных дисках 120К. Объем исходной информации составляет 25-40 перфокарт. Время работы ЭВМ ЕС-1022 или ЕС-1030 составляет 5-20 мин. В программе имеется система диагностических сообщений, указывающих на ошибки в исходных данных.

Выбор оптимальных параметров железобетонных висячих оболочек и куполов

При проектировании железобетонных висячих оболочек кругового очертания в плане с радиальным расположением вант относительную

величину разности отметок точек закрепления вант рекомендуется принимать в пределах $0{,}7\eta_{опт} \leq \eta \leq 1{,}3\eta_{опт}$, где $\eta_{опт}$ для различных типов оболочек вычисляется по формулам, приведенным в табл.46.

Таблица 46

Тип оболочки	Схема оболочки	Формулы для вычисления $\eta_{опт}$ по критерию минимума приведенных затрат на здание (с учетом расходов на эксплуатацию)
Шатровая с равными уклонами вант в центре и на контуре		$\eta_{опт} = \left\{\left(E - \left[E^2 - 4(1+A)C\right]^{\frac{1}{2}}\right)/2C\right\}^{\frac{1}{2}}$ $E = 15{,}6 + 9A + D_3$; $C = 20A + 9D_3 - 9{,}4$ $D_3 = \frac{5R_B}{qC_B}\left(\frac{C_c}{r} + \frac{C_v T_H}{4}\right)$
Шатровая с уклоном вант на контуре, равном нулю		$\eta_{опт} = \left[(1+A)/(4+2{,}2A+D_1)\right]^{\frac{1}{2}}$ $D_1 = 0{,}3\,C_v\,T_H\,R_B/q\,C_B$
Вогнутая		$\eta_{опт} = \left[(1+A)/(14{,}4+9A+D_2)\right]^{\frac{1}{2}}$ $D_2 = \frac{6R_B}{qC_B}\left(\frac{C_c}{r} + \frac{C_v T_H}{5}\right)$

В формулах, приведенных в табл.46, приняты следующие условные обозначения:

α_1, α_2 – углы наклона вант к горизонту соответственно у контурного кольца и в центре покрытия, положительные при уклоне кровли от центра; $r, f, \eta = f/r$ – соответственно радиус оси контурного кольца, абсолютная и относительная разность отметок точек пересечения вант с осью покрытия и осью контура; $R_в$, $R_{пр}$ – соответственно расчетное сопротивление материала вант и призменная прочность бетона опорного контура; $C_c, C_в, C_к$ – соответственно смет-

ная стоимость I м^2 стен, I м^3 вант, I м^3 опорного контура; q – нагрузка равномерно распределенная на I м^2 плана; C_γ – стоимость эксплуатации I м^3 объема сооружения в год; $T_н$ – нормативный срок окупаемости капитальных вложений;

$$A = C_к R_в / C_в R_{пр}$$

Для получения $\eta_{опт}$ по критерию сметной стоимости здания следует в формулах, приведенных в табл.46, положить равной нулю стоимость эксплуатации здания $C_\gamma = 0$. Для получения $\eta_{опт}$ по критерию сметной стоимости покрытия следует в формулах положить равной нулю C_γ и стоимость стен $C_с$.

Оптимальные по расходу стали геометрические размеры и армирование гладких железобетонных куполов (рис.4) рекомендуется выбирать в соответствии с данными ниже указаниями.

При этом предполагаются выполненными следующие условия:

I) осесимметричная нагрузка интенсивностью q равномерно распределена по горизонтальной проекции купола;

2) несущая способность купола определяется методом предельного равновесия; схема разрушения принимается в виде системы сквозных меридиональных трещин, начинающихся у растянутого контура и соединенных по концам раскрывающимся вниз кольцевым пластическим шарниром;

3) исчерпание несущей способности купола происходит вследствие текучести арматуры, что обеспечивается соблюдением общих положений "Руководства по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций" (М., 1975) и условия

$$\xi = x / h_0 \leq 0{,}6\ \xi_R \qquad (71)$$

где ξ – высота сжатой зоны бетона в кольцевом пластическом шарнире; ξ_R – граничное значение относительной высоты сжатой зоны бетона, определяемое по формуле (30) главы СНиП II-21-75;

4) толщина оболочки выбрана в соответствии с указаниями "Руководства по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий" (М., 1979). Потеря устойчивости до наступления текучести растянутой арматуры исключается соответствующим подбором марки бетона и толщины оболочки по требованиям указанного выше Руководства;

5) отношение диаметра контура к стреле подъема удовлетворяет неравенствам

$$2 \leq 2r_0 / f \leq 10 \qquad (72)$$



Рис.4. Схема гладкого железобетонного купола.

где r_0 – радиус опорного кольца; f – стрела подъема;

6) поле купола имеет двойное армирование сетками, состоящими из кольцевых и меридиональных стержней, расположенных с постоянным шагом;

7) опорное кольцо купола армировано кольцевыми стержнями и опирается по всему периметру (если опорное кольцо опирается в отдельных точках, то в нем должна быть уложена дополнительная арматура, необходимая для восприятия вертикальных составляющих усилий на контуре).

После определения оптимальных параметров купола проверку трещиностойкости и деформативности следует производить согласно указаниям главы СНиП П-21-75, а также "Руководства по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций" и "Руководства по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий". Если эти условия не выполняются, рекомендуется применять преднапряжение контурной арматуры.

Форму очертания поверхности купола рекомендуется выбирать в виде поверхности давления, имеющей вид параболоида вращения третьей степени (меридиан – кубическая парабола).

Куполу, очерченному по поверхности давления, следует придавать максимальную подъемистость с учетом формулы (72).

Оптимальным является конструктивное армирование купола. При этом требуемую площадь сечения арматуры опорного кольца для параболоидов вращения третьей степени рекомендуется определять по формуле

$$F_{a0} = \frac{1}{R_a} \frac{n}{K} \left(\frac{q r_0^3}{n f} - \psi_0 \right). \qquad (73)$$

Здесь R_a – расчетное сопротивление арматуры; n – предельное усилие в кольцевых шарнирах поля оболочки на единицу длины меридиана,

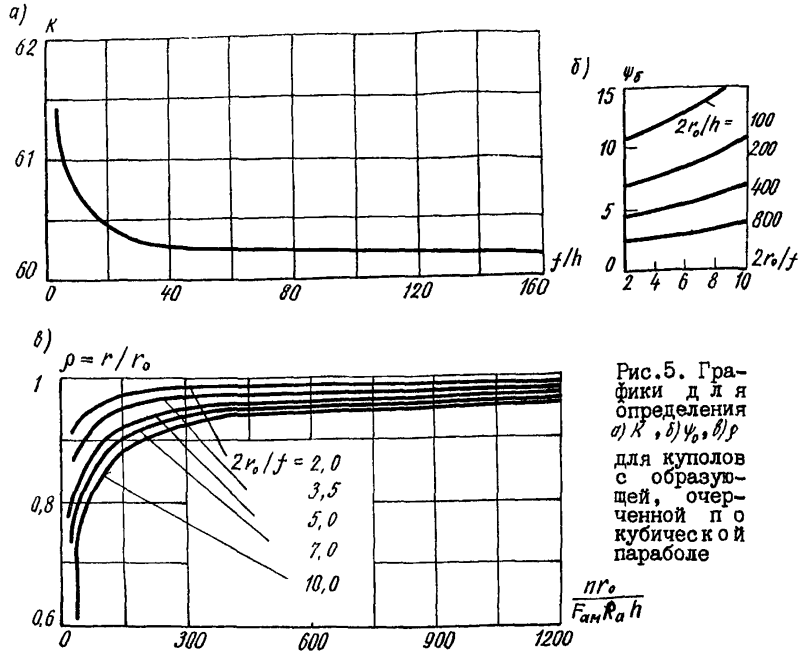


Рис.5. Графики для определения *а)* K, *б)* ψ_0, *в)* ρ для куполов с образующей, очерченной по кубической параболе

определяемое по формуле

$$n = \left(F_{ak} + F'_{ok} \right) R_a \qquad (74)$$

(где F_{ak} и F'_{ak} – площадь сечения кольцевой конструктивной арматуры соответственно нижней и верхней сеток на единицу длины меридиана); K – безразмерный коэффициент эффективности армирования опорного кольца, зависящий в общем случае от отношений $2r_0/f$, f/h и $F_{am}R_a/n$ (F_{am} – площадь сечения меридиональной конструктивной арматуры нижней сетки на единицу длины в кольцевом направлении); ψ_0 – безразмерная величина, характеризующая несущую способность при отсутствии армирования опорного кольца.

Графики для определения K и ψ_0 представлены на рис.5.

При проверке выполнения условия (71) требуемую для определения γ величину нормальной силы N находят по формуле

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + g\frac{f^2}{r_0^2}\rho^4}} \left(\frac{3}{2} q f \rho^2 + \frac{nl}{r} + \frac{F_{a0} R_a}{r} \right), \qquad (75)$$

где r – радиус кольцевого пластического шарнира, определяемый по формуле $r = \rho r_0$; (76)

l – длина меридиана от опоры до пластического шарнира, определяемая приближенно по формуле

$$l = r_0 (1 - \rho) \sqrt{1 + (f / r_0)^2} . \quad (77)$$

Графики для определения ρ представлены на рис.5.

Для значений

$$3{,}5 \leq 2 r_0 / f \leq 10 ; \quad 2 r_0 / h \leq 800 \quad (78)$$

из распространенных на практике очертаний меридиана к параболоиду вращения третьей степени наиболее близок сферический купол, который рекомендуется применять на практике. Геометрические размеры и армирование сферического купола при выполнении условия (78) назначаются в соответствии с указаниями прил.I настоящих Рекомендаций.

Требуемая площадь сечения арматуры опорного кольца для сферических куполов определяется согласно указаниям "Руководства по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий".

Оптимальные геометрические размеры и армирование конических куполов, а также куполов, поверхность которых образована вращением квадратной параболы, цепной линии и гиперболы, рекомендуется назначать в соответствии с указаниями прил.I настоящих Рекомендаций. Требуемую площадь сечения арматуры опорного кольца в таких куполах рекомендуется определять согласно указаниям "Руководства по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий".

Программа решения однопараметрических задач оптимального проектирования номенклатур типовых конструкций

В Киевском НИИСКе разработана программа „UNIFIKAT" решения однопараметрических задач оптимального проектирования номенклатур. Программу рекомендуется применять для определения градаций типоразмеров и марок конструкций в тех случаях, когда марку определяет один главный параметр сортамента (например, для плит покрытий и перекрытий зданий равномерно распределенная нагрузка), а также определения оптимального числа типоразмеров и марок.

Задача проектирования сортамента состоит в назначении для заданного диапазона нагрузок $\{q_{min}, q_{max}\}$ такой градации типораз-

меров и марок, которая обеспечивает минимальную средневзвешенную стоимость сортамента с учетом распределения потребностей в нагрузках.

Нагрузки, для которых требуется запроектировать серию, могут быть заданы в виде ряда $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ с фиксированным шагом, например, $q_{i+1} - q_i$ =500 Н/м^2 для плит покрытий. Требуется выделить нагрузки, ограничивающие типоразмеры и марки элементов, а также определить параметры опалубочных размеров для каждого типоразмера и армирование каждой марки.

Для решения задач по программе „UNIFIKAT" задаются матрица стоимости С и вектор потребности Т в элементах. Чтобы построить матрицу стоимости, требуется для каждой из нагрузок с использованием алгоритмов, изложенных в разд.3-5 настоящих Рекомендаций, решить задачу оптимального проектирования конструкций. В результате решения задач оптимизации будет найдено M_1 вариантов опалубочных форм. Путем объединения элементов с одинаковыми размерами, а также введения некоторых промежуточных значений на основе анализа полученных результатов выбирается ряд M_2 вариантов форм. В общем случае числа M_1 и M_2 могут не совпадать.

Если параметры опалубочных размеров изменяются в малых пределах и число этих параметров мало (1-2), то варианты опалубочных размеров могут задаваться без решения задачи оптимизации.

Если задан не дискретный ряд нагрузок $q_1, q_2, \ldots, q_{N+1}$, а диапазон сортамента $\{q_{min}, q_{max}\}$, то этот диапазон необходимо разделить на M_1-1 частей с равным шагом. При этом число M_1 должно быть назначено достаточно большим, соответствующим требуемой точности назначения градаций нагрузок.

В каждой j -ой опалубочной форме, решая внутреннюю задачу оптимизации, следует запроектировать конструкцию для каждой нагрузки и получить значения целевой функции c_{ji}, составляющие матрицу стоимости.

Компонентами вектора потребностей при проектировании номенклатуры конструкций на здание следует назначить количество изделий, требуемых для каждой нагрузки.

Для серий типовых конструкций вектор потребностей определяется на основании кривых распределения потребностей, полученных по статистическим данным $r_i = \int_{q-1}^{q_i} p(q)\, dq$.

Программа „UNIFIKAT" предназначена для решения следующих за-

дач.

Задача А. Даны: матрица $C\{M_2 \times M_1\}$ стоимости (или других показателей качества) M_1 элементов неунифицированных изделий, которые могут изготавливаться в M_2 вариантах опалубочных форм, вектор $T\{M_1\}$ потребности в каждом из M_1 элементов и требуемое число типоразмеров N_T. Требуется определить границы применения и номера типов опалубки для каждого из N_T типоразмеров, исходя из минимума средневзвешенной стоимости сортамента C_{N_T}:

$$C_{N_T} = \sum_{j=1}^{N_T} \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} c_{ji} T_i \to min ,$$

где C_{ji} – элемент j-ой строки i-ого столбца матрицы стоимости C; T_i – i-ый элемент вектора T; i_j – номер элемента, на котором заканчивается j-ый типоразмер ($i_0 = 0$).

Задача Б. Кроме данных, приведенных в задаче А, даны также количества марок S_j, которые должны быть в каждом из N_T типоразмеров. Требуется определить градацию типоразмеров и марок, а также номера типов опалубки, соответствующих типоразмерам. В этом случае стоимость сортамента определяется формулой

$$C_{N_T} = \sum_{j=1}^{N_T} \sum_{K=1}^{S_j} c_{jK} \sum_{i=i_{K-1}+1}^{i_K} T_i \to min .$$

Задача В. Дано общее число типоразмеров N_T и марок S, а также зависимость числа марок S_j в типоразмере j от пределов применения типоразмера. Чем больше потребность в элементах данного типоразмера, тем больше число марок, на которые он разделяется. Это может выражаться зависимостью

$$S_j = Ц\left[S \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} T_i \Big/ \sum_{i=1}^{M_1} T_i + 0{,}5 \right] \geq 1; \quad \sum_{j=1}^{N_T} S_j = S ,$$

где $Ц(a)$ – целая часть числа a; $\sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} T_i$ – суммарная потребность в элементах j-того типоразмера; $\sum_{i=1}^{M_1} T_i$ – общая потребность в элементах. Требуется определить то же, что и в задаче Б.

Для решения задач Б и В требуется решение вспомогательной задачи разделения типоразмера элементов по маркам, которая в ряде случаев представляет самостоятельный интерес. Эта задача аналогична задаче 2, поставленной в п.7.5 настоящих Рекомендаций и формулируется в данном случае следующим образом.

Задача Г. Даны M неунифицированных элементов, стоимость C и потребность T_i в которых известны. Требуется сгруппировать их по $S < M$ маркам с учетом того, что элемент с большим номером заменяет элемент с меньшим номером. При этом должен быть достигнут минимум стоимости

$$C_S = \sum_{j=1}^{S} c_j \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} T_i \to min .$$

Программа допускает решение задач А-Г в цикле с варьированием N_T и S в заданных пределах, что позволяет определить оптимальное число типоразмеров и марок в номенклатуре, если известны функции удорожания при увеличенных N_T и S.

Для решения задач в программе „UNIFIKAT" используется метод динамического программирования.

Результатами расчета по программе являются:

градации типоразмеров и марок, т.е. номера в упорядоченной последовательности M_T элементов, ограничивающие применение каждого из N_T типоразмеров и S марок; номера типов опалубки по типоразмерам; стоимостные показатели; стоимость унифицированного сортамента; стоимость без разделения типоразмеров по маркам; минимальная стоимость без учета унификации.

Указанные данные выводятся на печать на каждом цикле варьирования числа типоразмеров и марок.

Программа „UNIFIKAT" допускает вывод на печать не только оптимального варианта градации сортамента, но и до 10 вариантов, отличающихся по значению целевой функции от оптимального на заданную величину. Это позволяет выбрать из указанных вариантов наилучший с учетом других критериев с использованием методов решения многокритериальных задач, приведенных в п.6.3-6.8.

Программа составлена на алгоритмическом языке ФОРТРАН IУ и реализована на ЕС ЭВМ. Время счета на ЭВМ ЕС-1030 при числе неунифицированных элементов M_T=20, числа типоразмеров N_T=5, числе марок S =10 не превышает 1 мин.

Программа решения многопараметрической задачи оптимального проектирования номенклатур типовых конструкций

В ЦНИИПромзданий разработана программа решения многопараметрической задачи, которая формулируется следующим образом. Заданы: исходный набор типоразмеров и их стоимости; набор проектных требований (например, количество колонн под заданные нагрузки, высоты и т.п.) количество К типоразмеров в оптимальной номенклатуре. Предполагается также, что для каждого проектного требования известен список типоразмеров, которыми оно может быть удовлетворено. Требуется выбрать К типоразмеров таким образом, чтобы они удовлетворяли всем проектным требованиям и стоимость номенклатуры была минимальной.

