МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

РАСЧЕТЫ И ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

РД 50—705—91

5 руб.

КОМИТЕТ СТАНДАРТИЗАЦИИ И МЕТРОЛОГИИ СССР

Москва
1992

gost.e-ecolog.ru

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

РАСЧЕТЫ И ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

РД 50—705—91

МОСКВА — 1992

© Издательство стандартов, 1992

УДК 669.01:620.178.3 Группа Т59

РУКОВОДЯЩИЙ ДОКУМЕНТ ПО СТАНДАРТИЗАЦИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Расчеты и испытания на прочность в машиностроении

ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

РД 50—705—91

ОКСТУ 0025

Дата введения 01.01.92

Настоящие методические указания распространяются на основные виды прямых и косвенных механических испытаний при статическом и циклическом нагружении.

Настоящие методические указания устанавливают методы планирования исследований механических свойств конструкционных материалов, деталей машин и элементов конструкций, а также методы статистической обработки полученных результатов.

Методы, рассмотренные в настоящих методических указаниях, обеспечивают при минимальных затратах надежное определение средних значений характеристик механических свойств и их дисперсий с требуемой точностью, а также экспериментальное обоснование функции распределения, оценки ее параметров и квантилей заданного уровня вероятности.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Рассматриваемые методы планирования испытаний и статистического анализа их результатов предназначены для решения вопросов, связанных с рациональным выбором материала при проектировании, обоснованием расчетных характеристик, установлением оптимальных режимов технологии производства полуфабрикатов и деталей, организацией статистического контроля технологических процессов по механическим свойствам и т. д.

1.2. Для простейших вычислений используют таблицы (19—35) и чертежи приложения. Для сложных вычислений разработан пакет программ на языке Фортран для ЭВМ серии ЕС, а также для

персональных компьютеров. Все программы содержат подробные комментарии, исключающие необходимость их отдельного описания. Структурная схема комплекса программ приведена в таблице 19 приложения. Держателем пакета программ является кафедра «Сопротивление материалов» МАТИ им. К. Э. Циолковского.

2. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРЯМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Основные положения

2.1.1. Под прямыми понимают механические испытания, в результате которых непосредственно измеряются характеристики механических свойств (ХМС) данного объекта (образца).

К прямым испытаниям относят, например, испытания по определению временного сопротивления или времени до разрушения при заданной амплитуде напряжения. Испытания по определению предела выносливости относят к косвенным.

2.1.2. ХМС подразделяют на кратковременные и длительные. К кратковременным ХМС относят временное сопротивление, предел текучести, относительное удлинение и относительное сужение после разрушения, ударную вязкость, микротвердость.

К длительным ХМС относят число циклов до появления трещины или до разрушения при циклическом нагружении.

2.1.3. Все ХМС рассматривают как случайные величны, статистическое рассеяние которых обуславливается неоднородностью структуры каждого объекта испытаний, случайным различием структуры, химического состава и других свойств между объектами и т. д.

В дальнейшем рассматриваются методы планирования и статистической обработки результатов механических испытаний для всех ХМС, которые подчиняются указанным ниже законам распределения случайных величин.

Правила отбора образцов для испытаний определяются целями испытаний. Совокупность значений ХМС, полученная в результате испытаний, рассматривается как выборка из генеральной совокупности. Генеральная совокупность есть воображаемая совокупность значений ХМС, состоящая из бесконечно большого числа значений ХМС, каждое из которых отвечает установленным правилам отбора образцов для испытаний.

Если задачей испытаний является определение ХМС данной партии полуфабрикатов, то отбор образцов для испытаний ведут из данной партии (путем беспристрастного отбора) и совокупность значений ХМС образцов, которые могли бы быть произве-

дены из данной партии и других партий, полностью с ней совпадающих, является генеральной. Если задача испытаний — определение ХМС некоторой марки металла, то отбор образцов (путем беспристрастного отбора) ведут из всех партий данной марки и совокупность значений ХМС образцов, которые могли быть выполнены из данной марки металла, является генеральной.

2.1.4. Рассеяние значений ХМС в пределах генеральной совокупности характеризуется законом распределения вероятностей (распределением ХМС). Распределение ХМС описывается рядом характеристик: функцией распределения, математическим ожиданием, дисперсией, средним квадратическим отклонением, коэффициентом вариации, медианой, квантилем заданного уровня вероятности и т. д.

Все характеристики генеральной совокупности являются неслучайными (детерминированными) величинами. Эти величины дают полное и точное описание механических свойств бесконечно большого числа образцов воображаемой генеральной совокупности.

Всякая конечная совокупность образцов и отвечающая ей конечная совокупность значений ХМС рассматривается как выборка из генеральной совокупности. Состав конечной совокупности (выборки) является случайным и лишь с некоторой точностью отображает характеристики генеральной совокупности.

2.1.5. Задачи планирования и статистической обработки результатов прямых механических испытаний состоят в оценивании значений параметров распределения ХМС в генеральной совокупности с заданной точностью. Оценивание проводят на основе конечной совокупности значений ХМС, измеренных при испытании конечного числа объектов.

2.1.6. Для получения достоверных оценок параметров распределения ХМС в генеральной совокупности совокупность измеренных ХМС должна быть представительной. Представительность значений измеренных ХМС означает, что в соответствии с целями испытаний осуществлен беспристрастный случайный отбор объектов испытаний, что число испытанных образцов отвечает требованиям точности оценивания.

Если объекты испытаний — образцы, вырезанные из краев ряда листов металла некоторой партии, то результаты измерений представляют собой случайную выборку, представительную для генеральной совокупности, соответствующей краям листов данной партии. На ее основе нельзя достоверно оценить параметры распределения ХМС в листах в целом.

Аналогично результаты измерений ХМС образцов из наиболее плохих по химическому составу партий металла некоторой марки

образуют выборку, не представительную для марки в целом, а только для совокупности плохих по химическому составу партий данной марки.

2.1.7. Для оценивания параметров распределения ХМС используют стандартные параметрические и непараметрические статистические процедуры.

При использовании непараметрических процедур не делают никаких предположений о распределении ХМС. Непараметрические процедуры позволяют получить достоверные оценки для ограниченного набора характеристик: математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации.

Для получения достоверных оценок функции распределения или квантилей низкого уровня вероятности используют параметрические процедуры. При этом делают предположение о виде распределения ХМС. Вид распределения задают функцией распределения, содержащей ряд неизвестных постоянных параметров распределения, которые оцениваются по результатам измерений.

2.1.8. Полученные на основе параметрических процедур оценки существенно зависят от выбранного вида распределения ХМС (гипотетического распределения). Гипотетическое распределение должно по возможности более точно соответствовать истинному распределению ХМС. При выборке гипотетического распределения учитывают природу рассеяния ХМС, а также соответствие этого распределения результатам данных и других аналогичных испытаний.