Алгоритм программы состоит из двух частей. В первой части осу-

ществляется отбраковка "плохих" типоразмеров по методу эффективных включений. Суть метода состоит в следующем. Вначале для каждого проектного требования с учетом всех типоразмеров определяется наибольшая стоимость его удовлетворения. Далее вводится тот типоразмер, который максимально уменьшает общую стоимость удовлетворения всем проектным требованиям по сравнению с ранее вычисленной. Далее из оставшихся типоразмеров выбирается тот, который также максимально уменьшает общую стоимость и т.д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока ввод очередного типоразмера дает незначительный эффект.

Во второй части алгоритма необходимо удалить из всех перспективных типоразмеров столько, чтобы осталось ровно К. Удаление производится по методу эффективных замен. Процесс состоит в том, что на каждом шаге удаляется тот типоразмер, который наименьшим образом увеличивает общую стоимость.

Программа дает нижнюю и верхнюю границы, в которых лежит оптимальная стоимость. Опыт эксплуатации программы показал, что расхождение между верхней и нижней границами не превышает 4 %.

Программа написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IУ. Время счета задачи с 50 типоразмерами и 50 проектными требованиями на ЭВМ М-4030 не превышает 20 с.

РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТА, РАБОТАЮЩЕГО НА КОСОЕ ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Пусть требуется оптимально запроектировать из условий прочности железобетонный элемент прямоугольного поперечного сечения, работающий на косое внецентренное сжатие (рис.6). На элемент одновременно действуют продольная сила N =2600 кН и изгибающие моменты M_x=240 кН.м и M_y=182,5 кН.м в плоскостях, параллельных соответственно размерам сечения h и b . Внешними переменными параметрами при оптимизации выбираем геометрические размеры сечения b и h , марку бетона $R_б$, класс стали R_a; внутренними переменными параметрами – площадь сечения арматуры.

Для решения внутренней задачи оптимизации необходимо задаться схемой армирования. Принимаем, что при каждом фиксированном значении внешних переменных параметров элемент армируется шестью стержнями (рис.6): четыре стержня одинакового диаметра располагаются в углах сечения, а два других стержня одинакового диаметра – по середине высоты сечения h . Обозначим площадь о д н о г о стержня каждого из типов соответственно S_1 и S_2 . Количество стержней и схему их расположения, показанные на рис.6, сохраняем неизменными при любом значении внешних переменных параметров; меняются только диаметры стержней. Внутренняя задача оптимизации заключается в определении диаметров стержней, обеспечивающих прочность элемента при минимальной площади сечения арматуры. Считаем, что для армирования могут применяться все стержни сортамента арматурной стали диаметром от 16 до 36 мм. Для рационального армирования выполняем условие: $S_2 \leq S_1$. Все назначенные возможные варианты армирования, расположенные в порядке возрастания несущей способности, представлены в табл.47.

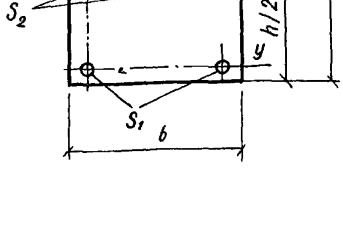


Рис. 6. Элемент, работающий на косое внецентренное сжатие

Таблица 47. Варианты армирования при решении внутренней задачи оптимизации для элемента, работающего на косое внецентренное сжатие

№ варианта T	Количество и диаметр стержней	Площадь арматуры ($4S_1+2S_2$)	№ варианта T	Количество и диаметры стержней	Площадь арматуры ($4S_1+2S_2$)	№ варианта T	Количество и диаметр стержней	Площадь арматуры ($4S_1+2S_2$)
I	2Ø16+4Ø16	12,06	II	2Ø20+4Ø25	25,91	21	2Ø22 + 4Ø32	39,77
2	2Ø16+4Ø18	14,2	12	2Ø22+4Ø25	27,23	22	2Ø25 + 4Ø32	41,99
3	2Ø18+4Ø18	15,27	13	2Ø16+4Ø28	28,65	23	2Ø16 + 4Ø36	44,74
4	2Ø16+4Ø20	16,58	14	2Ø18+4Ø28	29,72	24	2Ø18 + 4Ø36	45,81
5	2Ø18+4Ø20	17,65	15	2Ø20+4Ø28	30,91	25	2Ø20 + 4Ø36	47
6	2Ø16+4Ø22	19,22	16	2Ø22+4Ø28	32,23	26	2Ø22 + 4Ø36	48,32
7	2Ø18+4Ø22	20,29	17	2Ø25+4Ø28	34,45	27	2Ø25 + 4Ø36	50,54
8	2Ø20+4Ø22	21,48	18	2Ø16+4Ø32	36,19	28	2Ø28 + 4Ø36	53,04
9	2Ø16+4Ø25	23,65	19	2Ø18+4Ø32	37,26	29	2Ø32 + 4Ø36	56,81
10	2Ø18+4Ø25	24,72	20	2Ø20+4Ø32	38,45	30	2Ø36 + 4Ø36	61,08

Для прямоугольного сечения с симметричной арматурой (а именно такой случай и рассматривается) проверка условий прочности при фиксированных значениях b, h, $R_б$, $R_а$, S_1, S_2 проводится с помощью графиков приведенных на рис. 29 "Руководства по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона (без предварительного напряжения)". Чтобы найти вариант с минимальным армированием, обеспечивающий прочность элемента, используем один из методов одномерного поиска - метод деления отрезка пополам. Применительно к рассматриваемому примеру проиллюстрируем этот метод, когда фиксированные значения внешних переменных параметров имеют следующие значения: b =40 см, h =60 см, бетон марки 300, арматура класса А-Ш.

Сначала проверяем, выполняются ли условия прочности в вариантах с номерами Т=I и Т=30. Оказывается, что вариант Т=I, имеющий минимальную несущую способность, не обеспечивает, а вариант Т=30 с максимальной несущей способностью обеспечивает выполнение условий. Обозначим номер искомого варианта с минимальным армированием T_m. Ясно, что для T_m выполняются неравенства

$$I < T_m < 30 \qquad (79)$$

По (79) число возможных вариантов для T_m равно 29. Определим, выполняются ли проверяемые условия для варианта Т=I6, номер которого равен примерно среднему арифметическому между значениями Т=I и Т=30, входящими в (79). После выполнения необходимых расчетов убеждаемся, что условия прочности для этого варианта не выполняются. Так как при возрастании несущей способности, увеличивается и номер варианта, то искомый номер Т должен удовлетворять неравенствам $I6 < T_m < 30$.

Продолжая этот процесс, убеждаемся что вариант Т=20 обеспечивает, а соседний вариант Т=I9 не обеспечивает выполнения условий прочности. Таким образом, T_m=20; внутренняя задача оптимизации решена.

Совершенно аналогично можно поступать и в других случаях, когда по СНиП нельзя непосредственно найти минимальные площади сечения арматуры, удовлетворяющие необходимым условиям.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

Проведем оптимальное проектирование железобетонной балки покрытия второй категории трещиностойкости пролетом 18 м. Сечение балки показано на рис.7. Внешними переменными параметрами при оптимизации являются: h, $b_п'$, $h_п'$, b, $b_п$, $R_б$. Внешние ограничения имеют вид

$$120 \text{ см} \leq h \leq 180 \text{ см}; \quad b_п' \leq 36 \text{ см}; \quad h_п' \geq 16 \text{ см};$$
$$b \geq 10 \text{ см}; \quad b_п \geq 20 \text{ см}; \quad R_б \geq 350. \qquad (80)$$

Внутренними переменными параметрами являются: $h_н$, $F_н$ (использовалась арматура 15К-7), величина преднапряжения σ_0, поперечное армирование, длина приопорного ребра. Целевой функцией служила суммарная стоимость материалов в деле. Удельные стоимости материалов приведены в табл.48.

Нагрузки и значения внешних переменных параметров в начальном приближении приняты такими же, как в книге А.Н.Кувалдина и Г.С.Клевцовой "Примеры расчета железобетонных конструкций зданий" (М., 1976). При оптимизации учитывались два вида нагрузок – равномерно распределенная, постоянная и снеговая; крановая в виде двух сосредоточенных сил, приложенных на равном расстоянии от опор.

Опыт при оптимизации состоит в следующем. В соответствии с матрицей планирования (см.разд.3 настоящих Рекомендаций) задаем значения внешних переменных параметров. Внутренние переменные параметры определяем в следующем порядке. Из условий прочности находим необходимое сечение напрягаемой арматуры $F_н$. Из условия размещения $F_н$ назначаем минимально возможную высоту $h_п'$. При каждом фиксированном $F_н$ одномерным поиском находим такое σ_0, чтобы величина обжатия после проявления всех потерь была максимальной. Затем проводим проверку по предельным состояниям первой и второй группы. Одномерным поиском определяем минимально необходимое значение $F_н$. Принимаем F_a' из 2Ø14А-III. Из расчета прочности наклонных сечений по поперечной силе определяем сечение и шаг поперечных стержней; из условия (70) главы СНиП II-21-75 и конструктивных соображений устанавливаем минимально необходимую длину опорного ребра.

Результаты опытов представлены в табл.49. Опыт 0 – начальное

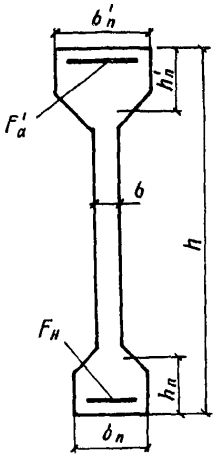


Рис.7. Предварительно-напряженная балка двутаврового сечения

Таблица 48. Стоимость материалов двутавровой предварительно-напряженной балки

Класс арматуры	I5К-7	-	-	-	-		-		-	
Марка бетона	-	350	400	450	500		600		700	
Объем $м^3$, не более	-	-	-	-	6	5	6	5	6	5
Стоимость I т стали, руб	347,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Стоимость I $м^3$ бетона, руб		44,98	46,29	47,9I	49,02	49,42	52,36	52,76	55,99	56,39

приближение. Опыты I-8 проведены на основе дробной реплики, образованной из ПФЭ типа 2^3 при $\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2$; $\bar{x}_5 = \bar{x}_1\bar{x}_4$; $\bar{x}_6 = \bar{x}_2\bar{x}_4$ (см. разд.3 настоящих Рекомендаций). Коэффициенты b_i определяем по формуле (2I) разд.3. Зависимость (I4) разд.3 имеет вид

$$y = 395,86 - 3,52\bar{x}_1 + 3,44\bar{x}_2 + 6,96\bar{x}_3 + I2,79\bar{x}_4 + 9,35\bar{x}_5 + I3,47\bar{x}_6 \quad (8I)$$

Опыты 9,I0,II представляют собой движение по антиградиенту: $y_8 > y_9 > y_{10}$; $y_{10} < y_{11}$. В опыте 9 значения b , а в опыте I0 зна-

Таблица 49. Оптимизация двутавровой предварительно-напряженной балки

№ опыта (u)	Матрица планирования						Условия опытов						y, руб.
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_6$	x_1 (h) см	x_2 (b'_n) см	x_3 (h'_n) см	x_4 (δ) см	x_5 (b_n) см	x_6 ($R_б$)	
0	0	0	0	0	0	0	I49	38	24	I2	28	600	385,74
I	-I	-I	+I	-I	+I	+I	I44	36	26	I0	30	700	4II,07
2	+I	-I	-I	-I	-I	+I	I54	36	22	I0	26	700	375,I3
3	-I	+I	-I	-I	+I	-I	I44	40	22	I0	30	500	380,79
4	+I	+I	+I	-I	-I	-I	I54	40	26	I0	26	500	365,28
5	-I	-I	+I	+I	-I	-I	I44	36	26	I4	26	500	394,74
6	+I	-I	-I	+I	+I	-I	I54	36	22	I4	30	500	388,76
7	-I	+I	-I	+I	-I	+I	I44	40	22	I4	26	700	4I0,9I
8	+I	+I	+I	+I	+I	+I	I54	40	26	I4	30	700	440,2I
9	0	0	-I	-I	-I	-I	I49	38	22	I0	26	500	346
I0	+I	-I	-I	-I	-I	-2	I54	36	22	I0	26	450	340,2
II	+I	-I	-2	-I	-2	-3	I54	36	20	I0	24	400	345,29
I2	-I	0	+I	0	0	-I	I49	36	24	I0	26	400	357,46
I3	+I	0	-I	0	0	-I	I59	36	20	I0	26	400	333,47
I4	-I	0	-I	0	0	+I	I49	36	20	I0	26	500	360,I7
I5	+I	0	+I	0	0	+I	I59	36	24	I0	26	500	356,08
I6	0	0	0	0	-I	0	I54	36	22	I0	24	450	358,86
I7	0	0	0	0	+I	0	I54	36	22	I0	28	450	344,46
I8	+I	0	-I	0	0	-I	I59	36	20	I0	26	400	333,37
I9	+2	0	-I	0	0	-2	I64	36	20	I0	26	350	335,89
20	-I	0	+I	0	0	-I	I54	36	22	I0	26	350	35I,79
2I	+I	0	-I	0	0	-I	I64	36	I8	I0	26	350	33I,67
22	-I	0	-I	0	0	+I	I54	36	I8	I0	26	450	33I,07
23	+I	0	+I	0	0	+I	I64	36	22	I0	26	450	348,28
24	0	0	0	0	-I	0	I59	36	20	I0	24	400	349,6
25	0	0	0	0	+I	0	I59	36	20	I0	28	400	337,56
26	0	0	-I	0	0	0	I59	36	I8	I0	26	400	329,2I
27	0	0	-2	0	0	0	I59	36	I6	I0	26	400	346,49

чения b'_n оказались равными граничным из (80). В дальнейших опытах эти параметры фиксируем. Опыт I0 принимаем в качестве начального приближения при определении второго направления движения. Опыты I2–I7 проводим для определения этого направления. В

опытах I2-I5 варьируем параметры $\bar{x}_1$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_6$; используем дробную реплику, образованную из ПФЭ 2^2 при $\bar{x}_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3$. В опытах I6, I7 варьируем параметр x_5. Оказалось, что $y_{16} > y_{10}$ и $y_{17} > y_{10}$. По этому при движении по антиградиенту параметра X_5 не меняем. По результатам опытов I2-I7 зависимость (I4) имеет вид:

$$y = 351{,}8 - 7{,}02\bar{x}_1 + 4{,}98\bar{x}_3 + 6{,}33\bar{x}_6 \qquad (82)$$

Результаты движения по антиградиенту представлены опытами I8, I9: $y_{18} < y_{10}$; $y_{19} > y_{18}$

Опыты 20-25 (определение третьего направления движения) проводим аналогично опытам I2-I7. За начальное приближение принимаем опыт I8. Зависимость (I4) разд.3 настоящих Рекомендаций имеет вид $y = 340{,}7 - 0{,}73\bar{x}_1 + 9{,}33\bar{x}_3 - 1{,}03\bar{x}_6$ (83)

Движение по антиградиенту представлено опытами 26,27: $y_{26} < y_{18}$; $y_{27} > y_{26}$. В опыте 26 (y_{26}=329,2I руб.) получаем небольшое уменьшение целевой функции по сравнению с опытом I8(y_{18}=333,37 руб.). Поэтому дальнейшие расчеты прекращаем. По сравнению с y_o = =385,74 руб. в опыте 26 достигнута экономия I4,7%.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЬЦЕВОГО ФУНДАМЕНТА ПОД ДЫМОВУЮ ТРУБУ

Рассмотрим пример оптимизации кольцевого фундамента под дымовую трубу Чигиринской ГРЭС (рис.8). Этот пример подтверждает, что внутреннюю задачу оптимизации можно решать, используя ранее разработанные методы оптимизации конструкций по некоторым параметрам (см.п.2.9 настоящих Рекомендаций) и показывает, что на основе принципа разделения параметров можно расширить область применения ранее разработанного метода оптимизации армирования фундамента - определять фундамент минимальной стоимости.

Целевой функцией служит суммарная стоимость бетона и арматуры. Фундамент изготовляется из монолитного бетона марки 300 и арматуры класса А-Ш. Удельные стоимости материалов: б е т о н а 42 руб/м^3, арматуры I36 руб/т.

На фундамент действуют вертикальная нормальная сила от массы трубы и момент от ветра, которые в соответствии с рекомендациями "Руководства по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций" приводятся к вертикальной осесимметричной нагрузке q . Равнодействующая нормативной и расчетной нагрузок составляет: $N^{н}$ =769000 кН; $N^{р}$ =877000 кН. Моделью основания принят однородный линейно-упругий слой, характеризуемый толщиной H, модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0. В соответствии с "Рекомендациями по расчету оснований кольцевых фундаментов дымовых труб" $H=0{,}7r$, где r - наружный радиус фундамента; E_0=4I,25 МПа; ν_0=0,3.

Внешними переменными параметрами x_1, x_2, x_3 служат геометрические размеры фундамента, показанные на рис.8. Внутренними переменными параметрами являются армирование и геометрический размер x_4.