2.1.9. Поскольку оценивание параметров распределения ХМС проводят на основе случайной выборки значений ХМС, полученные оценки являются случайными величинами, имеющими рассеяние относительно истинного значения. Точность оценивания, т. е. близость оценки к истинному значению, характеризуется шириной доверительного интервала, чем уже доверительный интервал, тем точнее оценки.

2.1.10. Ширина доверительного интервала уменьшается с увеличением объема выборки, т. е. с увеличением числа объектов испытания. Задача планирования испытаний состоит в выборе минимального числа объектов испытания, обеспечивающего заданную точность оценивания соответствующих параметров распределения ХМС (заданную ширину доверительных интервалов).

2.1.11. Планирование прямых механических испытаний и статистическая обработка результатов измерений включает:

выбор гипотетического распределения ХМС;

определение минимального числа объектов испытаний;

проверку согласия результатов измерений с выбранным гипотетическим распределением;

оценивание параметров распределения;

оценивание числовых параметров распределения ХМС;

оценивание доверительных интервалов числовых параметров распределения ХМС.

2.1.12. Частные генеральные совокупности значений ХМС, соответствующие отдельным партиям однотипных объектов, можно объединять в одну общую генеральную совокупность. На основе результатов измерения ХМС при испытании нескольких групп объектов из разных партий оценивают характеристики распределения ХМС в общей совокупности.

2.1.13. Выборку считают полной, если все запланированные для испытания объекты доведены до критического состояния.

При усталостных испытаниях могут образовываться цензурированные справа выборки I и II типа [1].

Цензурированные выборки I типа образуются, если испытания ведутся на ограниченной базе $N_б$. Объекты, не достигшие критического состояния после базы ($N_б$), далее не испытывают. Число баз испытаний в одной выборке, а также число групп объектов, снятых с испытаний на каждой базе, могут отличаться от единицы. В этом случае выборку называют многократно (прогрессивно) цензурированной [2, 3].

Цензурированные справа выборки II типа образуются, когда испытания при необходимости их форсирования останавливаются в случайный момент времени при получении первых «k» достигших критического состояния объектов из «n» ($n>k$) объектов, испытываемых одновременно. В этом случае фиксированной при испытаниях является доля k/n.

2.2. Распределения ХМС

Ниже приведены определения вероятностных понятий, используемых при описании рассеяния ХМС. Все вероятностные понятия даны в частотной трактовке.

2.2.1. Каждая ХМС рассматривается как неотрицательная случайная величина X, значения которой получают случайным выбором из бесконечной генеральной совокупности значений ХМС. Под распределением X понимают распределение значений ХМС в генеральной совокупности.

2.2.2. *Вероятность непревышения ХМС заданного уровня*

Под вероятностью непревышения ХМС заданного уровня понимают долю значений ХМС в генеральной совокупности, не превышающих этот уровень. Условие непревышения ХМС заданного уровня записывают как

$$X \leqslant x,$$

где X — обозначение ХМС как случайной величины;

x — заданный уровень.

Вероятность непревышения ХМС уровня x записывается как

$$P\{X \leqslant x\}$$

и лежит в интервале от 0 до 1.

2.2.3. *Функция распределения ХМС*

Функция распределения ХМС определяется соотношением

$$F_x(x)=P\{X \leqslant x\}. \quad (1)$$

Функция распределения $F_x(x)$ описывает зависимость вероятности непревышения ХМС заданного уровня от величины x этого уровня. $F_x(x)$ является функцией аргумента x. Индекс означает ее принадлежность к определенной ХМС.

Функция распределения однозначно задает распределение ХМС в генеральной совокупности. Все остальные характеристики распределения выражаются через функцию распределения.

Функция распределения временного сопротивления $\sigma_в$ записывается как $F_{\sigma_в}(\sigma)$. Соотношение $F_{\sigma_в}(\sigma)=0,1$ означает, что 10 % значений $\sigma_в$ в генеральной совокупности не превышают значения величины σ.

2.2.4. *Квантиль распределения ХМС*

Квантиль распределения ХМС определяется соотношением:

$$F_x(x_p)=P, \quad (2)$$

или в соответствии с (1)

$$P\{X \leqslant x_p\}=P.$$

Квантиль x_p уровня P представляет собой значение ХМС, вероятность непревышения которого равна P. Следовательно, доля значений ХМС в генеральной совокупности, не превышающих x_p, равна P.

Квантиль $x_{0,5}$ уровня $P=0,5$ называется медианой распределения.

Квантиль распределения временного сопротивления $\sigma_в$ уровня P обозначается как $\sigma_{в_p}$. Соотношение $\sigma_{в_{0,05}}$ σ означает, что значения $\sigma_в$, не превышающие σ, составляют 5 % генеральной совокупности.

2.2.5. *Плотность вероятностей ХМС*

Плотность вероятностей ХМС определяется соотношением

$$f_x(x)=\frac{dF_x(x)}{dx}.$$

Плотность вероятностей $f_x(x)$ представляет собой производную функции распределения $F_x(x)$ по параметру x.

2.2.6. *Математическое ожидание ХМС определяется соотношением*

$$M\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)dx.$$

Математическое ожидание $M\{X\}$ представляет собой среднее арифметическое значение ХМС в генеральной совокупности.

2.2.7. *Дисперсия ХМС*

Дисперсия ХМС определяется соотношением

$$D\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\{X\})^2f_x(x)dx.$$

Дисперсия $D\{X\}$ представляет собой среднее арифметическое значение квадрата отклонения ХМС от ее математического ожидания в генеральной совокупности.

2.2.8. *Среднее квадратическое отклонение ХМС*

Среднее квадратическое отклонение ХМС определяется соотношением

$$\sigma\{X\}=\sqrt{D\{X\}}\,.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma\{X\}$ представляет собой корень квадратный из дисперсии ХМС. Величина $\sigma\{X\}$ характеризует отклонения значений ХМС в генеральной совокупности от математического ожидания.

2.2.9. *Коэффициент вариации ХМС*

Коэффициент вариации ХМС определяется соотношением

$$\gamma\{X\}=\frac{\sigma\{X\}}{M\{X\}}\,.$$

Коэффициент вариации $\gamma\{X\}$ представляет собой отношение среднего квадратического отклонения ХМС к математическому ожиданию ХМС. Величина $\gamma\{X\}$ характеризует относительное отклонение значений ХМС в генеральной совокупности от математического ожидания.

Если рассматривается распределение временного сопротивления $\sigma_в$, то его математическое ожидание обозначается как $M\{\sigma_в\}$, дисперсия как $D\{\sigma_в\}$, среднее квадратическое отклонение как $\sigma\{\sigma_в\}$, коэффициент вариации как $\gamma\{\sigma_в\}$.