Внешние ограничения сводятся к требованиям:

а) прочности наклонных сечений по поперечной силе

$$Q \leq Q_{пр} = 0{,}75\, h R_p \ , \qquad (84)$$

где h - высота сечения; R_p - расчетное сопротивление бетона на растяжение;

б) возможности применения линейной теории упругости к расчету основания

$$p \leq R, \qquad (85)$$

где p - среднее давление на основание от постоянных длительных

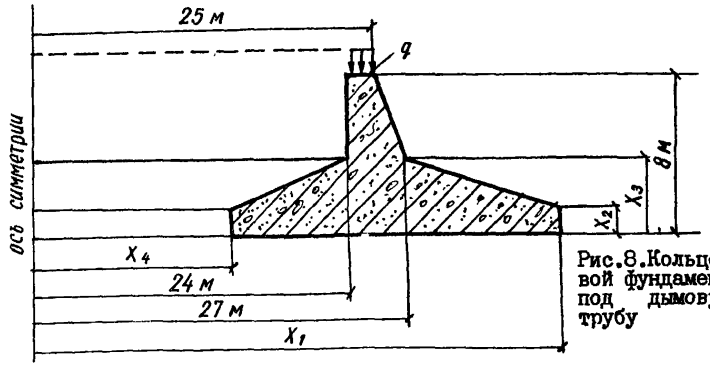


Рис.8.Кольцевой фундамент под дымовую трубу

Таблица 50. Оптимизация кольцевого фундамента под дымовую трубу

№ опыта	Внешние параметры, м			Ограничения			y, тыс. руб
	x_1	x_2	x_3	$max\ (Q/Q_{пр})$	$S/S_{пр}$	$i/i_{пр}$	
0	34,0	I,5	4,5	0,674	I,00	0,652	44I,3
I	33,5	I,5	4,5	0,667	0,99	0,682	439,2
2	33	I,5	4,5	0,67I	0,98	0,7I4	43I
3	32,5	I,5	4,5	0,68	0,98	0,747	429,8
4	32	I,5	4,5	0,693	0,98	0,78I	428,6
5	3I,5	I,5	4,5	0,7	0,98	0,8II	436,2
6	32	I,25	4,5	0,696	0,98	0,78I	4I8,9
7	32	I,25	4	0,788	I,0I	0,78I	–
8	32,5	I,25	4	0,784	I	0,746	406,4
9	32,5	I	4	0,784	I	0,746	394,5

и кратковременных нагрузок с коэффициентом перегрузки, равным I; R – расчетное давление на основание, определяемое согласно "Рекомендациям по расчету оснований кольцевых фундаментов дымовых труб";

в) соотношения между наименьшей x_2 и наибольшей x_3 толщинами консоли, принимаемого в соответствии с "Руководством по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций"

$$x_3 \leqslant 4x_2 . \qquad (86)$$

Внутренними ограничениями являются требования к прочности армированных и неармированных сечений, а также ограничения по ширине раскрытия трещин. Предельно допустимая ширина кратковременного и длительного раскрытия трещин для фундаментов, эксплуатируемых в грунте выше уровня грунтовых вод, согласно г л а в е СНиП II-21-75, составляет соответственно 0,4 и 0,3 мм. Кроме того, к внутренним ограничениям относятся также требования:

ограничения осадки фундамента

$$S \leq S_{пр} = 10 \text{ см} \qquad (87)$$

ограничения крена фундамента

$$i \leq i_{пр} = 1,0 \cdot 10^{-3} \qquad (88)$$

В формулах (84), (87), (88) обозначения $Q_{пр}$, $S_{пр}$, $i_{пр}$ относятся к предельным значениям соответствующих величин. Значения $S_{пр}$ и $i_{пр}$ найдены согласно "Руководству по проектированию оснований зданий и сооружений (М., 1980).

Внешнюю задачу оптимизации решаем методом покоординатного спуска (см.пп.4.10, 4.11 настоящих Рекомендаций). Ограничение (85) не проверяем, так как оно выполняется с большим запасом. Изменяем внешние переменные параметры x_2 и x_3 в таких пределах, чтобы не нарушить ограничения (86).

При решении внутренней задачи оптимизации вначале определяем значение параметра x_4, связывая его с параметром x_1: при изменении параметра x_1 находим соответствующее максимально возможное значение параметра x_4, чтобы выполнялись ограничения (87) и (88). При изменении параметров x_2, x_3 ограничения (87), (88) проверяются. При выполнении этих ограничений рассчитываем фундамент на ЕС ЭВМ по программе, описанной в прил.I настоящих Рекомендаций; определяем оптимальное армирование при выполнении ограничений по прочности и ширине раскрытия трещин. Заканчиваем опыт, определяя объемы материалов и вычисляя стоимость.

Оптимизация проводилась при взаимодействии системы "человек-машина": на ЭВМ определялось оптимальное армирование, а все остальные операции выполнялись исследователем. Результаты расчетов представлены в табл.50. Кроме значений внешних переменных параметров и целевой функции, здесь показаны также отношения $Q/Q_{пр}$, $S/S_{пр}$, $i/i_{пр}$, характеризующие выполнение ограничений (84), (87), (88).

Начальное приближение задано во ВНИПИ Теплопроект Минмон-

тажспецстроя (опыт 0). Шаг изменения параметров x_1, x_3 равен 0,5 м, параметра x_2 – 0,25 м. В опытах 1–5 изменялся параметр x_1 до тех пор, пока уменьшалась целевая функция ($y_5 > y_4$). В опыте 6 при уменьшении параметра x_2 до 1,25 м оказалось, что $y_6 < y_4$. Принять значение параметра $x_2 < 1{,}25$ м оказалось невозможным из-за нарушения ограничения (86). При увеличении параметра x_3 целевая функция возрастала, а при его уменьшении (опыт 7) нарушалось ограничение (87).

Поскольку оптимизация проводилась при взаимодействии системы "человек-машина", оказалось возможным использовать интуицию исследователя. Для выполнения ограничений (87) был увеличен параметр x_1 до 32,5 м (опыт 8); значение целевой функции уменьшилось: $y_8 < y_6$. Затем был выполнен спуск по параметру x_2; оказалось, что $y_9 < y_8$. Дальнейшие опыты (здесь не приведенные) в соответствии с алгоритмом покоординатного спуска не дают уменьшения целевой функции – алгоритм заканчивает работу. По сравнению с начальным приближением (y =441,3 тыс.руб.) в найденном оптимальном варианте (y =394,5 тыс.руб.) получена экономия 10,6%.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВСПАРУШЕННЫХ ПЛИТ

Вспарушенные плиты (рис.9) – пологие оболочки двоякой кривизны с плоским прямоугольным контуром – находят применение в качестве покрытий и междуэтажных перекрытий промышленных и гражданских зданий. Уравнение поверхности оболочки при расположении начала координат в углу ее прямоугольного плана со сторонами a и b ($a \leq b$) задается в виде

$$z = \frac{16 f}{a^2 b^2} \frac{x(a-x)\, y(b-y)}{1 - C\left[\frac{(2x-a)^2}{a^2} + \frac{(2y-b)^2}{b^2}\right]}, \qquad (89)$$

где f – стрела подъема оболочки ($0 \leq f \leq 1/5\, a$).

Коэффициент C ($0 \leq C \leq 0{,}5$) определяет контур параболических точек поверхности, внутри которого расположена область положительной гауссовой кривизны, а вне его – отрицательной.

Толщина оболочки h меняется в соответствии с законом

$$h = h_1 + (h_0 - h_1) \frac{[|2x-a|^{2n} - a^{2n}][|2y-b|^{2n} - b^{2n}]}{a^{2n} b^{2n}}, \qquad (90)$$

где h_1 – толщина оболочки на контуре; h_0 – толщина оболочки в центре; n – параметр ($n > 0{,}5$).

Предполагается, что $h_1 \geq h_0$, что соответствует накопленному опыту проектирования вспарушенных плит.

На вспарушенную плиту действует равномерно распределенная нагрузка. Плита рассчитывается по моментной технической теории пологих оболочек по программам для ЭВМ, разработанным в ГрузНИИЭГС. Интегрирование разрешающих дифференциальных уравнений осуществляется модифицированным методом Бубнова–Галеркина. Учитываются реальные жесткостные характеристики контурных ребер, площади поперечного сечения которых обозначаются F_1 и F_2.

В общем случае при оптимизации вспарушенной плиты переменными параметрами являются F_1, F_2, f, c, n, h_1, h_0, марка бетона, класс стали, арматура. Ниже приводится пример оптимизации квадратной в плане вспарушенной плиты при $a = b = 24$ м и $h_0 = h_1 = 0{,}08$ м с тремя внешними переменными параметрами: C, f, $F = F_1 = F_2$ при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 50 МПа. Плита изготовляется из тяжелого бетона марки М300 и стали класса А-III.

Целевой функцией принята суммарная стоимость материалов в

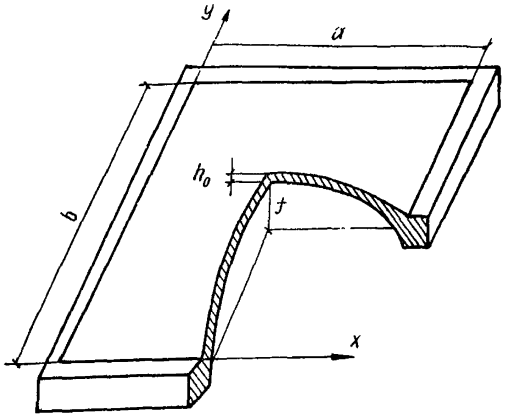


Рис.9. Вспарушенная плита

Таблица 5I. Оптимизация вспарушенной плиты

№ опыта	Матрица планирования			Условия опытов			y, руб.
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$X_1(c)$	$X_2(f)$	$X_3(F)$	
0	0	0	0	0,4	2,4	0,08	3243
I	-I	-I	+I	0,3	2,2	0,I	34II
2	+I	-I	-I	0,5	2,2	0,06	3I95
3	-I	+I	-I	0,3	2,6	0,06	3I36
4	+I	+I	+I	0,5	2,6	0,I	3263
5	0	+I	-I	0,4	2,6	0,06	3I22
6	+I	+I	-2	0,5	2,6	0,04	3023
7	+I	+2	-2	0,5	2,8	0,04	2980
8	+I	+3	-2	0,5	3	0,04	2945

деле; стоимость бетона равна 50 руб/м^3; стоимость стали - 0,I9 руб/кг.

Внешние переменные параметры C, f и $F = F_I = F_2$ обозначим соответственно X_I, X_2, X_3. Внутренними переменными параметрами являются параметры армирования. Внешние ограничения имеют вид:

$0 \leq C \leq 0,5$; $0,4$ м$^2 \leq F$; $0 < f < 3,0$ м.

Внутренними ограничениями являются условия прочности, жесткости и трещиностойкости.

В опыте фиксируются внешние переменные параметры, определяются внутренние усилия, согласно главе СНиП II-2I-75 определяются

параметры армирования, вычисляется стоимость.

В начальном приближении принято: C=0,4; f =2,4 м; F=0,08 м^2. Внешняя задача оптимизации решалась методами, основанными на теории планирования экстремальных экспериментов (см.разд.3 настоящих Рекомендаций). Условия и результаты опытов представлены в табл.5I. Опыты I-4 проведены в соответствии с дробной репликой, основанной на ПФЭ типа 2^3, причем $\bar{x}_3=\bar{x}_1\bar{x}_2$. Линейная зависимость между целевой функцией и внешними переменными параметрами имеет вид: y =325I-22,25$\bar{x}_1$-5I,75$\bar{x}_2$+85,75$\bar{x}_3$.

Опыты 5-8 представляют собой движение по антиградиенту. В опыте 8 все внешние переменные параметры достигают граничных значений - движение по антиградиенту закончено. По сравнению с начальным приближением полученная экономия составила 9,2%.

ТАБЛИЦЫ РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТОВ РЕШЕНИЯ ТЕСТОВОГО ПРИМЕРА ОПТИМИЗАЦИИ ИЗГИБАЕМОГО ЭЛЕМЕНТА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Таблица 52

b = 10 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h,см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y	h,см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
25	150	5	0,9	–	–	55	150	5	1,98	1,46	3,44
	200		0,96	–	–		200		2,12	1,33	3,45
	250		1	–	–		250		2,2	0,94	3,14
	300		1,03	–	–		300		2,26	0,94	3,2
	350		1,06	–	–		350		2,34	0,94	3,28
	400		1,11	–	–		400		2,45	0,94	3,39
	450		1,15	–	–		450		2,53	0,94	3,47
	500		1,18	–	–		500		2,59	0,94	3,53
30	150	5	1,08	–	–	60	150	5	2,16	1,04	3,2
	200		1,16	–	–		200	1	2,31	0,88	3,19
	250		1,2	–	–		250	1	2,4	0,88	3,28
	300		1,23	–	–		300	1	2,46	0,88	3,34
	350		1,28	–	–		350	1	2,55	0,88	3,43
	400		1,34	–	–		400	1	2,67	0,74	3,41
	450		1,38	–	–		450	1	2,76	0,74	3,5
	500		1,41	–	–		500	1	2,82	0,74	3,56
35	150	5	1,26	–	–	65	150	1	2,34	0,88	3,22
	200		1,35	–	–		200	1	2,5	0,74	3,24
	250		1,4	–	–		250	2	2,6	0,72	3,32
	300		1,44	–	–		300	2	2,67	0,72	3,39
	350		1,49	–	–		350	2	2,76	0,72	3,48
	400		1,56	–	–		400	2	2,89	0,72	3,61
	450		1,61	*2,08*	*3,69*		450	2	2,99	0,72	3,71
	500		1,65	2,08	3,73		500	2	3,06	0,72	3,78
40	150	5	1,44	–	–	70	150	2	2,52	0,72	3,24
	200		1,54	–	–		200	2	2,7	0,72	3,42
	250		1,6	2,08	3,68		250	2	2,8	0,72	3,52
	300		1,64	1,97	3,61		300	2	2,87	0,72	3,59
	350		1,7	1,97	3,67		350	2	2,98	0,72	3,7
	400		1,78	1,79	3,57		400	1	3,12	0,62	3,74
	450		1,84	1,72	3,56		450	1	3,22	0,62	3,84
	500		1,88	1,66	3,54		500	1	3,29	0,62	3,91
45	150	5	1,62	1,75	3,37	75	150	2	2,7	0,72	3,42
	200		1,73	1,64	3,37		200	1	2,89	0,62	3,51
	250		1,8	1,54	3,34		250	1	3	0,62	3,62
	300		1,85	1,39	3,24		300	1	3,08	0,62	3,7
	350		1,91	1,66	3,57		350	1	3,19	0,62	3,81
	400		2	1,33	3,33		400	1	3,34	0,62	3,96
	450		2,07	1,33	3,4		450	1	3,45	0,62	4,07
	500		2,12	1,33	3,45		500	2	3,53	0,57	4,1

Продолжение табл. 52

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
50	I50	5	I,8	I,64	3,44	80	I50	I	2,88	0,62	3,5
	200		I,93	I,46	3,39		200	2	3,08	0,57	3,65
	250		2	I,33	3,33		250	2	3,2	0,57	3,77
	300		2,05	I,33	3,38		300	2	3,28	0,57	3,85
	350		2,I3	I,33	3,46		350	2	3,4	0,57	3,97
	400		2,23	I,04	3,27		400	2	3,56	0,57	4,I3
	450		2,3	I,04	3,34		450	2	3,68	0,57	4,25
	500		2,35	I,04	3,39		500	2	3,76	0,57	4,33

Таблица 53

b = I2 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h,см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y	h,см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
25	I50	5	I,08	–	–	55	I50	2	2,38	I,06	3,44
	200		I,I6	–	–		200	2	2,54	I,06	3,6
	250		I,2	–	–		250	I	2,64	0,88	3,52
	300		I,23	–	–		300	I	2,7I	0,88	3,59
	350		I,28	–	–		350	I	2,8I	0,88	3,69
	400		I,34	–	–		400	I	2,94	0,88	3,82
	450		I,33	–	–		450	I	3,04	0,88	3,92
	500		I,4I	4,64	6,05		500	I	3,I	0,88	3,98
30	I50	3	I,3	3,26	4,56	60	I50	I	2,59	0,88	3,47
	200		I,39	3,26	4,65		200	I	2,77	0,88	3,65
	250		I,44	3	4,44		250	I	2,88	0,88	3,76
	300		I,48	3	4,48		300	I	2,95	0,74	3,69
	350		I,53	2,78	4,3I		350	I	3,06	0,74	3,8
	400		I,6	2,64	4,24		400	I	3,2	0,74	3,94
	450		I,66	2,64	4,3		450	2	3,3I	0,72	4,03
	500		I,69	2,52	4,2I		500	2	3,38	0,72	4,I
35	I50	3	I,5I	2,33	3,84	65	I50	I	2,77	0,88	3,65
	200	3	I,62	2,33	3,95		200	2	2,97	0,72	3,69
	250	3	I,68	2,I9	3,87		250	2	3,08	0,72	3,8
	300	3	I,72	I,96	3,68		300	2	3,I6	0,72	3,88
	350	3	I,79	I,86	3,65		350	2	3,27	0,72	3,99
	400	3	I,87	I,78	3,65		400	2	3,43	0,72	4,I5
	450	3	I,93	I,7I	3,64		450	2	3,54	0,72	4,26
	500	I	I,97	I,74	3,7I		500	2	3,62	0,72	4,34
40	I50	3	I,76	I,92	3,68	70	I50	2	3,02	0,72	3,74
	200	3	I,86	I,69	3,55		200	2	3,23	0,72	3,95
	250	3	I,96	I,6	3,56		250	2	3,36	0,72	4,08
	300	3	2,0I	I,65	3,66		300	2	3,44	0,72	4,I6
	350	I	2,08	I,36	3,44		350	I	3,57	0,62	4,I9
	400	I	2,I8	I,36	3,54		400	I	3,74	0,62	4,36
	450	I	2,25	I,36	3,6I		450	I	3,86	0,62	4,48
	500	I	2,3	I,36	3,66		500	I	3,95	0,62	4,57