2.3. Законы распределения ХМС

Ниже приведены характеристики ряда законов распределения вероятностей, используемых в качестве гипотетических при оценивании параметров распределения ХМС. Приведены рекомендации по их применению с краткими обоснованиями.

2.3.1. Гипотетическое распределение задается в виде функции распределения с рядом неизвестных постоянных — параметров распределения:

$$F(x)=F(x;\ g_1, g_2, \ldots, g_k),$$

где g_i — параметры распределения;

k — число параметров.

2.3.2. Точность оценок параметров распределения ХМС зависит от точности оценивания параметров гипотетического распределения и от близости гипотетического распределения истинному распределению ХМС.

2.3.3. Точность оценок характеристик гипотетического распределения при фиксированном числе измеренных значений ХМС зависит от числа параметров гипотетического распределения.

2.3.4. Близость выбранного гипотетического распределения ХМС к истинному распределению оценивается на основе статистического сравнения гипотетического распределения с совокупностью значений ХМС, полученных в результате данных и предыдущих испытаний.

Из гипотетических распределений, имеющих удовлетворительное согласие с результатами измерений, следует отдавать предпочтение распределениям, отвечающим некоторой математической модели, отражающей физическую природу рассеяния ХМС.

2.3.5. *Нормальное распределение*

2.3.5.1. *Основные расчетные формулы*

Плотность вероятностей $[f_x\ (x)]$

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0, \tag{3}$$

где e — основание натурального логарифма;

a, σ — параметры распределения.

Функция распределения $[F_x\ (x)]$

$$F_x(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{4}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа (см. табл. 20 приложения).

Квантиль уровня P: (x_p)

$$x_p = a + z_p \sigma, \qquad (5)$$

где z_p — квантиль стандартного нормального распределения уровня P, определяемый соотношением

$$\Phi(z_p) = P.$$

Значения z_p приведены в табл. 21 приложения.

Медиана ($x_{0,5}$)

$$x_{0,5} = a. \qquad (6)$$

Математическое ожидание ($M\{x\}$), среднее квадратическое отклонение ($\sigma\{X\}$) и коэффициент вариации ($\gamma\{X\}$)

$$M\{X\} = a, \ \sigma\{X\} = \sigma, \ \gamma\{X\} = \frac{\sigma}{a}. \qquad (7)$$

Параметр a соответствует медиане и математическому ожиданию; параметр σ — среднему квадратическому отклонению.

Применение нормального распределения в качестве гипотетического для ХМС ограничено тем, что оно предполагает ненулевую вероятность отрицательного значения ХМС, в то время как все рассматриваемые ХМС неотрицательные. Нормальное распределение допускается применять только при значении коэффициента вариации $\gamma\{X\}$, не превышающем 0,20, когда указанная вероятность пренебрежимо мала.

Нормальное распределение рекомендуется применять для обработки результатов измерений кратковременных ХМС только в том случае, если это регламентируется нормативной документацией, или, если имеется необходимость сопоставления с архивными данными, полученными на основе нормального распределения.

Нормальное распределение не рекомендуется применять для обработки результатов измерений длительных ХМС.

2.3.6. *Логарифмически нормальное распределение*

2.3.6.1. *Основные формулы*

Функция распределения [$F_x(x)$]

$$F_x(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x - x_0) - a_l}{\sigma_l}\right), \ x > x_0, \ \sigma_l > 0, \qquad (8)$$

где $\ln(x - x_0)$ — натуральный логарифм;

a_l, σ_l, x_0 — параметры распределения.

Плотность вероятностей [$f_x(x)$]

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l (x - x_0)} \cdot e^{-\frac{[\ln(x - x_0) - a_l]^2}{2\sigma_l^2}}. \qquad (9)$$

Квантиль уровня P определяется соотношением

$$\ln(x_p - x_0) = a_l + z_p \sigma_l, \tag{10}$$

где $\Phi(z_p) = P$.

Медиана a_l определяется соотношением

$$\ln(x_{0,5} - x_0) = a_l. \tag{11}$$

Математическое ожидание $M\{X\}$, дисперсия $D\{X\}$ и коэффициент вариации $\gamma\{X\}$ определяются соотношениями

$$M\{X\} = x_0 + e^{a_l + \frac{\sigma_l^2}{2}}, \quad D\{X\} = e^{2a_l + \sigma_l^2}(e^{\sigma_l^2} - 1), \tag{12}$$

$$\gamma\{X\} = \frac{D^{1/2}\{X\}}{M\{X\} - x_0} = \sqrt{e^{\sigma_l^2} - 1}.$$

Параметр a_l задает медиану $x_{0,5}$ распределения, параметр σ_l — коэффициент вариации $\gamma\{X\}$.

Удобство применения логарифмически-нормального распределения связано с простотой основанных на нем статистических процедур оценивания. Его рекомендуется применять при обработке результатов измерения кратковременных ХМС, кроме временного сопротивления при хрупком разрушении, и длительных ХМС.

2.3.7. *Распределение Вейбулла — Гнеденко*

Трехпараметрическое распределение Вейбулла — Гнеденко для случайной величины X имеет функцию распределения $[F_x(x)]$

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x - x_0}{c}\right)^b} & \text{при } x > x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases} \tag{13}$$

и плотность вероятности $[f_x(x)]$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{b}{c}\left(\frac{x - x_0}{c}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x - x_0}{c}\right)^b} & \text{при } x > x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases} \tag{14}$$

где $c > 0$, $b > 0$, $x_0 > 0$ — параметры распределения.

Математическое ожидание $M\{X\}$, дисперсия $D\{X\}$ и коэффициент вариации $\gamma\{X\}$ определяются выражениями

$$M\{X\} = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) + x_0, \tag{15}$$

$$D\{X\} = c^2\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right\}, \tag{16}$$

$$\gamma\{X\}=\frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)}, \qquad (17)$$

где $\Gamma(x)=\int_0^\infty y^{x-1}\,e^{-y}\,dy$ — гамма-функция.

Квантиль уровня P случайной величины X определяется по уравнению

$$x_p=x_0+c[-\ln(1-P)]^{1/b}. \qquad (18)$$

Квантиль уровня $P=0{,}632$ $x_{0,632}=c+x_0$, медиана $(x_{0,5})$ определяется выражением

$$x_{0,5}=x_0+c(\ln 2)^{1/b}. \qquad (19)$$

При $x_0=0$ имеем двухпараметрическое распределение Вейбулла — Гнеденко, при $b=1$ — экспоненциальное (показательное) распределение.

2.4. Непараметрические оценки характеристик распределения ХМС

Ниже приведены выражения для вычислений непараметрических оценок числовых характеристик распределения ХМС. При их вычислении не делается никаких предположений о распределении ХМС.

2.4.1. Результаты измерения ХМС в процессе испытания ряда однотипных объектов представляют собой совокупность следующих значений:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \qquad (20)$$

где X_i — значение ХМС, измеренное при испытании i-го объекта;

n — число испытанных объектов.

Совокупность (20) рассматривается как случайная выборка из генеральной совокупности значений ХМС.

2.4.2. В качестве оценок ряда числовых характеристик распределения в генеральной совокупности (генеральных характеристик) используются соответствующие числовые характеристики выборки (выборочные характеристики).

2.4.3. Выборочное среднее $(\bar{x})$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (21)$$

используется в качестве оценки математического ожидания $M\{X\}$ (генерального среднего).

2.4.4. Выборочная дисперсия (s^2)

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad (22)$$

используется в качестве оценки дисперсии $D\{X\}$ (генеральной дисперсии).

2.4.5. Выборочное среднее квадратическое отклонение (s)

$$s=\sqrt{s^2} \qquad (23)$$

используется в качестве оценки среднего квадратического отклонения $\sigma\{X\}$ (генерального среднего квадратического отклонения).

2.4.6. Выборочный коэффициент вариации (v)

$$v=\frac{s}{\bar{x}} \qquad (24)$$

используется в качестве оценки коэффициента вариации $\gamma\{X\}$ (генерального коэффициента вариации).

2.4.7. Для проверки ряда статистических гипотез используют следующие выборочные характеристики:

выборочный показатель асимметрии (E)

$$E=\frac{1}{ns^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3; \qquad (25)$$

выборочный показатель эксцесса (e)

$$e=\frac{1}{ns^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4. \qquad (26)$$

2.4.8. Для полной выборки непараметрическую оценку квантили уровня P случайной величины X вычисляют по формуле [5]

$$\hat{x}_p=(1-\alpha_p)x_i+\alpha_p x_{i+1}, \qquad (27)$$

где i — номер порядковой статистики $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в выборке объема n из произвольного непрерывного распределения

$$i=\mathrm{int}[p(n+1)], \qquad (28)$$

$\mathrm{int}[x]$ — целая часть числа x.

$$\alpha_p=p(n+1)-i. \qquad (29)$$

2.4.9. В однократно цензурированной справа выборке I типа непараметрическую оценку квантили уровня p вычисляют по формуле (27), где i — номер порядковой статистики $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в выборке объема n из произвольного непрерывного распределения, в которой наблюдаются k первых членов

$$i=\text{int}\left[\frac{p(k+1)}{h}\right], \qquad (30)$$

где $h=\frac{k}{n+1}$ — оценка степени цензурирования;

$$\alpha_p=\frac{p(k+1)}{h}-i.$$

2.5. Параметрические оценки параметров распределения ХМС

2.5.1. *Точечные оценки ХМС*

2.5.1.1. Ниже приведены выражения для вычисления оценок параметров распределения ХМС на основе каждого из гипотетических распределений в общем случае многократно цензурированной выборки. Оценки параметров выбранного гипотетического распределения определяют методом максимального правдоподобия (ММП-оценки) или методом наименьших квадратов (МНК-оценки). Как частный случай рассматриваются оценки для однократно цензурированной справа выборки и полной выборки. ММП-оценки справедливы для цензурированных выборок I и II типов. МНК-оценки справедливы для выборок II типа.

2.5.1.2. ММП-оценки параметров функции распределения ХМС определяют как корни системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{f(x_i)}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial g_l}\right]_{g_l=\hat{g}_l}-\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{r_j}{1-F(x_{6j})}\cdot\frac{\partial F_j}{\partial g_l}\right]_{g_l=\hat{g}_l}=0, \qquad (31)$$

$l=1, 2, \ldots, k_1$,

где $f(x)$ — плотность распределения ХМС;

$F(x)$ — функции распределения ХМС;

k — количество объектов, достигших критического состояния;

$g_1, g_2, \ldots, g_{k_1}$ — k_1 параметров непрерывной не менее двух раз дифференцируемой функции распределения;

$\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_{k_1}$ — ММП-оценки параметров;

x_{6_j} — значения баз испытаний, при которых наблюдаются недостигшие критического состояния объекты, $j=1, 2, \ldots, m$,

r_j — количество объектов, снятых с испытаний на j-й базе;

$n=k+\sum_{j=1}^{m} r_j$ — общее число объектов испытаний.

Производные $\frac{\partial f}{\partial g}$, $\frac{\partial F}{\partial g}$ определяют конкретный вид системы уравнений (31).

2.5.1.3. Асимптотическую матрицу вариаций-ковариаций $\|v_{es}\|$ размерности $k_1 \times k_1$ оценок параметров распределений на основании ММП определяют путем обращения матрицы $\|\mu_{es}\|$

$$\|v_{es}\| = \|\mu_{es}\|^{-1}, \quad e, s = 1,2,\ldots,k_1, \tag{32}$$

$$\mu_{es} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f(x_i)} \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial g_l \partial g_s} - \frac{\partial f_i}{\partial g_l} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial g_s} \cdot \frac{1}{f(x_i)} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{1-F(x_{6j})} \left[\frac{\partial F_j}{\partial g_l} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial g_s} \cdot \frac{1}{1-F(x_{6j})} - \frac{\partial^2 F_j}{\partial g_l \partial g_s} \right]. \tag{33}$$

2.5.1.4. *Логарифмически нормальное распределение*

Оценки математического ожидания $\hat{(a)}$, среднего квадратического отклонения $\hat{(\sigma)}$ и коэффициента вариации $\hat{(\gamma)}$ двухпараметрического логарифмически нормального распределения (8) (при $x_0=0$), в случае полной выборки вычисляют по формулам:

$$\hat{a} = e^{\hat{a}_l + \frac{\hat{\sigma}_l^2}{2}}, \tag{34}$$

$$\hat{\sigma} = e^{\hat{a}_l + \frac{\hat{\sigma}_l^2}{2}} (e^{\hat{\sigma}_l^2} - 1)^{1/2}, \tag{35}$$

$$\hat{\gamma} = (e^{\hat{\sigma}_l^2} - 1)^{1/2}, \tag{36}$$

где $\hat{a}_l$, $\hat{\sigma}_l$ — оценки параметров логарифмически нормального распределения случайной величины X или нормального распределения случайной величины $y = \ln X$

$$\hat{a}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}, \tag{37}$$

$$\hat{\sigma}_l = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \hat{a}_l)^2 \right]^{1/2}, \tag{38}$$

$$\hat{a}'_l = m_1 \hat{a}_l, \quad \hat{\sigma}'_l = m_1 \hat{\sigma}_l, \quad m_1 = 0{,}4343,$$

где $\hat{a}'_l$, $\hat{\sigma}'_l$ — оценки параметров случайной величины $y' = \lg X$.