Продолжение табл. 53

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
45	I50	3	I,94	I,69	3,63	75	I50	I	3,24	0,62	3,86
	200	3	2,08	I,5I	3,59		200	I	3,47	0,62	4,09
	250	I	2,I6	I,36	3,52		250	I	3,6	0,62	4,22
	300	I	2,2I	I,36	3,57		300	I	3,69	0,62	4,3I
	350	I	2,3	I,I	3,4		350	I	3,83	0,62	4,45
	400	2	2,4	I,06	3,46		400	2	4,0I	0,57	4,58
	450	2	2,48	I,06	3,54		450	2	4,I4	0,57	4,7I
	500	2	2,54	I,06	3,6		500	2	4,23	0,57	4,8
50	I50	3	2,I6	I,2	3,36	80	I50	I	3,46	0,62	4,08
	200	I	2,3I	I,I	3,4I		200	2	3,7	0,57	4,27
	250	2	2,4	I,06	3,46		250	2	3,84	0,57	4,4I
	300	2	2,46	I,06	3,52		300	2	3,94	0,57	4,5I
	350	2	2,55	I,06	3,6I		350	2	4,08	0,57	4,65
	400	2	2,67	I,06	3,73		400	2	4,27	0,57	4,84
	450	I	2,76	0,88	3,64		450	2	4,42	0,57	4,99
	500	I	2,82	0,88	3,7		500	2	4,5I	0,57	5,08

Таблица 5 4

b = I4 см

Условия опытов			Целевые функции руб.			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	y	h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	y
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
25	I50	5	I,26	–	–	55	I50	2	2,77	I,06	3,83
	200		I,35	–	–		200	I	2,97	0,88	3,85
	250		I,4	–	–		250	I	3,08	0,88	3,96
	300		I,44	–	–		300	I	3,I6	0,88	4,04
	350		I,49	–	–		350	I	3,27	0,88	4,I5
	400		I,56	4,64	6,2		400	I	3,43	0,88	4,3I
	450		I,6I	4,64	6,25		450	I	3,54	0,88	4,42
	500		I,65	4,64	6,29		500	I	3,62	0,88	4,5
30	I50	3	I,5I	3,26	4,77	60	I50	I	3,02	0,88	3,9
	200		I,62	3	4,62		200	I	3,23	0,88	4,II
	250		I,68	3	4,68		250	I	3,36	0,88	4,24
	300		I,72	2,78	4,5		300	I	3,44	0,74	4,I8
	350		I,79	2,64	4,43		350	2	3,57	0,72	4,29
	400		I,87	2,52	4,39		400	2	3,74	0,72	4,46
	450		I,93	2,44	4,37		450	2	3,86	0,72	4,58
	500		I,97	2,32	4,29		500	2	3,95	0,72	4,67
35	I50	3	I,76	2,33	4,09	65	I50	2	3,24	0,72	3,96
	200		I,89	2,I9	4,08		200	2	3,47	0,72	4,I9
	250		I,96	2,07	4,03		250	2	3,64	0,72	4,36
	300		2,0I	I,87	3,88		300	2	3,69	0,72	4,4I
	350		2,08	I,7I	3,79		350	2	3,83	0,72	4,55
	400	I	2,I8	I,74	3,92		400	2	4,0I	0,72	4,73
	450	I	2,25	I,74	3,99		450	2	4,I4	0,72	4,86
	500	I	2,3	I,74	4,04		500	2	4,23	0,72	4,95

Продолжение табл. 5 4

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
40	I50	5	2,02	I,8	3,82	70	I50	2	3,56	0,72	4,28
	200	5	2,I6	I,6	3,76		200	2	3,8I	0,72	4,53
	250	5	2,24	I,7I	3,95		250	2	3,96	0,72	4,68
	300	I	2,3	I,36	3,66		300	I	4,06	0,62	4,68
	350	I	2,38	I,36	3,74		350	I	4,2I	0,62	4,83
	400	I	2,49	I,36	3,85		400	I	4,4I	0,62	5,03
	450	I	2,58	I,36	3,94		450	I	4,55	0,62	5,I7
	500	I	2,63	I,36	3,99		500	I	4,65	0,62	5,27
45	I50	3	2,27	I,6	3,87	75	I50	I	3,78	0,62	4,4
	200	3	2,43	I,38	3,8I		200	I	4,04	0,62	4,66
	250	I	2,52	I,36	3,88		250	I	4,2	0,62	4,82
	300	I	2,58	I,36	3,94		300	I	4,3I	0,62	4,93
	350	I	2,68	I,I	3,78		350	2	4,46	0,57	5,03
	400	I	2,8	I,I	3,9		400	2	4,67	0,57	5,24
	450	I	2,9	I,I	4		450	2	4,83	0,57	5,4
	500	I	2,96	I,I	4,06		500	2	4,94	0,57	5,5I
50	I50	3	2,52	I,38	3,9	80	I50	2	4,07	0,57	4,64
	200	2	2,7	I,06	3,76		200	2	4,35	0,57	4,92
	250	2	2,8	I,06	3,86		250	2	4,52	0,57	5,09
	300	2	2,87	I,06	3,93		300	2	4,63	0,57	5,2
	350	2	2,98	I,06	4,04		350	2	4,8	0,57	5,37
	400	I	3,I2	0,88	4		400	2	5,03	0,57	5,6
	450	I	3,22	0,88	4,I		450	2	5,2	0,57	5,77
	500	I	3,29	0,88	4,I7		500	2	5,3I	0,57	5,88

Таблица 5 5

b = I5 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y	h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
25	I50	5	I,36	–	–	55	I50	2	3,02	I,06	4,08
	200		I,46	–	–		200	I	3,23	0,88	4,II
	250		I,52	3,97	5,49		250	I	3,36	0,88	4,24
	300		I,56	3,97	5,53		300	I	3,44	0,88	4,32
	350		I,62	3,97	5,59		350	I	3,57	0,88	4,45
	400		I,69	3,97	5,66		400	I	3,74	0,88	4,62
	450		I,75	3,58	5,33		450	I	3,86	0,88	4,74
	500		I,79	3,58	5,37		500	I	3,95	0,88	4,83
30	I50	5	I,62	3,02	4,64	60	I50	I	3,24	0,88	4,I2
	200		I,73	2,82	4,55		200	I	3,47	0,88	4,35
	250		I,8	2,64	4,44		250	I	3,6	0,74	4,34
	300		I,85	2,64	4,49		300	I	3,69	0,74	4,43
	350		I,9I	2,47	4,38		350	I	3,83	0,74	4,57
	400		2	2,33	4,33		400	2	4,0I	0,72	4,73
	450		2,07	2,2	4,27		450	2	4,I4	0,72	4,86
	500		2,I2	2,I	4,22		500	2	4,23	0,72	4,95

Продолжение табл. 55

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
35	I50	3	I,9I	2,33	4,24	65	I50	2	3,56	0,72	4,28
	200	3	2,04	2,I9	4,23		200		3,8I	0,72	4,53
	250	3	2,I2	I,96	4,08		250		3,96	0,72	4,68
	300	3	2,I7	I,78	3,95		300		4,06	0,72	4,78
	350	2	2,25	I,6	3,85		350		4,2I	0,72	4,93
	400	2	2,36	I,6	3,96		400		4,4I	0,72	5,I3
	450	2	2,44	I,6	4,04		450		4,55	0,72	5,27
	500	2	2,49	I,6	4,09		500		4,65	0,72	5,37
40	I50	3	2,I6	I,69	3,85	70	I50	2	3,78	0,72	4,5
	200	3	2,3I	I,87	4,I8		200	2	4,04	0,72	4,76
	250	3	2,4	I,65	4,05		250	2	4,2	0,72	4,92
	300	I	2,46	I,36	3,82		300	I	4,3I	0,62	4,93
	350	2	2,55	I,27	3,82		350	I	4,46	0,62	5,08
	400	2	2,67	I,27	3,94		400	I	4,67	0,62	5,29
	450	2	2,76	I,27	4,03		450	I	4,83	0,62	5,45
	500	2	2,82	I,27	4,09		500	I	4,94	0,62	5,56
45	I50	3	2,45	I,5I	3,96	75	I50	I	4,07	0,62	4,69
	200	2	2,62	I,27	3,89		200	I	4,35	0,62	4,97
	250	2	2,72	I,27	3,99		250	I	4,52	0,62	5,I4
	300	I	2,79	I,I	3,89		300	I	4,63	0,62	5,25
	350	I	2,89	I,I	3,99		350	2	4,8	0,57	5,37
	400	I	3,03	I,I	4,I3		400	2	5,03	0,57	5,6
	450	I	3,I3	I,I	4,23		450	2	5,2	0,57	5,77
	500	I	3,2	I,I	4,3		500	2	5,3I	0,57	5,88
50	I50	2	2,7	I,27	3,97	80	I50	2	4,32	0,57	4,89
	200	2	2,89	I,06	3,95		200		4,62	0,57	5,I9
	250	2	3	I,06	4,06		250		4,8	0,57	5,37
	300	2	3,08	I,06	4,I4		300		4,92	0,57	5,49
	350	2	3,I9	0,88	4,07		350		5,I	0,57	5,67
	400	I	3,34	0,88	4,22		400		5,34	0,57	5,9I
	450	I	3,45	0,88	4,33		450		5,52	0,57	6,09
	500	I	3,53	0,88	4,4I		500		5,64	0,57	6,2I

Таблица 56

b = I6 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y	h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
25	I50	4	I,44	3,83	5,27	55	I50	I	3,I6	I,I	4,26
	200		I,54	3,83	5,37		200		3,39	0,88	4,27
	250		I,6	3,83	5,43		250		3,52	0,88	4,4
	300		I,64	3,49	5,I3		300		3,6I	0,88	4,49
	350		I,7	3,49	5,I9		350		3,74	0,88	4,62
	400		I,78	3,29	5,07		400		3,92	0,88	4,8
	450		I,84	3,29	5,I3		450		4,05	0,88	4,93
	500		I,88	3,II	4,99		500		4,I4	0,88	5,02

Продолжение табл. 56

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
30	I50	4	I,73	3,09	4,82	60	I50	I	3,46	0,88	4,34
	200		I,85	2,88	4,73		200		3,7	0,88	4,58
	250		I,92	2,7	4,62		250		3,84	0,74	4,58
	300		I,97	2,54	4,5I		300		3,94	0,74	4,68
	350		2,04	2,39	4,43		350		4,08	0,74	4,82
	400		2,I4	2,I7	4,3I		400		4,27	0,74	5,0I
	450		2,2I	2,I6	4,37		450		4,42	0,74	5,I6
	500		2,26	2,03	4,29		500		4,5I	0,74	5,25
35	I50	3	I,98	2,I9	4,I7	65	I50	I	3,74	0,74	4,48
	200		2,I2	2,07	4,I9		200		4	0,74	4,74
	250		2,2	I,96	4,I6		250		4,I6	0,74	4,9
	300		2,26	I,7I	3,97		300		4,26	0,74	5
	350		2,34	I,6	3,94		350		4,42	0,74	5,I6
	400		2,45	I,6	4,05		400		4,63	0,74	5,37
	450		2,53	I,6	4,I3		450		4,78	0,74	5,52
	500		2,59	I,36	3,95		500		4,89	0,74	5,63
40	I50	3	2,3	I,96	4,26	70	I50	I	4,03	0,74	4,77
	200	3	2,46	I,78	4,24		200		4,3I	0,74	5,05
	250	2	2,56	I,6	4,I6		250		4,48	0,62	5,I
	300	I	2,62	I,36	3,98		300		4,59	0,62	5,2I
	350	I	2,72	I,36	4,08		350		4,76	0,62	5,38
	400	I	2,85	I,36	4,2I		400		4,98	0,62	5,6
	450	I	2,94	I,36	4,3		450		5,I5	0,62	5,77
	500	I	3,0I	I,I	4,II		500		5,26	0,62	5,88
45	I50	4	2,56	I,47	4,03	75	I50	I	4,32	0,62	4,94
	200	I	2,77	I,36	4,I3		200	I	4,62	0,62	5,24
	250	I	2,88	I,I	3,98		250	I	4,8	0,62	5,42
	300	I	2,95	I,I	4,05		300	2	4,92	0,57	5,49
	350	I	3,06	I,I	4,I6		350	2	5,I	0,57	5,67
	400	I	3,2	I,I	4,3		400	2	5,34	0,57	5,9I
	450	I	3,3I	I,I	4,4I		450	2	5,52	0,57	6,09
	500	I	3,38	I,I	4,48		500	2	5,64	0,57	6,2I
50	I50	I	2,92	I,I	4,02	80	I50	2	4,6I	0,57	5,I8
	200		3,I2	I,I	4,22		200		4,93	0,57	5,5
	250		3,24	I,I	4,34		250		5,I2	0,57	5,69
	300		3,32	I,I	4,42		300		5,25	0,57	5,82
	350		3,44	0,88	4,32		350		5,44	0,57	6,0I
	400		3,6I	0,88	4,49		400		5,7	0,57	6,27
	450		3,73	0,88	4,6I		450		5,89	0,57	6,46
	500		3,8I	0,88	4,69		500		6,02	0,57	6,59

b = I8 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$	h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$
25	I50	4	I,62	3,83	5,45	55	I50	I	3,56	0,8	4,44
	200		I,73	3,83	5,56		200		3,8I	0,88	4,69
	250		I,8	3,83	5,63		250		3,96	0,88	4,84
	300		I,85	3,49	5,34		300		4,06	0,88	4,94
	350		I,9I	3,29	5,2		350		4,2I	0,88	5,09
	400		2	3,29	5,29		400		4,4I	0,88	5,29
	450		2,07	3,II	5,I8		450		4,55	0,88	5,43
	500		2,I2	3,II	5,23		500		4,65	0,88	5,53
30	I50	4	I,94	3,29	5,23	60	I50	I	3,89	0,88	4,77
	200	4	2,08	3,29	5,37		200	I	4,I6	0,88	5,04
	250	4	2,I6	3,29	5,45		250	2	4,32	0,72	5,04
	300	4	2,2I	3,II	5,32		300	2	4,43	0,72	5,I5
	350	4	2,3	3,II	5,4I		350	2	4,59	0,72	5,3I
	400	4	2,4	2,94	5,34		400	2	4,8I	0,72	5,53
	450	I	2,48	I,74	4,22		450	2	4,97	0,72	5,69
	500	I	2,54	I,74	4,28		500	2	5,08	0,72	5,8
35	I50	3	2,27	2,I9	4,46	65	I50	2	4,2I	0,72	4,93
	200	3	2,43	I,96	4,39		200		4,5I	0,72	5,23
	250	3	2,52	I,78	4,3		250		4,68	0,72	5,4
	300	I	2,58	I,74	4,32		300		4,8	0,72	5,52
	350	I	2,68	I,74	4,42		350		4,97	0,72	5,69
	400	I	2,8	I,74	4,54		400		5,2I	0,72	5,93
	450	I	2,9	I,36	4,26		450		5,38	0,72	6,I
	500	I	2,96	I,36	4,32		500		5,5	0,72	6,22
40	I50	3	2,59	I,87	4,46	70	I50	2	4,54	0,72	5,26
	200	3	2,77	I,67	4,44		200	2	4,85	0,72	5,57
	250	I	2,88	I,36	4,24		250	I	5,04	0,62	5,66
	300	I	2,95	I,36	4,3I		300	I	5,I7	0,62	5,79
	350	I	3,06	I,36	4,42		350	I	5,36	0,62	5,98
	400	I	3,2	I,36	4,56		400	I	5,6I	0,62	6,23
	450	I	3,3I	I,I	4,4I		450	I	5,8	0,62	6,42
	500	I	3,38	I,I	4,48		500	I	5,92	0,62	6,54
45	I50	4	2,98	I,33	4,3I	75	I50	I	4,86	0,62	5,48
	200	I	3,I2	I,36	4,48		200	I	5,2	0,62	5,82
	250	I	3,24	I,I	4,34		250	I	5,4	0,62	6,02
	300	I	3,32	I,I	4,42		300	I	5,54	0,57	6,II
	350	2	3,44	I,06	4,5		350	2	5,74	0,57	6,3I
	400	2	3,6I	I,06	4,67		400	2	6,0I	0,57	6,58
	450	2	3,73	I,06	4,79		450	2	6,2I	0,57	6,78
	500	2	3,8I	I,06	4,87		500	2	6,35	0,57	6,92
50	I50	2	3,24	I,06	4,3	80	I50	2	5,I8	0,57	5,75
	200	2	3,47	I,06	4,53		200		5,54	0,57	6,II
	250	2	3,6	I,06	4,66		250		5,76	0,57	6,33
	300	I	3,69	0,88	4,57		300		5,9	0,57	6,47
	350	I	3.83	0,88	4,7I		350		6.I2	0.57	6.69
	400	I	4,0I	0,88	4,89		400		6,4I	0,57	6,98
	450	I	4,I4	0,88	5,02		450		6,62	0,57	7,I9
	500	I	4,23	0,88	5,II		500		6,77	0,57	7,34