2.5.1.5. В общем случае оценки параметров a_l, σ_l, x_0 распределения (8) вычисляют в соответствии с формулой (31) как корни системы уравнений [2]

$$\sum_{i=1}^{k}(y_i-\hat{a}_l)+\hat{\sigma}_l\sum_{j=1}^{m}r_j\psi(z_j)=0, \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{k}(y_i-\hat{a}_l)^2+\hat{\sigma}_l^2\left[\sum_{j=1}^{m}r_j\psi(z_j)\cdot z_j-k\right]=0, \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{y_i-\hat{a}_l}{x_i-\hat{x}_0}+\hat{\sigma}_l^2\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_0)^{-1}+\hat{\sigma}_l\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\psi(z_j)}{x_{6_j}-\hat{x}_0}=0, \tag{41}$$

$$y_i=\ln(x_i-\hat{x}_0);$$

$$z_j=[\ln(x_{6_j}-\hat{x}_0)-\hat{a}_l]/\hat{\sigma}_l;$$

$$\psi(z_j)=\varphi(z_j)/[1-\Phi(z_j)];$$

$$\varphi(z_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_j^2}{2}};$$

$$\Phi(z_j)=\int_{-\infty}^{z_j}\varphi(x)dx.$$

Модифицированную ММП-оценку параметра x_0 вычисляют по формуле [2]

$$x_0=x_1-e^{\hat{a}_l+z_1\hat{\sigma}_l}, \tag{42}$$

где z_1 — квантиль нормированного нормального распределения для вероятности $P=\frac{1}{n+1}$, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{n+1}.$$

При таком подходе оценки $\hat{a}_l$, $\hat{\sigma}_l$ рассчитывают по формулам (39), (40), а оценку $\hat{x}_0$ — по формуле (42).

2.5.1.6. Оценки $\hat{a}_l$, $\hat{\sigma}_l$ нормального распределения случайной величины $y=\ln X$ рассчитывают как корни системы уравнений (39), (40) при

$$y_i=\ln x_i z_j=\frac{\ln x_{6_j}-\hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l},\quad \hat{x}_0=0.$$

2.5.1.7. В частном случае однократного цензурирования оценки параметров рассчитывают по формулам (39—42) при $m=1$, $r_j=r$, $z_j=z$, $n=k+r$.

2.5.1.8. В случае полной выборки $m=0$, $r_j=0$ для всех j. Оценку параметра x_0 рассчитывают по формуле (41) или (42), где

$$\hat{a}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(x_i-\hat{x}_0)], \tag{43}$$

$$\hat{\sigma}_l = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(x_i-\hat{x}_0)-\hat{a}_l]^2\right]^{1/2}. \tag{44}$$

2.5.1.9. Элементы асимптотической матрицы вариаций-ковариаций определяют в соответствии с формулой (33), где

$$g_1=a_l,\ g_2=\sigma_l,\ g_3=x_0.$$

$$\|v_{es}\| = \frac{\sigma_l^2}{n}\|v'_{es}\| = \frac{\sigma_l^2}{n}\|\mu'_{es}\|^{-1}, \tag{45}$$

$$e,s=1,2,3$$

$$\mu'_{11} = \frac{k}{n}+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{n}\psi_j(\psi_j-z_j),$$

$$\mu'_{22} = \frac{2k}{n}+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{n}\psi_j z_j[z_j(\psi_j-z_j)-1],$$

$$\mu'_{33} = -\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\ln(x_i-x_0)-a_l-1+\sigma_l^2}{(x_i-x_0)^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\psi_j[\sigma_l-(\psi_j-z_j)]}{(x_{6j}-x_0)^2}\right], \tag{46}$$

$$\mu'_{12}=\mu'_{21}=\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j}{n}\psi_j[z_j(\psi_j-z_j)-1],$$

$$\mu'_{13}=\mu'_{31}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i-x_0}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\psi_j(\psi_j-z_j)}{x_{6j}-x_0},$$

$$\mu'_{23}=\mu'_{32}=\frac{2}{\sigma_l n}\sum_{i=1}^{k}\frac{\ln(x_i-x_0)-a_l}{x_i-x_0}+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j\psi_j[1+z_j(\psi_j-z_j)]}{x_{6j}-x_0},$$

$$\psi_l = \frac{\varphi(z_l)}{1-\Phi(z_l)}, \tag{47}$$

$$z_j = \frac{\ln(x_{6_j} - x_0) - a_l}{\sigma_l}. \qquad (48)$$

2.5.1.10. *Нормальное распределение*

Оценки параметров a, σ нормального распределения ХМС (3) в полной выборке рассчитывают по формулам:

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2}. \qquad (49)$$

Оценки параметров a, σ в цензурированных выборках рассчитывают по формулам (39), (40) при $x_0 = 0$, $y_i = x_i$; $\hat{a}_l = \hat{a}$; $\hat{\sigma}_l = \hat{\sigma}$.

2.5.1.11. Элементы асимптотической матрицы вариаций-ковариаций определяют в соответствии с формулами (45 — 48), где $x_0 = 0$, $\mu_{13} = \mu_{23} = \mu_{33} = 0$.

2.5.1.12. При планировании испытаний в формулы (45 — 48) подставляют ожидаемые значения параметров распределений. При статистической обработке результатов усталостных испытаний для приближенного расчета элементов матрицы $\|v_{es}\|$ в формулы (45 — 48) подставляют ММП-оценки параметров распределений.

Пример 1. В результате усталостных испытаний 22 образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений $\sigma_a = 210$ МПа измерены значения долговечностей ($N \cdot 10^{-5}$):
6,46; 7,13; 7,88; 8,6; 9,51; 10,6; 12,1; 12,5; 13,1; 15,9; 17,1; 19,6; 24,9; 30,2; 38,2; 48,2; 59,9; 78,3; 97,1; 163,0; 278,0; 367,0. Требуется произвести оценку параметров логарифмически нормального распределения долговечности.

В соответствии с п. 2.5.1.8 оценки параметров x_0, a'_l, σ'_l рассчитывают по формулам (41), (43), (44) с помощью ЭВМ обращением к подпрограмме Р24А48

$$\hat{x}_0 = 632110; \quad a'_l = 6{,}1255; \quad \sigma'_l = 0{,}8212,$$

где $a'_l = m_1 a_l$; $\sigma'_l = m_1 \cdot \sigma_l$,

$m_1 = 0{,}43429$ — коэффициент перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

Пример 2. При усталостных испытаниях на изгиб с вращением образцов из сплава В95 при амплитуде цикла напряжений $\sigma_a = 210$ МПа измерены значения долговечностей ($N \cdot 10^{-6}$): 0,982; 1,97; 2,20; 2,35; 3,19; 3,66; 4,76; 4,98; 5,40; 6,53; 8,28; 9,04.

Испытания проводились при ограниченной базе $N_6 = 10^7$ циклов. Число неразрушенных образцов, прошедших базу, $r = 13$. Произвести оценку параметров нормального распределения случайной величины $y' = \lg N$ и вычислить приближенные оценки элементов асимптотической матрицы вариаций-ковариаций.

Оценки параметров a'_l, σ'_l в соответствии с п. 2.5.1.7 рассчитывают по формулам (39), (40) с помощью ЭВМ обращением к подпрограмме Р24А00. При этом $n = 25$, $k = 12$, $r = 13$, $m = 1$. Оценки параметров составляют:

$\hat{a}'_l = 7{,}0079$; $\hat{\sigma}'_l = 0{,}5107$.

Элементы асимптотической матрицы $\|v_{es}\|$ рассчитывают по формулам (46 — 49):

$$v_{11} = D\{\hat{a}'_l\} = 0{,}01653;$$

$$v_{22} = D\{\hat{\sigma}'_l\} = 0{,}01384;$$

$$v_{12} = D\{\hat{a}'_l, \sigma'_l\} = -0{,}007095,$$

где $D\{\hat{a}'_l\}$ — асимптотическая дисперсия оценки $\hat{a}'_l$;

$D\{\hat{\sigma}'_l\}$ — асимптотическая дисперсия оценки $\hat{\sigma}'_l$;

$D\{\hat{a}'_l, \hat{\sigma}'_l\}$ — асимптотическая ковариация оценок $\hat{a}'_l$, $\hat{\sigma}'_l$.

2.5.1.13. *Распределение Вейбулла — Гнеденко*

ММП-оценки параметров b, x_0 распределения по формуле (13) в соответствии с формулой (31) рассчитывают как корни системы уравнений [3]:

$$\left[\frac{k}{b} + \sum_{i=1}^{k} \ln(x_i - \hat{x}_0)\right]\left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^{m} r_j (x_{6_j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}}\right] -$$

$$-k\left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \ln(x_i - \hat{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} r_j (x_{6_j} - \right.$$

$$\left. - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \ln(x_{6_j} - \hat{x}_0)\right] = 0; \qquad (50)$$

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} + \sum_{j=1}^{m} r_j (x_{6_j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} - \frac{1 - \hat{b}^{-1}}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i -$$

$$- \hat{x}_0)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k} (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^{m} r_j (x_{6_j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}}\right] = 0, \qquad (51)$$

после чего оценку параметра c рассчитывают по формуле

$$\hat{c}=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\hat{b}}}\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_0)^{\hat{b}}+\sum_{j=1}^{m}r_j(x_{6_j}-\hat{x}_0)^{\hat{b}}\right]^{\frac{1}{\hat{b}}}. \qquad (52)$$

Модифицированную ММП-оценку параметра x_0 рассчитывают по формуле [3]:

$$\hat{x}_0=x_1-\hat{c}\cdot n^{-\frac{1}{\hat{b}}}\Gamma(1+\hat{b}^{-1}). \qquad (53)$$

При таком подходе оценки $\hat{c}$, $\hat{b}$ рассчитывают по формулам (50), (52), а оценку $\hat{x}_0$ — по формуле (53).

2.5.1.14. При использовании двухпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко оценки $\hat{b}$, $\hat{c}$ рассчитывают по формулам (50), (52) при $\hat{x}_0=0$.

2.5.1.15. При однократном цензурировании $m=1$, $r_j=r$, $n=k+r$.

2.5.1.16. В случае полной выборки в уравнениях (50) — (53) принимают $m=0$, $r_j=0$ для всех j, $n=k$.

2.5.1.17. Элементы асимптотической матрицы вариаций-ковариаций рассчитывают по уравнениям (32), (33), где $g_1=c$, $g_2=b$, $g_3=x_0$.

$$\mu_{11}=\frac{b^2}{c^2}k, \qquad (54)$$

$$\mu_{22}=\frac{k}{b^2}+\sum_{i=1}^{k}z_i^b\ln^2 z_i+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^b\ln^2 z_j, \qquad (55)$$

$$\mu_{33}=\frac{b(b-1)}{c^2}\left[\sum_{i=1}^{k}z_i^{b-2}+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^{b-2}\right]+\frac{b-1}{c^2}\sum_{i=1}^{k}z_i^{-2}, \qquad (56)$$

$$\mu_{12}=\frac{b}{c}\left[\sum_{i=1}^{k}z_i^b\ln z_i+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^b\ln z_j\right], \qquad (57)$$

$$\mu_{13}=\frac{b^2}{c^2}\left[\sum_{i=1}^{k}z_i^{b-1}+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^{b-1}\right], \qquad (58)$$

$$\mu_{23}=\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{k}z_i^{-1}-\frac{b}{c}\left[\sum_{i=1}^{k}z_i^{b-1}\ln z_i+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^{b-1}\ln z_j\right]-$$
$$-\frac{1}{c}\left[\sum_{i=1}^{k}z_i^{b-1}+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^{b-1}\right], \qquad (59)$$

где $z_i = (x_i - x_0)/c$, $z_j = (x_{6_j} - x_0)/c$.

2.5.1.18. Оценки параметров с помощью ЭВМ рассчитывают обращением к подпрограмме Р24А46.

2.5.1.19. Оценки наименьших квадратов с минимальной дисперсией параметров сдвига и масштаба (МНК-оценки) [1].

Для произвольного непрерывного распределения с параметрами сдвига a и масштаба σ оценки наименьших квадратов определяют по формулам:

$$\widehat{a} = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j b_j \sum_{i=1}^{n} a_i\right], \tag{60}$$

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{j=1}^{n}\alpha_j b_j - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{1i} \sum_{j=1}^{n} b_j\right], \tag{61}$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j V_{ji},\ b_i = \sum_{j=1}^{n} x_j V_{ji},\ a_{1i} = \sum_{j=1}^{n} V_{ji},$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — значения случайной величины X, упорядоченные по величине в выборке объема n.