b = 20 см

Условия опытов			Целевые функции, руб.			Условия опытов			Целевые функции, руб.		
h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y	h, см	$R_б$	N схемы	$C_б$	$C_а$	y
25	I50	•	I,8	3,83	5,63	55	I50	I	3,96	0,88	4,84
	200		I,93	3,83	5,76		200		4,24	0,88	5,I2
	250		2	3,49	5,49		250		4,4	0,88	5,28
	300	4	2,05	3,29	5,34		300		4,5I	0,88	5,39
	350		2,I3	3,29	5,42		350		4,68	0,88	5,56
	400		2,23	3,II	5,34		400		4,9I	0,88	5,79
	450		2,3	2,94	5,24		450		5,06	0,88	5,94
	500		2,35	2,94	5,29		500		5,I7	0,88	6,05
30	I50	4	2,I6	2,88	5,04	60	I50	I	4,32	0,88	5,2
	200	4	2,3I	2,7	5,0I		200	I	4,62	0,74	5,36
	250	4	2,4	2,56	4,96		250	I	4,8	0,74	5,54
	300	4	2,46	2,27	4,73		300	2	4,92	0,72	5,64
	350	4	2,55	2,I6	4,7I		350	2	5,I	0,72	5,82
	400	I	2,67	I,74	4,4I		400	2	5,34	0,72	6,06
	450	I	2,76	I,74	4,5		450	2	5,52	0,72	6,24
	500	I	2,82	I,74	4,56		500	2	5,64	0,72	6,36
35	I50	4	2,52	2,I7	4,69	65	I50	2	4,42	0,72	5,I4
	200	4	2,7	I,9	4,6		200		5,0I	0,72	5,73
	250	4	2,8	I,66	4,46		250		5,2	0,72	5,92
	300	2	2,87	I,6	4,47		300		5,33	0,72	6,05
	350	2	2,98	I,6	4,58		350		5,53	0,72	6,25
	400	I	3,I2	I,36	4,48		400		5,79	0,72	6,5I
	450	I	3,22	I,36	4,58		450		5,98	0,72	6,7
	500	I	3,29	I,36	4,65		500		6,II	0,72	7,83
40	I50	3	2,88	I,78	4,66	70	I50	2	5,04	0,72	5,76
	200	I	3,08	I,36	4,44		200	I	5,39	0,62	6,0I
	250	2	3,2	I,27	4,47		250	I	5,6	0,62	6,22
	300	2	3,28	I,27	4,55		300	I	5,74	0,62	6,36
	350	2	3,4	I,27	4,67		350	I	5,95	0,62	6,57
	400	I	3,56	I,I	4,66		400	I	6,23	0,62	6,85
	450	I	3,68	I,I	4,78		450	I	6,44	0,62	7,06
	500	I	3,76	I,I	4,86		500	I	6,58	0,62	7,2
45	I50	2	3,24	I,27	4,5I	75	I50	I	5,4	0,62	6,02
	200	I	3,47	I,I	4,57		200	I	5,78	0,62	6,4
	250	2	3,4	I,06	4,46		250	2	6	0,57	6,57
	300	2	3,69	I,06	4,75		300	2	6,I5	0,57	6,72
	350	2	3,83	I,06	4,8		350	2	6,38	0,57	6,95
	400	2	4,0I	I,06	5,07	75	400	2	6,68	0,57	7,25
	450	2	4,I4	I,06	5,2		450	2	6,9	0,57	7,47
	500	2	4,23	I,06	5,29		500	2	7,05	0,57	7,62
50	I50	2	3,6	I,06	4,66	80	I50	2	5,76	0,57	6,33
	200	2	3,85	I,06	4,9I		200		6,I6	0,57	6,73
	250	2	4	I,06	5,06		250		6,4	0,57	6,97
	300	I	4,I	0,88	4,98		300		6,56	0,57	7,I3
	350	I	4,25	0,88	5,I3		350		6,8	0,57	7,37
	400	I	4,45	0,88	5,33		400		7,I2	0,57	7,69
	450	I	4,6	0,88	5,48		450		7,36	0,57	7,93
	500	I	4,7	0,88	5,58		500		7,52	0,57	8,09

b = 22 см

Условия опытов			Целевые функции, руб			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$	h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$
25	I50	3	I,98	3,83	5,8I	55	I50	I	4,36	0,88	5,24
	200	4	2,I2	3,83	5,95		200		4,69	0,88	5,57
	250	3	2,2	3,49	5,69		250		4,84	0,88	5,72
	300	4	2,25	3,29	5,54		300		4,96	0,88	5,84
	350	4	2,34	3,II	5,45		350		5,I4	0,88	6,02
	400	4	2,45	2,94	5,39		400		5,38	0,88	6,26
	450	4	2,53	2,8	5,33		450		5,57	0,88	6,45
	500	4	2,59	2,67	5,26		500		5,69	0,88	6,67
30	I50	4	2,38	2,88	5,26	60	I50	I	4,75	0,88	5,63
	200	4	2,54	2,54	5,08		200	I	5,08	0,74	5,82
	250	4	2,64	2,39	5,03		250	2	5,28	0,72	6
	300	4	2,7I	2,I6	4,87		300	2	5,4I	0,72	6,I3
	350	2	2,8I	I,99	4,8		350	2	5,6I	0,72	6,33
	400	I	2,94	I,74	4,68		400	2	5,87	0,72	6,59
	450	I	3,04	I,74	4,78		450	2	6,07	0,72	6,79
	500	2	3,I	I,6	4,7		500	2	6,2	0,72	6,92
35	I50	3	2,77	2,07	4,84	65	I50	2	5,I5	0,72	5,87
	200	3	2,97	I,78	4,75		200		5,5I	0,72	6,23
	250	2	3,08	I,6	4,68		250		5,72	0,72	6,44
	300	2	3,I6	I,6	4,76		300		5,86	0,72	6,58
	350	I	3,27	I,36	4,63		350		6,08	0,72	6,8
	400	I	3,43	I,36	4,79		400		6,36	0,72	7,08
	450	I	3,54	I,36	4,9		450		6,58	0,72	7,3
	500	3	3,62	I,27	4,89		500		6,72	0,72	7,44
40	I50	3	3,I7	I,5I	4,68	70	I50	2	5,54	0,72	6,26
	200	I	3,39	I,36	4,75		200	I	5,93	0,62	6,55
	250	2	3,52	I,27	4,79		250	I	6,I6	0,62	6,78
	300	2	3,6I	I,27	4,88		300	I	6,3I	0,62	6,93
	350	2	3,74	I,27	5,0I		350	I	6,55	0,62	7,I7
	400	2	3,92	I,27	5,I9		400	I	6,85	0,62	7,47
	450		4,05	I,27	5,32		450		7,08	0,62	7,7
	500		4,I4	I,27	5,4I		500		7,24	0,62	7,86
45	I50	2	3,56	I,27	4,83	75	I50	I	5,94	0,62	6,56
	200		3,8I	I,06	4,87		200	I	6,35	0,62	6,97
	250		3,96	I,06	5,02		250	2	6,6	0,57	7,I7
	300		4,06	I,06	5,I2		300	2	6,77	0,57	7,34
	350		4,2I	I,06	5,27		350	2	7,0I	0,57	7,58
	400		4,4I	I,06	5,47		400	2	7,34	0,57	7,9I
	450		4,55	I,06	5,6I		450	2	7,59	0,57	8,I6
	500		4,65	I,06	5,7I		500	2	7,76	0,57	8,33
50	I50	2	3,96	I,06	5,02	80	I50	2	6,34	0,57	6,9I
	200	2	4,24	I,06	5,3		200		6,78	0,57	7,35
	250	I	4,4	0,88	5,28		250		7,04	0,57	7,6I
	300	I	4,5I	0,88	5,39		300		7,22	0,57	7,79
	350	I	4,68	0,88	5,56		350		7,48	0,57	8,05
	400	I	4,9I	0,88	5,79		400		7,83	0,57	8,4
	450	I	5,06	0,88	5,94		450		8,I	0,57	8,67
	500	I	5,I7	0,88	6,05		500		8,27	0,57	8,84

b = 24 см

Условия опытов			Целевые функции, руб.			Условия опытов			Целевые функции, руб		
h,см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	y	h,см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	y
25	I50	4	2,I6	3,83	5,99	55	I50	I	4,75	0,88	5,63
	200		2,3I	3,49	5,8		200		5,08	0,88	5,96
	250		2,4	3,49	5,89		250		5,28	0,88	6,I6
	300		2,46	3,I	5,56		300		5,4I	0,88	6,29
	350		2,55	3,I	5,65		350		5,6I	0,88	6,49
	400		2,67	2,94	5,6I		400		5,87	0,88	6,75
	450		2,76	2,67	5,43		450		6,07	0,88	6,95
	500		2,82	2,57	5,39		500		6,2	0,88	7,08
30	I50	4	2,59	2,7	5,29	60	I50	I	5,I8	0,74	5,92
	200	4	2,77	2,54	5,3I		200	I	5,54	0,74	6,28
	250	4	2,88	2,27	5,I5		250	2	5,76	0,72	6,48
	300	2	2,95	I,99	4,94		300	2	5,9	0,72	6,62
	350	2	3,06	I,99	5,05		350	2	6,I2	0,72	6,84
	400	I	3,2	I,74	4,94		400	2	6,4I	0,72	7,I3
	450	2	3,3I	I,6	4,9I		450	2	6,62	0,72	7,34
	500	2	3,38	I,6	4,98		500	2	6,77	0,72	7,49
35	I50	3	3,02	I,96	4,98	65	I50	2	5,62	0,72	6,34
	200	4	3,23	2,07	5,3		200		6,0I	0,72	6,73
	250	2	3,36	I,6	4,96		250		6,24	0,72	6,96
	300	2	3,44	I,6	5,04		300		6,4	0,72	7,I2
	350	I	3,57	I,36	4,93		350	2	6,63	0,72	7,35
	400	I	3,74	I,36	5,I		400		6,94	0,72	7,66
	450	I	3,86	I,36	5,22		450		7,I8	0,72	7,9
	500	2	3,96	I,27	5,23		500		7,33	0,72	8,05
40	I50	2	3,46	I,6	5,06	70	I50	2	6,05	0,72	6,77
	200	2	3,7	I,27	4,97		200	I	6,47	0,62	7,09
	250	2	3,84	I,27	5,II		250	I	6,72	0,62	7,34
	300	2	3,94	I,27	5,2I		300	I	6,89	0,62	7,5I
	350	I	4,08	I,I	5,I8		350	I	7,I4	0,62	7,76
	400	I	4,27	I,I	5,37		400	I	7,48	0,62	8,I
	450	I	4,42	I,I	5,52		450	I	7,73	0,62	8,35
	500	I	4,5I	I,I	5,6I		500	I	7,9	0,62	8,52
45	I50	I	3,89	I,I	4,99	75	I50	I	6,48	0,62	7,I
	200		4,I6	I,I	5,26		200	2	6,93	0,57	7,5
	250		4,32	I,I	5,42		250	2	7,2	0,57	7,77
	300		4,43	I,I	5,53		300	2	7,38	0,57	7,95
	350		4,59	I,I	5,69		350	2	7,65	0,57	8,22
	400		4,8I	I,I	5,9I		400	2	6,0I	0,57	8,58
	450		4,97	I,I	6,07		450	2	8,28	0,57	8,85
	500		5,08	I,I	6,I8		500	2	8,46	0,57	9,03
50	I50	I	4,32	I,I	5,42	80	I50	2	6,9I	0,57	7,48
	200		4,62	I,I	5,72		200		7,39	0,57	7,96
	250		4,8	I,I	5,9		250		7,68	0,57	8,25
	300		4,92	0,88	5,8		300		7,87	0,57	8,44
	350		5,I	0,88	5,98		350		8,I6	0,57	8,73
	400		5,34	0,88	6,22		400		8,54	0,57	9,II
	450		5,52	0,88	6,4		450		8,83	0,57	9,4
	500		5,64	0,88	6,52		500		9,02	0,57	9,59

b = 25 см

Условия опытов			Целевые функции, руб.			Условия опытов			Целевые функции, руб.		
h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$	h, см	$R_б$	№ схемы	$C_б$	$C_а$	$У$
25	I50	4	2,25	3,83	6,08	55	I50	I	4,95	0,88	5,83
	200	4	2,4I	3,49	5,9		200		5,29	0,88	6,I7
	250	4	2,5	3,29	5,79		250		5,5	0,88	6,38
	300	4	2,56	3,II	5,67		300		5,64	0,88	6,52
	350	4	2,66	2,94	5,6		350		5,84	0,88	6,72
	400	4	2,78	2,8	5,58		400		6,I2	0,88	7
	450	4	2,88	2,67	5,55		450		6,33	0,88	7,2I
	500	2	2,94	2,56	5,5		500		6,46	0,88	7,34
30	I50	4	2,7	2,7	5,4	60	I50	I	5,4	0,74	6,I4
	200	3	2,89	2,52	5,4I		200	2	5,78	0,72	6,5
	250	3	3,	2,27	5,27		250	2	6	0,72	6,72
	300	2	3,08	I,99	5,07		300	2	6,I5	0,72	6,87
	350	I	3,I9	I,74	4,93		350	2	6,38	0,72	7,I
	400	I	3,34	I,74	5,08		400	2	6,68	0,72	7,4
	450	2	3,45	I,6	5,05		450	2	6,9	0,72	7,62
	500	2	3,53	I,6	5,I3		500	2	7,05	0,72	7,77
35	I50	4	3,I5	I,9	5,05	65	I50	2	5,85	0,72	6,57
	200	I	3,37	I,74	5,II		200		6,26	0,72	6,98
	250	2	3,5	I,6	5,I		250		6,5	0,72	7,22
	300	I	3,59	I,36	4,95		300		6,66	0,72	7,38
	350	I	3,72	I,36	5,08		350		6,9I	0,72	7,63
	400	I	3,89	I,36	5,25		400		7,23	0,72	7,95
	450	2	4,03	I,27	5,3		450		7,48	0,72	8,2
	500	2	4,II	I,27	5,38		500		7,64	0,72	8,36
40	I50	2	3,6	I,6	5,2	70	I50	I	6,3	0,62	6,92
	200	2	3,85	I,27	5,I2		200		6,74	0,62	7,36
	250	2	4	I,27	5,27		250		7	0,62	7,62
	300	2	4,I	I,27	5,37		300		7,I8	0,62	7,8
	350	I	4,25	I,I	5,35		350		7,44	0,62	8,06
	400	2	4,45	I,06	5,5I		400		7,79	0,62	8,4I
	450	2	4,6	I,06	5,7		450		8,05	0,62	8,67
	500	2	4,7	I,06	5,76		500		8,23	0,62	8,85
45	I50	I	4,05	I,I	5,I5	75	I50	I	8,75	0,62	9,37
	200	2	4,33	I,06	5,39		200	2	7,22	0,57	7,79
	250	2	4,5	I,06	5,56		250	2	7,5	0,57	8,07
	300	2	4,6I	I,06	5,67		300	2	7,69	0,57	8,26
	350	2	4,78	I,06	5,84		350	2	7,97	0,57	8,54
	400	2	5,0I	I,06	6,07		400	2	8,34	0,57	8,9I
	450	2	5,I8	I,06	6,24		450	2	8,63	0,57	9,2
	500	2	5,29	I,06	6,35		500	2	8,8I	0,57	9,38
50	I50	2	4,5	I,06	5,56	80	I50	2	7,2	0,57	7,77
	200	2	4,8I	I,06	5,87		200		7,7	0,57	8,27
	250	I	5	0,88	5,88		250		8	0,57	8,57
	300	I	5,I3	0,88	6,0I		300		8,2	0,57	8,77
	350	I	5,3I	0,88	6,I9		350		8,5	0,57	9,07
	400	I	5,56	0,88	6,44		400		8,9	0,57	9,47
	450	I	5,75	0,88	6,63		450		9,2	0,57	9,77
	500	I	5,88	0,88	6,76		500		9,4	0,57	9,97

ТАБЛИЦА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
I534	7I06	2836	7873	5574	7545	7590	5574	I202	77I2
6I28	8993	4I02	255I	0330	2358	6427	7067	9325	2454
6047	8566	8644	9343	9297	675I	3500	8754	29I3	I258
0806	520I	5705	7355	I448	9562	75I4	9205	C402	2427
99I5	8274	4525	5695	5752	9630	7I72	6988	0227	4264
2882	7I58	434I	3463	II78	5786	II73	0670	0820	5067
92I3	I223	4388	9760	669I	686I	82I4	88I3	06II	3I3I
84I0	9836	3899	3683	I253	I683	6988	9978	8026	675I
9974	2362	2I03	4326	3825	9079	6I87	272I	I489	42I6
3402	8I62	8226	0782	3364	787I	4500	5598	942I	38I6
8I88	6596	I492	2I39	8823	6878	06I3	7I6I	024I	3834
3825	7020	II24	7483	9I55	49I9	3209	5959	2364	2555
980I	8788	6338	5899	3309	0807	0968	0539	4205	8257
5603	I25I	6352	6467	023I	3556	2569	9446	4I74	92I9
07I4	3757	0378	8266	8864	I374	6687	I22I	0678	37I4
46I7	5652	7627	0372	8I5I	3668	I994	4402	2I24	00I6
6789	6279	7306	I856	7028	9043	7I6I	7526	69I3	6396
6705	4978	862I	I790	4433	6298	0854	9I27	3445	IIII
3840	I086	0774	924I	9297	4239	I739	7734	0II9	2436
7662	3939	2965	3273	055I	I645	8477	I877	5327	8629
7639	2868	439I	2950	7I22	7325	9727	0080	7464	7947
3237	7203	4246	7329	7936	0065	4I46	0866	49I6	8648
39I7	627I	I72I	5469	I9I4	8653	0387	2756	6073	8984
9I38	9395	6005	6423	7977	I873	7I03	4267	93I6	7206
8358	5896	6286	9242	5040	8509	294I	39I3	3028	I563
I030	5094	I745	2975	20I8	7340	6547	0207	5587	0300
6606	6305	I564	6668	7822	7I42	6564	I659	5369	I659
4533	884I	4922	9365	I36I	6692	I633	6764	0747	388I
4258	20I2	0992	0I06	I542	4760	0392	4057	0092	5202
5224	5I28	8949	7928	7267	0II6	I476	2009	I772	3860
6872	7492	7962	I867	7437	I526	35I6	9I29	4I53	8084
8638	8407	7I98	0956	0950	7753	5I44	39I4	5596	6I04
9958	7I72	5822	4224	670I	7559	4985	4856	446I	6I47
0265	3086	2996	0699	3584	9702	I665	0446	9I07	6437
8987	544I	7878	9404	0487	2939	3805	9I72	7887	5I97
5552	3529	9627	9362	6298	602I	0024	9520	9I54	0643
9383	6640	7394	9592	9903	7699	8939	9972	I257	0994
9903	4059	0332	9I09	0I82	672I	9I63	9008	2542	446I
6530	5070	7589	6928	60I4	I832	9307	5I07	I354	9257
8679	8953	83I0	2060	6277	I773	7979	674I	6033	3588
5765	4987	I639	35I2	9843	5286	3786	2384	49I9	56II
7I98	2447	67I6	029I	5585	II06	5330	0504	6346	3679
2385	0605	2678	I399	237I	7968	I2I2	9569	8650	584I
0732	8732	8660	5836	9065	4603	0029	8042	0459	0345
I642	6094	3795	2600	4532	9740	0376	4384	9203	5387
45I4	I956	72I2	0687	7632	2I06	0846	7055	4I06	9I57
8744	5580	8038	9087	7222	0424	0028	45II	3I9I	9846
3729	6225	5397	6790	2I57	34I4	6509	5204	4779	564I
8858	3I47	84I0	2783	I290	9796	8873	7585	7I85	4726
3522	560I	6I97	605I	3470	8283	5702	0I03	8726	5282