2.5.1.20. Дисперсии и ковариацию оценок a, σ рассчитывают по формулам:

$$\nu_{11} = D\left\{\widehat{a}\right\} = \frac{\sigma^2}{n}\nu'_{11};\quad \nu_{22} = D\left\{\widehat{\sigma}\right\} = \frac{\sigma^2}{n}\nu'_{22}; \tag{62}$$

$$\nu_{12} = D\left\{\widehat{a}, \widehat{\sigma}\right\} = \frac{\sigma^2}{n}\nu'_{12},$$

$$\nu'_{11} = \frac{n}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i;\quad \nu'_{22} = \frac{n}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} a_{1i};\quad \nu'_{12} = -\frac{n}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i. \tag{63}$$

2.5.1.21. В случае симметричного гипотетического распределения (например нормального) оценки по формулам (58—61) упрощаются следующим образом:

$$\widehat{a} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{64}$$

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j b_j \sum_{i=1}^{n} a_{1i}, \tag{65}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$.

2.5.1.22. В формулах (60—65) α_i — математическое ожидание i-й нормированной порядковой статистики в выборке объема n

$$\alpha_i = M\{z_i\},\ z_i = \frac{x_i - a}{\sigma},\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{66}$$

V_{ij} — элементы матрицы $\|V_{ij}\|$ размерности $n \times n$, обратной к матрице вариаций-ковариаций $\|\nu_{ij}\|$ нормированных порядковых статистик, вычисляемые по формулам:

$$\|V_{ij}\| = \|\nu_{ij}\|^{-1},\ i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{67}$$

$$\alpha_i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)[1-F(x)]^{n-i}[F(x)]^{i-1}dx}{B(i,n-i+1)}, \tag{68}$$

$$\nu_{ii} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)[1-F(x)]^{n-i}[F(x)]^{i-1}dx}{B(i,n-i+1)} - \alpha_i^2, \tag{69}$$

$$\nu_{ij}(i<j) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}[1-F(x)]^{n-j}xf(x)dx\int_{-\infty}^{x} yf(y)[F(x)-F(y)]^{j-i-1}}{B(i,j-i)B(j,n-j+1)} \times \tag{70}$$

$$\times F(y)^{i-1}dy - \alpha_i\,\alpha_j,$$

где $f(x)$, $F(x)$ — плотность и функция непрерывного гипотетического распределения с параметрами сдвига и масштаба;

$$B(a,b) = \frac{(b-1)!\,(a-1)!}{(a+b-1)!}$$

Для нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $F(x) = \Phi(x)$.

2.5.1.23. Для однократно цензурированной справа выборки II типа оценки параметров сдвига и масштаба, их дисперсии и ковариацию определяют по формулам (60—61) с использованием первых k наблюдений случайной величины из n объектов, испытываемых одновременно. Все суммы рассчитывают от 1 до k. Общий объем испытаний n в формулах (62), (69) и (67—70) не изменяется.

2.5.1.24. Для нормального распределения параметрами сдвига и масштаба являются оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения случайной величины X.

2.5.1.25. Для представления распределения Вейбулла — Гнеденко с параметрами сдвига и масштаба его преобразовывают к следующему виду [6] по формуле

$$\ln(x-x_0)=a+z_p\sigma, \tag{71}$$

где $a=\ln c$, $\sigma=\frac{1}{b}$, $z_p=\ln\ln\frac{1}{1-P}$, $P=F(x)$.

При этом оценку x_0 рассчитывают на основании соображений, не связанных с методом наименьших квадратов (например, варьируя x_0, добиваются наилучшего соответствия теоретической и эмпирической функций распределения). Для двухпараметрического распределения полагают $x_0=0$. При таком представлении распределения Вейбулла — Гнеденко элементы асимптотической матрицы ММП-оценок $\hat{a}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{x}_0$ имеют вид:

$$\|v_{es}\|=\frac{\sigma^2}{n}\|\mu'_{es}\|^{-1};$$

$$\mu'_{11}=\frac{k}{n};$$

$$\mu'_{22}=\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}z_i^2e^{z_i}+\sum_{j=1}^{m}r_jz_j^2e^{z_j}\right);$$

$$\mu'_{33}=\frac{1-\sigma}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma+e^{z_i}}{(x_i-x_0)^2}+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_je^{z_j}}{(x_{6_j}-x_0)^2}\right];$$

$$\mu'_{12}=\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}z_i; \tag{72}$$

$$\mu'_{13}=\frac{1-\sigma}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_0)^{-1};$$

$$\mu'_{23}=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{e^{z_i}z_i+e^{z_i}-1}{x_i-x_0}+\sum_{j=1}^{m}\frac{r_je^{z_j}(z_j+1)}{x_{6_j}-x_0}\right];$$

$$z_i=\frac{\ln(x_i-x_0)-a}{\sigma},\quad z_j=\frac{\ln(x_{6_j}-x_0)-a}{\sigma}.$$

2.5.1.26. Функции (67)—(70) для нормированных нормального и Вейбулла—Гнеденко распределений рассчитывают с помощью ЭВМ обращением к подпрограммам Р24А43 и Р24101, в которых используют разложение в ряд Корниша—Фишера [7] [порядок разложения $(n+2)^{-3}$].

2.5.1.27. МНК-оценки параметров сдвига и масштаба нормального и Вейбулла—Гнеденко распределений рассчитывают с помощью ЭВМ обращением к подпрограммам VEIBUL, Р24А81, Р24102.

Пример 3. В результате усталостных испытаний 17 образцов сплава АВ измерены следующие значения долговечностей ($N \cdot 10^{-6}$) в циклах: 0,445; 0,571; 0,596; 0,890; 0,893; 0,927; 1,213; 1,313; 1,408; 1,493; 1,782; 2,113; 2,225; 2,299; 2,332; 3,615; 4,583.

Требуется произвести оценку параметров a_l, σ_l на основе нормального распределения логарифма долговечности.

Обращением к подпрограмме Р24А81 в соответствии с п. 2.5.1.21 рассчитывают

$$\hat{a}_l = 6{,}1437;$$
$$\hat{\sigma}_l = 0{,}2813.$$

Рассчитывая оценки по 14 первым значениям логарифмов долговечностей в соответствии с п. 2.5.1.19 обращением к подпрограмме Р24А81 получают

$$\hat{a}_l = 6{,}1442;$$
$$\hat{\sigma}_l = 0{,}2893;$$
$$D\{\hat{a}_l\} = 0{,}005198; \quad D\{\hat{\sigma}_l\} = 0{,}003594;$$
$$D\{\hat{a}_l, \hat{\sigma}_l\} = 0{,}4922 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 4. В результате усталостных испытаний 7 образцов сплава 1420 измерены следующие значения долговечностей ($N \cdot 10^{-4}$) в циклах: 0,267; 0,5809; 0,7219; 0,7410; 0,9599; 1,2240; 1,3679.

Требуется произвести оценку параметров c, b на основе двухпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко.