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5489	5583	3I56	0835	I988	39I2	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9255	7379	7I24	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	I0I2	8250	2633
5759	3554	5080	9074	700I	6249	3224	6368	9I02	2672
6303	6895	337I	3I96	723I	29I8	7380	0438	7547	2644
735I	5634	5323	2623	7803	8374	2I9I	0464	0696	9529
7068	7803	8832	5II9	6350	0I20	5026	3684	5657	0304
36I3	I428	I796	8447	0503	5654	3254	7336	9536	I944
5I43	4534	2I05	0368	7890	2473	4240	8652	9435	I422
98I5	5I44	7649	8638	6I37	8070	5345	4865	2456	5708
5780	I277	63I6	I0I3	2867	9938	3930	3203	5696	I769
II87	095I	599I	5245	5700	5564	7352	089I	6249	6568
4I84	2I79	4554	9083	2254	2435	2965	5I54	I209	7069
29I6	2972	9885	0275	0I44	8034	8I22	32I3	7666	0230
5524	I34I	9860	6565	698I	9842	0I7I	2284	2707	3008
0I46	529I	2354	5694	0377	5336	6460	9585	34I5	2358
4920	2826	5238	5402	7937	I993	4332	2327	6875	5230
7978	I947	6380	3425	7267	7285	II30	7722	0I64	8573
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4I9I	2976	036I	9334
I473	6938	4899	5348	I64I	3652	0852	5296	4538	4456
8I62	8797	8000	4707	I880	9660	8446	I883	9768	088I
5642	42I9	0807	330I	4279	4I68	4305	9937	3I20	5547
2042	II92	II75	885I	6432	4635	5757	6656	I660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	85I9	0I27	9233	2452	734I
4045	I730	6005	I704	0345	3275	4738	4862	2556	8333
5880	I257	6I63	4439	7276	6353	69I2	073I	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5I48
I762	87I3	II89	I090	8989	7273	32I3	I935	932I	4820
2023	2589	I740	0424	8924	0005	I969	I636	7237	I227
7965	3855	4765	0703	I678	084I	7543	0308	9732	I289
7690	0480	8098	9629	48I9	72I9	724I	5I28	3853	I92I
9292	0426	9573	4903	59I6	6576	8368	3270	664I	0033
0867	I656	70I6	4220	2533	6345	8227	I904	5I38	2537
0505	2I27	8255	5276	2233	3956	4II8	8I99	6380	6340
6295	9795	III2	576I	2575	6837	3336	9322	7403	8345
6323	26I5	34I0	3365	III7	24I7	3I76	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	54I2	8II4	0930	4697	69I9	4569
I422	5507	7596	0670	30I3	I35I	3886	3268	9469	2584
2653	I472	5II3	5735	I469	9545	933I	5303	99I4	6394
0438	4376	3328	8649	8327	0II0	4549	7955	5275	2890
285I	2I57	0047	7085	II29	0460	682I	8373	2572	8962
7962	2753	3077	87I8	74I8	8004	3425	3706	8822	I494
3837	4098	0220	I2I7	4732	0I50	I637	I097	I040	7372
8542	4I26	9274	225I	0607	430I	8730	7690	6235	3477
0I39	0765	8039	9484	2577	7859	I976	0623	I4I8	6685
6687	I943	4307	0579	8I7I	8224	864I	7034	3595	3875
6242	5582	5872	3I97	49I9	2792	599I	4058	9769	I9I8
6859	9606	0522	4993	0345	8958	I289	8825	694I	7685
6590	I932	6043	3623	I973	4II2	I795	8465	2II0	8045
3482	0478	022I	6738	7323	5643	4767	0I06	2372	9862

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящем приложении рассматриваются основные принципы оптимизации железобетонных конструкций. Здесь изложены основные понятия, приведены постановки и способы решения простейших задач, чаще всего возникающих в практике реального проектирования. Вместе с тем показано, как используемые при этом идеи развиваются для построения методов решения более общих задач оптимизации железобетонных конструкций.

Разработка методов оптимизации железобетонных конструкций была начата давно. Однако до последнего времени рассматривались лишь методы решения отдельных задач оптимизации отдельных железобетонных конструкций. Переход к новым типам конструкций, учет других видов нагрузок, уточнение методов расчета конструкций, появление дополнительных требований вызывали необходимость разработки новых методов оптимизации. В результате оказывалось, что построение решения каждой задачи оптимизации представляло собой самостоятельную достаточно сложную научно-исследовательскую проблему, которая для многих условий не могла быть решена. Большое количество разнообразных методов, разработанных различными авторами, затрудняло их использование в практике проектирования. Общего подхода к проблеме оптимизации железобетонных конструкций не существовало.

В настоящих Рекомендациях изложен общий подход, позволяющий с единых позиций подойти к решению практически любых задач оптимизации железобетонных конструкций. Для понимания предлагаемых методов, специалисту, по-видимому, достаточно иметь математическую подготовку в объеме обычного втузовского курса.

Суть задачи оптимизации железобетонных конструкций. Прежде всего поясним, в чем состоит задача оптимального проектирования железобетонных конструкций. Пусть задан тип конструкции (это может быть балка, рама, ферма, оболочка и др.). Заданы также нагрузки, действующие на конструкцию. Обычная задача проектирования состоит в создании такой конструкции заданного типа, которая воспринимает действующие на нее нагрузки, удовлетворяя всем требованиям СНиП. Как правило, решение этой задачи не однозначно: существует несколько конструкций, удовлетворяющих указанным требованиям. Задача оптимизации состоит в том, чтобы из всех воз-

можных при проектировании решений выбрать наилучшее.

Рассмотрим пример. Пусть заданным типом конструкции является железобетонный элемент прямоугольного поперечного сечения; заданная нагрузка – постоянный по величине изгибающий момент M. Будем принимать во внимание только требования СНиП по обеспечению прочности нормальных сечений элемента.

Обычная задача проектирования железобетонного элемента решается в следующем порядке. Задаются геометрические характеристики сечения элемента (его ширина b и высота h), а также характеристики материалов – марка бетона $R_б$ и класс стали R_a. Затем по формулам СНиП определяются площади сечений продольной растянутой и сжатой арматуры F_a и F'_a, обеспечивающие прочность нормальных сечений элемента. Неоднозначность решения этой задачи возникает из-за того, что значения геометрических характеристик сечения и характеристик материалов можно задавать многими различными способами. При этом каждому набору значений b, h, $R_б$, R_a можно по формулам СНиП найти соответствующие значения F_a и F'_a. Задача оптимизации железобетонного элемента состоит в том, чтобы выбрать b, h, $R_б$, R_a и соответствующие значения F_a и F'_a так, чтобы элемент был наилучшим из всех возможных.

Однако понятия "наилучший элемент", "наилучшая конструкция" требуют дальнейшего уточнения. Мы можем условиться считать конструкцию наилучшей, если она, например, имеет минимальную стоимость; в других случаях наилучшей может считаться конструкция с минимальным расходом металла, либо с минимальным расходом бетона, либо с минимальной трудоемкостью изготовления и т.п.

Таким образом, говоря о наилучшей конструкции, мы всегда будем иметь в виду определенный показатель – критерий качества. Из двух конструкций заданного типа, воспринимающих заданные нагрузки и удовлетворяющих всем требованиям СНиП, лучшей будем считать ту, у которой значение этого критерия качества меньше.

Простой перебор вариантов как простейший способ оптимизации

Простейшим способом оптимизации, широко применяемым в практике проектирования железобетонных конструкций, является простой перебор вариантов. Используя этот способ, проектировщик выбирает несколько вариантов конструкции, сравнивает их между собой по принятому критерию качества и окончательно останавливается на

том из вариантов, в котором критерий качества меньше.

Покажем, например, как этот способ применяется для оптимизации изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения. Пусть критерием качества служит стоимость элемента. Тогда назначаем несколько вариантов - значений b , h , $R_б$, R_a. В каждом варианте по формулам СНиП находим площади сечения арматуры F_a и F_a' , обеспечивающие прочность нормальных сечений. Затем вычисляем расходы материалов (бетона и арматуры) на элемент и, з н а я удельную стоимость материалов, определяем общую стоимость элемента. Окончательно выбираем элемент с минимальной стоимостью.

Преимуществами простого перебора при оптимизации железобетонных конструкций является универсальность и простота: перебор вариантов можно использовать для любых конструкций при любом критерии качества; проектирование каждого варианта не вызывает затруднений у проектировщика, поскольку проводится согласно СНиП. Если удается сравнить все возможные при проектировании варианты конструкции, то простой перебор гарантирует выбор действительно наилучшего из них.

Однако, как правило, число возможных вариантов, возникающих при проектировании конструкции, оказывается настолько большим, что сравнить их все между собой не представляется возможным. В этих случаях проявляются существенные недостатки описанного подхода. При простом переборе не определены правила выбора вариантов, в результате чего лучшие варианты могут оказаться вне рассмотрения. Кроме того, не ясно, когда нужно продолжать просмотр вариантов, а когда прекращать его. Все это при большом числе возможных вариантов делает простой перебор непригодным для практического использования.

Упорядоченный перебор вариантов, основанный на методе покоординатного спуска. Указанных недостатков во многом лишен упорядоченный перебор вариантов. Приведем один из простейших способов такого перебора, основанный на так называемом методе покоординатного спуска. Изложение этого материала выполним на интуитивном уровне. Более строго этот же материал описан в п.4.10 и примере 7 настоящих Рекомендаций. Рассматриваем такие железобетонные конструкции, при проектировании которых, как и в изгибаемом элементе прямоугольного сечения, геометрические характеристики конструкций и характеристики материалов задаются с определенным

произволом, а затем по формулам СНиП подбирается площадь сечения арматуры, обеспечивающая выполнение необходимых требований.

При простом переборе вариантов значения параметров конструкции – геометрических характеристик и характеристик материалов – от варианта к варианту меняем произвольно. Упорядоченный перебор дает совершенно определенные правила их изменения. Метод покоординатного спуска предполагает поочередное изменение параметров. Параметр изменяем (увеличиваем или уменьшаем) до тех пор, п о к а значения параметра не выходят за допустимые пределы и уменьшается критерий качества. Затем переходим к изменению следующего параметра и т.д.

Используя метод покоординатного спуска, задачу решаем в следующем порядке. Назначаем все возможные значения каждого из параметров. Проектируем наилучшим возможным образом начальный вариант: задаем значения геометрических характеристик и характеристик материалов, определяем необходимую площадь сечения арматуры, вычисляем значение критерия качества.

Нумеруем в произвольном порядке параметры конструкции. Обозначим их $x_1, \ldots, x_n$. Изменяем первый параметр x_1, сохраняя неизменными все остальные параметры $x_2, \ldots, x_n$. Мы можем этот параметр либо увеличить либо уменьшить с тем, чтобы получить лучшую конструкцию (с меньшим значением критерия качества). Заранее мы, конечно, не знаем, следует ли увеличить или уменьшить первый параметр x_1. Попытаемся вначале увеличить x_1 до ближайшего возможного значения. Проведем проектирование конструкции, определив площади сечения арматуры, вычислим критерий качества. Сравним полученное значение критерия качества с его значением в начальном варианте. При этом возможны две ситуации:

1) критерий качества уменьшился;

2) критерий качества не уменьшился (увеличился или не изменился).

Первая ситуация для нас благоприятна – увеличение x_1 привело к уменьшению критерия качества, мы получили конструкцию лучшую, чем в начальном варианте. Поэтому целесообразно продолжать увеличение первого параметра до тех пор, пока это возможно и пока уменьшается критерий качества. Каждое увеличение проводим д о ближайшего возможного значения, определяем площадь сечения арматуры, вычисляем критерий качества. Оставляем для рассмотрения

вариант с минимальным значением критерия качества. Переходим к изменению второго параметра x_2.

Вторая ситуация для нас не благоприятна – увеличение x_1 привело к увеличению критерия качества или не изменило его, мы получили конструкцию не лучшую, чем в начальном варианте. Поэтому пытаемся получить лучшую конструкцию, уменьшая параметр x_1 до ближайшего возможного значения. Проводим проектирование конструкции, вычисляем значение критерия качества, сравниваем его со значением в начальном варианте. Здесь опять возможны две указанные выше ситуации.

В первой ситуации (уменьшение параметра x_1 привело к уменьшению значения критерия качества) продолжаем уменьшать x_1 до тех пор, пока это возможно и пока уменьшается критерий качества. Переходим к изменению второго параметра x_2. Во второй ситуации (уменьшение параметра x_1 не уменьшило критерия качества) оставляем значение x_1 таким же, как в начальном варианте. Переходим к изменению второго параметра x_2. Во всех случаях для дальнейшего рассмотрения оставляем вариант с минимальным значением критерия качества.

Далее совершенно аналогично изменяем параметры $x_2,\ldots,x_n$, сравнивая получаемые значения критерия качества с его значением в оставленном для рассмотрения варианте. После этого вновь изменяем параметры $x_1,\ldots,x_n$ и т.д. Оптимизация заканчивается, когда ни увеличение, ни уменьшение параметров $x_1,\ldots,x_n$ до ближайших возможных значений не приводит к уменьшению критерия качества. Окончательно выбирается конструкция с минимальным значением критерия качества.

Приведем пример. Оптимизируем уже рассмотренный нами выше изгибаемый железобетонный элемент прямоугольного поперечного сечения. Критерием качества является стоимость элемента, имеющего длину I м. На элемент действует изгибающий момент М=85 кН.м. В процессе оптимизации каждый из параметров элемента – его ширину b, высоту h, марку бетона $R_б$ – можно задавать равным одному из следующих значений:

b –10,12,14,15,16,18,20,22,24,25 см;

h –25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80 см;

$R_б$ –150,200,250,300,350,400,450,500.

Арматура выполняется из стали класса А–II.

Вариант проектирования элемента состоит в следующем. Задаем

набор возможных значений параметров элемента b, h, $R_б$. По формулам СНиП определяем необходимую площадь сечения продольной арматуры, обеспечивающую прочность элемента. Вычисляем стоимость.

Параметры b, h, $R_б$ могут принимать соответственно 10, 12 и 8 возможных значений. При полном переборе необходимо рассмотреть 10·12·8=960 вариантов проектирования элемента. Все эти варианты приведены в прил.6 настоящих Рекомендаций. Стоимость элемента обозначена через y. Более подробно условия примера, процесс проектирования одного варианта и форма представления результатов в прил.6 приведены в п.I.7 настоящих Рекомендаций.

Мы покажем, как с помощью описанного выше упорядоченного перебора вариантов, основанного на методе покоординатного спуска, число рассматриваемых при оптимизации вариантов можно значительно сократить по сравнению с полным перебором. При вычислениях используем результаты полного перебора, приведенные в прил.6, где для каждого возможного варианта проведены все необходимые вычисления и определено значение стоимости y. Поэтому при оптимизации достаточно задаться набором значений параметров b, h, $R_б$ и выписать из прил.6 значение y. Результаты вычислений представлены в табл.62.

Вначале проектируем начальный вариант, задавая для него b =20 см; h =45 см; $R_б$=200, т.е. набор значений b, h, $R_б$ равен 20,45,200. Для этого набора по прил.6 y =4,57 руб. Нумеруем параметры b, h, $R_б$, обозначая их соответственно через x_1, x_2, x_3. Начальный вариант обозначим №I. Запишем его в первой строке таблицы 62.

Увеличиваем параметр x_1 по сравнению с его значением в начальном приближении до ближайшего возможного значения, равного 22 см. Из прил.6 находим, что набору параметров 22,45,200 соответствует стоимость y =4,87 руб., т.е. по сравнению с начальным вариантом (y =4,57 руб.) стоимость увеличилась. Это вариант №2, и он соответствует второй ситуации. Поэтому в варианте №3 уменьшаем параметр x_1 по сравнению с начальным вариантом до ближайшего возможного значения, принимая x_1=I8 см. Набору параметров I8, 45,200 соответствует стоимость y =4,48 руб., т.е. по сравнению с начальным приближением стоимость уменьшилась. Таким образом, в этом случае возникает первая ситуация. Продолжаем уменьшать параметр x_1, принимая его значения равными I6,I5,I4,I2,I0 см (ва-

рианты №3-8). В каждом из этих вариантов получаем уменьшение стоимости по сравнению с предыдущим. Значение x_1=10 см является минимально возможным. Поэтому изменение параметра x_1 прекращаем. Начинаем изменять параметр x_2.

Таблица 62. Пример применения упорядоченного перебора вариантов, основанного на методе покоординатного спуска

№ варианта	Параметры			Критерий качества, руб.	№ варианта	Параметры			Критерий качества, руб.
	$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$			$x_1(b)$ см	$x_2(h)$ см	$x_3(R_б)$	
I	20	45	200	4,57	9	I0	50	200	3,39
2	22	45	200	4,87	I0	I0	40	200	-
3	I8	45	200	4,48	II	I0	45	250	3,34
4	I6	45	200	4,I3	I2	I0	45	300	3,24
5	I5	45	200	3,89	I3	I0	45	350	3,57
6	I4	45	200	3,5I	I4	I2	45	300	3,57
7	I2	45	200	3,59	I5	I0	50	300	3,38
8	I0	45	200	3,37	I6	I0	40	300	3,6I

Вариант №9 при x_2=50 см дает увеличение стоимости. Уменьшение параметра (вариант №I0, X_2=40 см) приводит к тому, что арматура, необходимая для обеспечения прочности элемента, не размещается в сечении, т.е. элемент с набором параметров I0,40,200 существовать не может. Оставляем x_2=45 см без изменений. Далее переходим к изменению параметра x_3 - опыты II,I2,I3 и т.д. Процесс заканчивается, когда ни увеличение, ни уменьшение ни одного из параметров не приводит к уменьшению стоимости элемента.

Мы рассмотрели случай, когда оптимизация проводится с учетом требований только лишь первой группы предельных состояний. Требованиям второй группы предельных состояний удовлетворяем следующим образом. После подбора арматуры из условий прочности в каждом варианте проверяем условия жесткости и трещиностойкости. Если эти условия выполняются, оставляем вариант без изменений. Если же хотя бы одно из условий не выполняется, увеличиваем последовательно площадь сечения арматуры до тех пор, пока начнут выполняться все условия. В том случае, когда сделать это не удается, изменение соответствующего параметра прекращаем и переходим к изменению следующего параметра.

Обратим внимание на то, что при проектировании железобетонного изгибаемого элемента по формулам СНиП мы получаем минимальную площадь сечения продольной арматуры, обеспечивающую прочность нормальных сечений. Удовлетворяя условиям жесткости и трещиностойкости, мы также ищем минимальную площадь сечения арматуры, удовлетворяющую этим требованиям. Аналогично, задавая геометрию сечения и характеристики материалов рассматриваемого элемента, мы по формулам СНиП имеем возможность найти минимальную площадь поперечной арматуры, обеспечивающей прочность наклонных сечений.

Упорядоченный перебор вариантов в изложенном выше виде применим для оптимизации тех железобетонных конструкций, в которых, как и в изгибаемом железобетонном элементе прямоугольного сечения, по формулам СНиП определяются минимальные площади сечения продольной и поперечной арматуры, обеспечивающие прочность соответствующих сечений. К таким конструкциям относятся, например, изгибаемые, внецентренно сжатые, растягиваемые элементы и др. Пользуясь упорядоченным перебором вариантов, основанным на методе покоординатного спуска, читатель сможет решать задачи оптимизации указанных конструкций.

Однако при оптимизации могут возникнуть задачи, решение которых не укладывается в приведенную выше схему. Например, для многих конструкций СНиП не дает формул, позволяющих подобрать минимальную площадь сечения арматуры, обеспечивающую выполнение необходимых требований, а существует только поверочный расчет: заранее задавшись значениями всех параметров (в том числе площадями сечений арматуры), можно затем проверить, выполняются ли необходимые требования. Это относится к конструкциям, работающим на косой изгиб, косое внецентренное сжатие, кручение с изгибом и др. Упорядоченный перебор вариантов на основе метода покоординатного спуска не всегда находит оптимальное решение и пр.

Для таких задач необходимо обобщить описанный метод упорядоченного перебора вариантов. Цель обобщения заключается в т о м, чтобы, как и в рассмотренном примере, использовать при оптимизации готовые (ранее разработанные) расчеты железобетонных конструкций. В этом случае процесс оптимизации будет состоять из ряда вариантов, в каждом из которых конструкция рассчитывается ранее разработанным методом. Перебор вариантов проводится упорядоченно,

в соответствии с определенными правилами.

Основная идея обобщения состоит в следующем. Все параметры конструкции мы делим на две группы. Параметры первой группы называются внутренними; они соответствуют площадям сечений арматуры F_a и F_a' изгибаемого элемента. Параметры второй группы называются внешними; они соответствуют геометрическим характеристикам и характеристикам материалов b, h, $R_б$, R_a в изгибаемом элементе. В общем случае, так же как и при оптимизации изгибаемого элемента, мы выполняем расчеты ряда вариантов. В каждом варианте задаем значения внешних параметров и отыскиваем такие значения внутренних параметров, при которых критерий качества принимает минимальное значение. Эту задачу мы называем внутренней задачей оптимизации. Задача отыскания наилучшего значения внешних параметров называется внешней задачей оптимизации.

При оптимизации железобетонного изгибаемого элемента внутренняя задача оптимизации (отыскание минимальных значений F_a и F_a') решалась непосредственно по СНиП. А для решения внешней задачи оптимизации (отыскания наилучших b, h, $R_б$) мы использовали упорядоченный перебор вариантов на основе метода покоординатного спуска.

Как указывалось, описанный упорядоченный перебор вариантов не всегда обеспечивает отыскание действительно наилучших значений внешних параметров. Поэтому в настоящих Рекомендациях приведены различные методы решения внешней задачи оптимизации. Приведены также и методы решения внутренней задачи оптимизации для различных конструкций.

Общий принцип оптимизации, основанный на разделении параметров на две группы и на решении внутренней и внешней задач оптимизации, называется принципом разделения параметров. Ниже мы рассмотрим основные понятия, необходимые для более строгого изложения принципа, а также постановку и методы решения различных задач оптимизации железобетонных конструкций.

Целевая функция, переменные параметры, ограничения. Выше отмечалось, что, говоря о наилучшей конструкции, мы всегда будем иметь в виду определенный критерий качества. Тот критерий качества, по которому проводится оптимизация конструкции называется целевой функцией. При оптимизации изгибаемого элемента прямоугольного сечения (табл.62) целевой функцией была стоимость.

Кроме стоимости, целевыми функциями могут быть приняты расходы бетона и металла, трудоемкость, энергоемкость и пр.

Параметры конструкции, которые можно менять в процессе оптимизации, называются переменными параметрами. Параметры конструкции, не меняющиеся в процессе оптимизации, называются постоянными параметрами.

В общем случае переменными параметрами при оптимизации железобетонных конструкций являются общие геометрические размеры конструкций и геометрические размеры отдельных элементов, марки бетона, классы стали, площади сечений арматуры (обычной и преднапряженной, растянутой и сжатой, продольной и поперечной), величины натяжения преднапрягаемой арматуры, число арматурных стержней, количество каркасов и т.п.

При оптимизации изгибаемого железобетонного элемента переменными параметрами были b , h , $R_б$, F_a, F'_a , постоянным параметром был принят R_a.

Записываемые в виде неравенств требования, предъявляемые к конструкции (условия прочности, жесткости, трещиностойкости и пр.) называются ограничениями на переменные параметры. Например, ограничениями являются требования к ширине раскрытия трещин $a_т \leqslant [a_т]$ и требования к жесткости $f \leqslant [f]$. В ограничения такого типа входят несколько переменных параметров, значения которых используются при определении величин $a_т$ и f . Могут быть ограничения и другого типа, в которые входит только один переменный параметр, например $b_{min} \leqslant b \leqslant b_{max}$, где b_{min} и b_{max} соответственно минимальные и максимальные значения переменного параметра b .

При оптимизации железобетонного изгибаемого элемента ограничениями служили следующие неравенства:

$$M \leqslant M_c; \qquad 10 \text{ см} \leqslant b \leqslant 25 \text{ см}; \qquad (9I)$$
$$25 \text{ см} < h < 80 \text{ см}; \quad 150 \leqslant R_б \leqslant 500,$$

где M и M_c – соответственно моменты, действующий и воспринимаемый сечением элемента.

В первое из ограничений входят все переменные параметры b , h , $R_б$, F_a, F'_a , в остальные ограничения – по одному переменному параметру.

Целевую функцию обозначим через y , переменные параметры – через $x_1, \ldots, x_i$ Целевая функция зависит от переменных парамет-

ров: при каждом фиксированном наборе переменных параметров можно вычислить значение целевой функции.

Ограничения в общем виде запишем как L неравенств:

$$f_i(x_1, \ldots, x_p) \leq 0; \quad i = 1, \ldots, L. \qquad (92)$$

Тогда задачу оптимизации железобетонных конструкций сформулируем так: требуется найти такие значения переменных параметров $x_1, \ldots, x_l$, которые удовлетворяют ограничениям (92) и при которых целевая функция принимает минимальное значение.

При оптимизации изгибаемого железобетонного элемента требовалось найти такие значения переменных параметров b, h, $R_б$, F_a, F_a', при которых стоимость элемента минимальна и удовлетворяются ограничения (91).

Некоторые типы задач оптимизации железобетонных конструкций

Если задача оптимизации связана с минимизацией одного критерия качества, т.е. она однокритериальна, то целевая функция такой задачи называется скалярной. Введенное выше обозначение относилось к скалярной целевой функции. В практике проектирования может возникнуть случай, когда одновременно требуется минимизировать несколько критериев качества - стоимость, расход металла, расход бетона, трудоемкость и пр., т.е. задача многокритериальна. В этом случае целевая функция называется векторной и обозначается $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, где $y_1, \ldots, y_p$ - скалярные целевые функции, число которых равно p.

Для изгибаемого железобетонного элемента однокритериальная задача может состоять в минимизации стоимости, а многокритериальная - в одновременной минимизации стоимости, расхода бетона и расхода металла.

Методы решения однокритериальных задач оптимизации изложены в разд.3-5, методы решения многокритериальных задач - в разд.6 настоящих Рекомендаций.

При решении задач оптимизации могут встретиться два случая: целевая функция имеет один или несколько минимумов. В первом случае задача называется одноэкстремальной, во втором - многоэкстремальной. Методы решения многоэкстремальных задач рассмотрены в разд.5 настоящих Рекомендаций.

Проектировщику обычно заранее не известно, является ли решаемая им задача одноэкстремальной или многоэкстремальной. В этом случае рекомендуется поступать следующим образом. Если оптимизи-

руемая конструкция принадлежит к хорошо изученному классу и есть уверенность, что начальный вариант задается близко к оптимуму, то следует отнести задачу к одноэкстремальной. В противном случае задача считается многоэкстремальной.

Кроме задач оптимального проектирования отдельных железобетонных конструкций, в практике типового проектирования встречаются задачи оптимизации совокупности однотипных конструкций - задачи оптимизации номенклатур (или каталогов) типовых железобетонных изделий. При решении этих задач требуется определить оптимальное число типоразмеров и марок в номенклатуре, оптимальную градацию нагрузок, выбрать оптимальные характеристики каждого типоразмера и марки. Задачи оптимального проектирования номенклатур типовых железобетонных изделий рассмотрены в разд.7 настоящих Рекомендаций.

Принцип разделения параметров как общий подход к решению задач оптимизации железобетонных конструкций. В разд.3-7 настоящих Рекомендаций изложен общий подход, с помощью которого можно провести оптимизацию практически любых железобетонных конструкций, при любой целевой функции, при любых нагрузках, с учетом всех требований СНиП. Этот подход основан на принципе, названном принципом разделения параметров.

Мы уже говорили об основной идее принципа разделения параметров. Поясним теперь ее более подробно. Сначала введем общие определения, затем поясним их на примере изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения.

Все переменные параметры оптимизируемой конструкции делятся на две группы. К первой, как правило, относятся параметры, связанные с общими геометрическими размерами конструкции и геометрическими размерами бетонных сечений, а также с характеристиками материалов; ко второй - параметры, связанные с армированием. Параметры первой группы называются внешними, параметры второй группы - внутренними. Внешние переменные параметры обозначаются $x_1,\dots, x_n$; внутренние $x_{n+1},\dots,x_l$, т.е. общее число переменных параметров равно l , число внешних переменных параметров равно n , число внутренних переменных параметров $l-n$.

Все ограничения, накладываемые на переменные параметры и выражаемые неравенствами (92), также делятся на две группы - внешние и внутренние ограничения. Ограничения, содержащие т о л ь к о

внешние переменные параметры, называются внешними. Ограничения, содержащие как внутренние, так и внешние (или только внутренние) переменные параметры, называются внутренними.

Сформулированная выше общая задача оптимизации железобетонных конструкций делится на две подзадачи, которые называются внешней и внутренней задачами оптимизации. Внутренняя задача оптимизации состоит в определении таких значений внутренних переменных параметров, при которых выполняются внутренние ограничения и достигает минимума целевая функция. Внешние переменные параметры при этом фиксируются.

Внешней задачей оптимизации называется задача определения таких значений внешних переменных параметров, которые удовлетворяют внешним ограничениям, и из всех решений внутренних задач оптимизации выбирается решение с минимальным значением целевой функции.

Внешнюю задачу оптимизации решаем, проводя ряд опытов. Опытом называется совокупность следующих операций: фиксирование внешних переменных параметров; проверка внешних ограничений (если внешние ограничения не выполняются, проведение опыта прекращаем); решение внутренней задачи оптимизации; вычисление целевой функции.

Выполненная нами в табл.62 оптимизация железобетонного изгибаемого элемента фактически проводилась на основе принципа разделения параметров. В элементе были приняты 5 переменных параметров b , h , $R_б$, F_a, F'_a . Геометрические характеристики и марка бетона b , h , $R_б$ являлись внешними переменными параметрами, площади сечений растянутой и сжатой арматуры F_a, F'_a – внутренними переменными параметрами. Внутренним ограничением служило неравенство $M \leqslant M_c$, содержащее как внешние, так и внутренние переменные параметры. Внешними ограничениями служили три последних двойных неравенства из(9I) в которые входили только внешние переменные параметры.

Внутренняя задача оптимизации состояла в определении минимальных значений F_a, F'_a, обеспечивающих прочность элемента (т.е. выполнение ограничения $M \leqslant M_c$), и решалась по формулам СНиП. При решении внутренней задачи оптимизации значения внешних переменных параметров b , h , $R_б$ фиксировались.

Внешняя задача оптимизации состояла в определении таких значений внешних переменных параметров b , h , $R_б$, которые удов-

летворяли внешним ограничениям и из всех решений внутренних задач оптимизации выбирали решение с минимальной стоимостью. Внешняя задача оптимизации решалась с помощью упорядоченного перебора вариантов, основанного на методе покоординатного спуска.

Процесс решения внешней задачи оптимизации заключается в выполнении ряда опытов, которые мы называли вариантами. В каждом опыте мы фиксировали значения внешних переменных параметров b, h, $R_б$, решали внутреннюю задачу оптимизации, определяя F_a и F_a', вычисляли целевую функцию – стоимость.

Чтобы решить внешнюю задачу оптимизации, нужно проводить опыты, меняя в них значения внешних переменных параметров (в каждом опыте фиксируется другой набор значений внешних переменных параметров). Изменение внешних переменных параметров от опыта к опыту проводим в соответствии со специальными правилами – алгоритмами решения внешней задачи оптимизации. Алгоритм состоит из ряда шагов. На каждом шаге, фиксируя определенные значения внешних переменных параметров, мы проводим опыт, в результате которого вычисляем значение целевой функции. Затем переходим к выполнению следующего шага алгоритма, в котором значения внешних переменных параметров задаются в зависимости от предыдущих значений внешних переменных параметров, а также от того, уменьшилась или увеличилась целевая функция по сравнению с ее значениями в ранее проведенных опытах. Различные алгоритмы решения внешней задачи оптимизации железобетонных конструкций приведены в разд.3–5 настоящих Рекомендаций.

Значения внешних переменных параметров в первом опыте, называемом начальным приближением, задаем наилучшим возможным образом, используя имеющиеся аналоги или интуитивно.

Одним из алгоритмов решения внешней задачи оптимизации является упорядоченный перебор вариантов, основанный на методе покоординатного спуска. Решая внешнюю задачу оптимизации изгибаемого железобетонного элемента (табл.62), мы начинали с того, что наилучшим возможным образом задавали для начального приближения значения внешних переменных параметров $x_1(b)$, $x_2(h)$, $x_3(R_б)$. Затем решали внутреннюю задачу оптимизации, определяя $x_4(F_a)$ и $x_5(F_a')$ и вычисляли значение целевой функции (стоимость). После этого в соответствии с алгоритмом метода покоординатного спуска фиксировали другой набор значений внешних переменных параметров

b, h, $R_б$, вновь решали внутреннюю задачу оптимизации, вычисляли целевую функцию и т.д. Таким образом, процесс поиска оптимального решения сводился к последовательно выполняемым решениям внутренней задачи оптимизации при различных значениях внешних переменных параметров. Внутренняя задача оптимизации решалась по СНиП. Поэтому и процесс оптимизации сводился к ряду расчетов, выполняемых по СНиП.

В других случаях ситуация оказывается аналогичной рассмотренной: основой решения внутренней задачи оптимизации является ранее разработанный расчет железобетонной конструкции или метод ее оптимизации по части параметров.

Способы построения решений внутренней и внешней задач оптимизации железобетонных конструкций изложены в разд.2 настоящих Рекомендаций. Там же изложены понятия, необходимые для построения алгоритмов решений внешней задачи оптимизации – округление и нормирование внешних переменных параметров, движение.

В задачах оптимизации железобетонных конструкций внешние переменные параметры часто задаются не непрерывно, а дискретно. Например, в изгибаемом железобетонном элементе значения ширины задавались дискретным рядом значений b =I0,I2,I4,I5,I6... см.

В алгоритмах решения внешней задачи оптимизации мы используем операцию округления обозначаемую Ок; с помощью этой операции значение внешнего переменного параметра, не совпадающее с его значением из дискретного ряда, округляется до ближайшего возможного. Например, для ширины изгибаемого железобетонного элемента Ок(I3,6)=I4.

Нормирование внешних переменных параметров – это приведение их к безразмерному виду. Нормирование необходимо для того, чтобы обеспечить удовлетворительную работу некоторых алгоритмов решения внешней задачи оптимизации. Например ширину b изгибаемого железобетонного элемента при b =I0,I2,I4,I6,... см можно нормировать по формуле

$$\bar{x}_I = (x_I - I0)/2, \qquad (93)$$

где x_I – значение внешнего переменного параметра из дискретного ряда возможных значений; $\bar{x}_I$ – соответствующее ему нормированное значение параметра; I0 – минимально возможное значение параметра из дискретного ряда возможных значений; 2 – шаг изменения параметра.

Набор значений внешних переменных параметров, который фикси-

руется в опытах, будем называть вектором или точкой. Вектор, или точка обозначаются так: $X = (x_I, \ldots, x_n)$.

Набор значений нормированных внешних переменных параметров называется нормированным вектором и обозначается

$$\bar{X} = (\bar{x}_I, \ldots, \bar{x}_n).$$

В формуле (93) минимально возможное значение ширины $b = 10$ см принято за начало отсчета: при $b = 10$ см нормированное значение параметра $\bar{x}_I = 0$. Набор значений внешних переменных параметров, принятых за начало отсчета, называется началом координат. Начало координат обозначается так: $x^{(o)} = (x_I^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$.

Геометрически можно представить, что значения каждого внешнего переменного параметра x_i откладываются на луче, начало которого совпадает со значением $x_i^{(o)}$. Совокупность таких лучей для всех внешних переменных параметров образует систему координат. Если начало координат $x^{(o)}$ не меняется в процессе решения внешней задачи оптимизации, то система координат называется глобальной. Если при решении внешней задачи оптимизации начало координат меняет свое положение, то такая система координат называется локальной.

Составной частью многих алгоритмов решения внешней задачи оптимизации является движение. Для движения необходимо в какой-либо системе координат задавать точку начала движения $x = (x_I, \ldots, x_n)$ и вектор $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$, который называется направляющим вектором. При движении опыты проводятся в точках $O_k(x_I + \lambda \bar{s}_1, \ldots, x_n + \lambda \bar{s}_n)$, т.е. значения всех внешних переменных параметров, образующих направляющий вектор, умножаются на одно и то же число λ, полученное значение прибавляется к значению параметра в точке начала движения, и проводится округление полученных значений до ближайших возможных; в результате получается точка, в которой проводится опыт. При движении опыты проводим, меняя коэффициент λ.

Порядок оптимизации на основе принципа разделения параметров. Из вышеизложенного следует, что оптимизацию на основе принципа разделения параметров мы выполняем в следующем порядке:

1. Назначаем целевую функцию и переменные параметры.
2. Устанавливаем ограничения на переменные параметры.
3. Делим переменные параметры и ограничения на внешние и вну

тренние.

4. Делим общую задачу оптимизации на две подзадачи – внешнюю и внутреннюю.

5. Выбираем способы решения внутренней и внешней задач оптимизации.

6. Задаем наилучшим возможным образом начальное приближение .

7. Выполняем решение задачи.

Выше отмечалось, что оптимизация изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения выполнялась на основе принципа разделения параметров. Проследим порядок оптимизации в соответствии с приведенной схемой.

I. Целевой функцией была принята стоимость, переменными параметрами b , h , $R_б$, F_a, F_a' .

2. Ограничения на переменные параметры представлены неравенствами (9I).

3. Внешними переменными параметрами являлись b , h , $R_б$, внутренними – F_a, F_a' .

4. Внутренняя задача оптимизации состояла в определении минимальных значений F_a и F_a' при фиксированных значениях b , h , $R_б$. Внешняя задача оптимизации состояла в определении оптимальных значений b , h , $R_б$.

5. Внутренняя задача оптимизации решалась по СНиП. Внешняя задача оптимизации решалась с помощью упорядоченного перебора вариантов, основанного на методе покоординатного спуска.

6. Начальное приближение назначалось интуитивно и представлено в первой строке табл.62.

7. Решение задачи выполнено в табл.62.

Методы и алгоритмы решения задач оптимизации железобетонных конструкций. Дадим общую характеристику методов и алгоритмов решения задач оптимизации железобетонных конструкций, приведенных в настоящих Рекомендациях.

В разд.3 настоящих Рекомендаций изложены алгоритмы решения внешней задачи оптимизации, основанные на теории планирования экстремальных экспериментов. Используя эти алгоритмы, мы аппроксимируем (т.е. приближаем) зависимость между целевой функцией и внешними переменными параметрами линейной функцией

$$y = b_0 + b_1\bar{x}_1 + \ldots + b_n\bar{x}_n.$$

Для определения коэффициентов b_i (i=0,I,...,n) используются раз-

личные линейные планы. Линейные планы – это таблицы, или матрицы, каждая строка которых определяет набор значений внешних переменных параметров в опыте. Число строк в таблице равно числу опытов. Приведены следующие линейные планы – Бокса-Уилсона, Плакетта-Бермана, односторонние градиентные планы I и II, центральные градиентные планы. Эти планы отличаются друг от друга видом таблиц и формул, по которым находятся коэффициенты b_i. После получения коэффициентов b_i линейной функции проводится движение с направляющим вектором $(-b_1,-b_2,\ldots,-b_n)$. Этот вектор называется антиградиентом; он характеризует направление быстрейшего убывания целевой функции.

В разд.4 настоящих Рекомендаций изложены алгоритмы решения внешней задачи оптимизации железобетонных конструкций на основе методов безусловной минимизации. Для построения алгоритмов использованы шесть методов, которые носят следующие названия: овражный, сопряженного градиента, покоординатного спуска, поиска по образцу, вращающихся координат и поиска по деформируемому многограннику. Алгоритмы отличаются друг от друга порядком изменения внешних переменных параметров от опыта к опыту. При описании каждого из алгоритмов перечислены основные операции алгоритма и рассмотрены особенности его применения.

Многочисленные исследования показали, что не существует алгоритма, наилучшего для всех задач. Принцип разделения параметров дает возможность использовать комбинации различных алгоритмов. Если какой-либо алгоритм после ряда успешных шагов перестает улучшать целевую функцию, то можно продолжать оптимизацию, используя второй, третий и т.д. алгоритмы, либо на каком-то этапе вновь вернуться к первому алгоритму. Таким образом, практически всегда удается решить одноэкстремальную задачу оптимизации. Процесс поиска можно прекратить, если затраты на оптимизацию превышают получаемую экономию.

Для решения многоэкстремальных задач оптимизации железобетонных конструкций в разд.5 разработаны методы глобального поиска. Они основаны на случайном поиске. При случайном поиске значения внешних переменных параметров в опытах задаются случайно. Для этого может быть использована таблица случайных чисел (см.прил.7 настоящих Рекомендаций), в которой приведены цифры от 0 до 9, причем выбор каждой из этих цифр равновероятен. Таким образом, как-

дая из цифр от 0 до 9 составляет примерно одну десятую часть всех цифр таблицы.

С помощью цифр из таблицы случайных чисел составляются случайные числа, равномерно распределенные от 0 до I. Эти числа записываются в виде десятичной дроби $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_K$, где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_K$ - цифры из таблицы случайных чисел. Например, одно из чисел может иметь вид 0,304, где 3,0,4 - цифры из таблицы случайных чисел.

Случайные числа могут быть получены на ЭВМ с помощью специальных алгоритмов. Один из таких алгоритмов приведен в разд. 5.

Случайные числа используются для назначения случайных (т. е. непредвзятых) наборов внешних переменных параметров. Например, пусть требуется равновероятно выбрать два значения I0 и I2 переменного параметра X_I. Это можно сделать так. Выберем случайное число $a = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_K$ из таблицы случайных чисел. Если $a < 0,5$, то примем X_I=I0; если $a \leq 0,5$, то примем X_I=I2. Поскольку вероятность того, что число a окажется меньше 0,5 или окажется больше или равным 0,5 одинакова, то одинакова и вероятность выбора значений параметра X_I, равных I0 или I2.

В разд.5 приведены два алгоритма глобального поиска. Первый алгоритм, основанный на равномерном законе распределения, выбирает значения внешних переменных параметров равновероятно. Второй алгоритм, основанный на нормальном законе распределения, чаще выбирает точки, расположенные ближе к точке с минимальным значением целевой функции.

Перейдем к рассмотрению многокритериальных задач оптимизации железобетонных конструкций. Их можно решать, используя два пути. Первый путь состоит в том, что мы все скалярные критерии $y_1,\ldots,y_p$, входящие в векторный $\vec{y}$, сводим к одному скалярному, или, как говорят, сворачиваем векторный критерий в скалярный. В этом случае задача становится однокритериальной, и для ее решения используются изложенные выше методы.

Используя второй путь решения, мы не сворачиваем векторный критерий в скалярный. В этом случае возникает вопрос - что считать минимальным значением векторного критерия: ведь при уменьшении одних скалярных критериев, входящих в векторный, другие могут возрастать. Например, если для изгибаемого железобетонного элемента в векторный критерий качества входят два скалярных — расходы бетона и стали, то при стремлении уменьшить расход бето-

на возрастает расход стали, а при уменьшении расхода стали возрастает расход бетона. Поэтому необходимо найти какой-то компромисс.

В разд.6 настоящих Рекомендаций рассматриваются различные возможные компромиссы - подходы к решению многокритериальных задач, когда векторный критерий качества не сворачивается в скалярный. Используются методы оптимизации на множестве Парето и при известных минимальных значениях критериев, методы пороговой оптимизации и уступок, принцип справедливого компромисса. Даны рекомендации по применению различных подходов.

При решении многокритериальных задач оптимизации железобетонных конструкций часто полезно выделять множество Парето, т. е. множество таких точек, которые лучше всех других точек (не входящих в множество Парето) сразу по всем скалярным критериям, образующим векторный. Пусть, например, нужно выделить множество Парето из четырех точек, в которых векторный критерий состоит из двух скалярных и имеет следующие значения: (6,I20); (3,I60); (I2, I00); (7,I22). Например, в первой точке значение первого и второго скалярных критериев, образующих векторный, равны соответственно 6 и I20. Наша задача состоит в том, чтобы найти точки с минимальными значениями скалярных критериев.

Сравним между собой первую и четвертую точки. В первой точке значения обоих скалярных критериев меньше, чем в четвертой: 6<7; I20<I22, т.е. четвертая точка явно хуже первой. Сравним первую и вторую точки. В этом случае значения первого критерия меньше во второй точке (3<6), а значение второго критерия - в первой точке (I20<I60). Поэтому нельзя сказать, какая точка лучше, и обе они входят в множество Парето. Аналогичная ситуация возникает при сравнении третьей точки с первыми двумя: 6<I2 и 3<I2, но I00<I20 и I00<I60. Поэтому третья точка также входит в множество Парето. Таким образом, в данном случае в множество Парето входят три точки - первая, вторая и третья.

В разд.6 настоящих Рекомендаций приведен алгоритм выделения множества Парето, использующий понятия предпочтения и эквивалентности. Точка $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ считается более предпочтительной, чем $x^{(2)}=(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})$, если в точке $x^{(1)}$ все скалярные критерии, образующие векторный, меньше или равны соответствующим скалярным критериям в точке $x^{(2)}$, причем хотя бы один скалярный критерий в

точке $x^{(1)}$ должен быть обязательно меньше соответствующего скалярного критерия в точке $x^{(2)}$. Если же все скалярные критерии в точке $x^{(1)}$ равны соответствующим скалярным критериям в точке $x^{(2)}$, то точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ считаются эквивалентными. Например, из рассмотренных четырех точек точка со значением векторного критерия (6,I20) более предпочтительна, чем точка со значением векторного критерия (7,I22). Если же сравнивать точки со значениями векторных критериев (6,I20); (3,I60); (I2,I00), то ни одна из них не оказывается более предпочтительной по сравнению с другой. Таким образом, множество Парето можно определить как множество точек, для которых не существует более предпочтительных. В точках множества Парето должны, конечно, выполняться внешние и внутренние ограничения.

Рассматриваются три принципа выделения оптимальной точки из множества Парето - чебышевский, интегральный и дифференциальный. Для использования этих принципов скалярные критерии нормируют: делят каждый скалярный критерий на минимальное значение, выбирая его из всех значений, встречающихся в точках множества Парето. Например, для входящих в множество Парето точек (6,I20); (3,I60); (I2,I00) нормирование производится следующим образом: (6/3; I20/I00)=(2;I,2); (3/3; I60/I00)=(I; I,6); (I2/3;I00/I00)=(4;I).

Теперь каждый векторный критерий можно оценивать одним числом. Согласно чебышевскому принципу оптимизации минимизируется максимальный из нормированных скалярных критериев, согласно дифференциальному принципу - минимальный из критериев, а интегральный принцип оптимизации минимизирует сумму всех нормированных скалярных критериев. Например, векторный критерий качества (4,I) согласно чебышевскому, дифференциальному и интегральному принципам оптимизации оценивается соответственно числами 4,I,5.

Те же принципы (чебышевский, интегральный, дифференциальный) используются и при оптимизации, когда известны минимальные значения критериев. Идея методов поро.вой оптимизации и уступок состоит в том, что оптимизация проводится по одному из скалярных критериев, входящих в векторный, а требования к остальным скалярным критериям записываются как ограничения. Принцип справедливого компромисса основан на сравнении векторной целевой функции в двух точках.

В разд.7 настоящих Рекомендаций при рассмотрении вопроса оп-

тимизации номенклатур типовых железобетонных изделий используются алгоритмы локального и глобального поиска, изложенные в разд.3-5. Одна из задач решается методом динамического программирования.

В прил.I. настоящих Рекомендаций описаны программы для ЭВМ и методы оптимизации отдельных железобетонных конструкций, разработанные и применяемые в различных организациях страны, а также универсальные программы, пригодные для оптимизации любых железобетонных конструкций. Приведено описание программ оптимизации номенклатур на ЭВМ.

Все алгоритмы решения внешних задач оптимизации, изложенные в разд.3-7 настоящих Рекомендаций, широко иллюстрируются примерами. В качестве примера рассмотрена оптимизация изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного сечения. Это пример назван тестовым, поскольку для него выполнен полный перебор всех возможных вариантов (см. прил. 6). Таким образом, при решении этого примера ответ был известен заранее, что позволило оценить работу различных алгоритмов. Условия тестового примера приведены в разд. I настоящих Рекомендаций.

Кроме того, в прил.2-5 приведены примеры оптимизации некоторых других конструкций. Эти примеры демонстрируют различные пути решения внутренних задач оптимизации и показывают широкую применимость принципа разделения параметров для оптимизации самых разнообразных железобетонных конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ.	3
I. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ	5
Основные положения	5
Основные определения	5
Тестовый пример оптимизации железобетонного изгибаемого элемента прямоугольного сечения. . . .	9
2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	II
Целевая функция и переменные параметры	II
Выбор внешних и внутренних переменных параметров. Построение решений внешней и внутренней задач оптимизации железобетонных конструкций	I3
Нормирование и округление внешних переменных параметров. Движение	I7
Назначение начальных приближений	20
3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ . .	22
Основные положения	22
Линейные планы	22
Примеры расчета.	34
4. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ	42
Основные положения	42
Основные операции алгоритмов	43
Примеры расчета.	54
5. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	65
Основные положения	65
Основные операции алгоритмов	66
Примеры расчета.	70
6. РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	75
Основные положения	75
Алгоритмы решения многокритериальных задач . . .	76
Примеры расчета.	80

Стр.

7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ НОМЕНКЛАТУР ТИПОВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ИЗДЕЛИЙ 87
Основные положения 87
Методы решения задач 91
Примеры расчета. 92
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Универсальные программы оптимизации. Оптимизация отдельных железобетонных конструкций и унифицированных серий 101
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Решение внутренней задачи оптимизации для элемента, работающего на косое внецентренное сжатие. 120
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Оптимизация предварительно напряженной двутавровой балки. 123
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Оптимизация кольцевого фундамента под дымовую трубу. 127
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Оптимизация вспарушенных плит. 131
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Таблицы результатов опытов решения тестового примера оптимизации изгибаемого элемента прямоугольного сечения. 134
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Таблица случайных чисел. 145
ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Основные принципы оптимизации железобетонных конструкций. 147

НИИЖБ Госстроя СССР
Рекомендации по оптимальному проектированию железобетонных конструкций
Отдел научно-технической информации
109389, Москва, 2-я Институтская ул., д.6
Редактор В.М.Рогинская

Л-107132 Подписано к печати 11.09.81 Заказ 1255
Бумага 60х84 1/16 10 печ.л. Тираж 300 экз. Цена 1 руб 50
ПЭМ ВНИИИС Госстроя СССР

gost.e-ecolog.ru