В соответствии с пп. 2.5.1.19 и 2.5.1.25 обращением к подпрограмме Р24А81 рассчитывают

$$\hat{c} = 13538, \qquad \hat{b} = 1{,}8441.$$

2.5.1.28. Оценку вероятности P_x непревышения заданного уровня x рассчитывают на основе функций гипотетического распределения ХМС, параметры которого заменяют их оценками, по формулам:

Нормальное распределение

$$\hat{P}_x = \Phi\left(\frac{x - \hat{a}}{\hat{\sigma}}\right). \qquad (73)$$

Распределение Вейбулла—Гнеденко

$$\widehat{P}_x = 1 - e^{-\left(\frac{x-\widehat{x}_0}{\widehat{c}}\right)^{\widehat{b}}} \quad (74)$$

2.5.1.29. Оценку квантили уровня P нормального распределения случайной величины X рассчитывают по формуле

$$\widehat{x}_p = \widehat{a} + z_p \cdot \widehat{\sigma}, \quad (75)$$

где z_p — квантиль уровня P нормированного нормального распределения

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx . \quad (76)$$

Оценку квантили уровня P распределения Вейбулла — Гнеденко рассчитывают по формуле

$$\widehat{x}_p = \widehat{x}_0 + \widehat{c}[-\ln(1-P)]^{\frac{1}{\widehat{b}}} . \quad (77)$$

Пример 5. В условиях примера 1 (п. 2.5.1.12) произвести оценку квантили уровня $P=0{,}1$ долговечности на основе нормального распределения $Y=\lg(N-N_0)$. Оценку квантили нормального распределения рассчитывают по формуле (75)

$$\widehat{x}_p = \lg(\widehat{N}_p - \widehat{N}_0) = \widehat{a}'_l + z_{p=0,1} \cdot \widehat{\sigma}'_l = 6{,}1255 - 1{,}282 \cdot 0{,}8212 = 5{,}0727 .$$

$$\widehat{N}_p = 10^{5{,}0727} + 632110 = 750331.$$

2.5.2. *Интервальные оценки ХМС*

2.5.2.1. Верхняя доверительная граница $x_p^{\text{в}}$ для квантили распределения ХМС x_p уровня P отвечает соотношению

$$P\{x_p^{\text{в}} \geqslant x_p\} = \beta. \quad (78)$$

Соотношение (78) означает, что при статистической обработке каждых 100 совокупностей результатов измерений ХМС в среднем для 100 β совокупностей истинные значения x_p не будут превышать оценки $x_p^{\text{в}}$. Нижняя доверительная граница $x_p^{\text{н}}$ для квантили x_p уровня P отвечает соотношению

$$P\{x_p^{\text{н}} \leqslant x_p\} = \beta, \quad (79)$$

β — уровень доверительной вероятности. Обычно $\beta=0{,}9$ или $\beta=0{,}95$.

Доверительные оценки $x_p^в$, $x_p^н$ рассчитывают на основе выбранного гипотетического распределения по оценкам его параметров. Аналогичный смысл имеют доверительные границы для параметров распределений.

2.5.2.2 *Нормальное распределение*

Верхнюю и нижнюю односторонние доверительные границы квантили уровня P рассчитывают по следующим формулам [8]:

$$x_p^в = \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot t'_\beta [n-1,\ z_p\sqrt{n}]; \qquad (80)$$

$$x_p^н = \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot t'_{1-\beta} [n-1,\ z_p\sqrt{n}], \qquad (81)$$

где t'_β $[f, \Delta]$ — квантиль уровня β нецентрального распределения Стьюдента с $f=n-1$ степенями свободы и с параметром нецентральности $\Delta = z_p\sqrt{n}$;

z_p — квантиль уровня P нормированного нормального распределения;

$\hat{a}$, $\hat{\sigma}$ — оценки параметров нормального распределения.

2.5.2.3. Для полной выборки значения $t'_f [f, \Delta]$ определяют по таблицам [8, 9]. При $n \geqslant 20$ используют нормальную аппроксимацию по следующей формуле [10]:

$$t'_{\beta,1-\beta} \cong \frac{\left(1-\frac{1}{4f}\right)\Delta + z_{\beta,1-\beta}\sqrt{\left(1-\frac{1}{4f}\right)^2 - \frac{z_\beta^2}{2f} + \frac{\Delta^2}{2f}}}{\left(1-\frac{1}{4f}\right)^2 - \frac{z_\beta^2}{2f}}, \qquad (82)$$

где $z_{\beta,\,1-\beta}$ — квантиль уровня β, $1-\beta$ нормированного нормального распределения.

2.5.2.4. Для генерального среднего значения a рассчитывают двусторонние доверительные границы по формуле:

$$\hat{a} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{1-\beta}{2}} < a < \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\beta}{2}}, \qquad (83)$$

где β — двусторонняя доверительная вероятность;

t_p — квантиль уровня P центрального распределения Стьюдента с числом степеней свободы $f=n-1$. Значение t_p определяют по табл. 22 приложения.

2.5.2.5. Двусторонние доверительные границы для генеральной дисперсии рассчитывают по следующей формуле [4]:

$$\hat{\sigma}^2 \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}} < \sigma^2 < \hat{\sigma}^2 \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}}, \qquad (84)$$

где β — двусторонняя доверительная вероятность;

χ^2_p — квантиль уровня P распределения хи-квадрат с $f=n-1$ степенями свободы. Значение χ^2_p определяют по табл. 23 приложения. Границы доверительных интервалов для генерального среднего квадратического отклонения σ рассчитывают путем извлечения квадратного корня из значений доверительных границ для генеральной дисперсии.

Пример 6. В результате усталостных испытаний 20 образцов из сплава АВ при амплитуде циклического напряжения $\sigma_a = 200$ МПа измерены значения долговечностей до разрушения ($N \cdot 10^{-5}$) в циклах: 1,77; 1,82; 2,10; 2,11; 2,28; 2,47; 2,64; 2,73; 2,85; 2,91; 2,97; 3,05; 3,13; 4,04; 4,10; 4,15; 4,67; 4,73; 5,24.

Необходимо произвести статистическую обработку результатов на основе нормального распределения логарифма долговечности $Y=\lg N$

$$\hat{a}_l = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \lg N_i = \frac{109{,}4}{20} = 5{,}47;$$

$$\hat{\sigma}_l = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (\lg N_i - 5{,}47)^2} = 0{,}14.$$

Оценки медианы и квантили уровня $P=0{,}01$ рассчитывают по формуле (75):

$$\lg \hat{N}_{0,5} = 5{,}47 + 0 \cdot 0{,}14 = 5{,}47; \quad \hat{N}_{0,5} = 2{,}95 \cdot 10^5 \text{ ц},$$

$$\lg \hat{N}_{0,01} = 5{,}47 - 2{,}326 \cdot 0{,}14 = 5{,}14; \quad \hat{N}_{0,01} = 1{,}39 \cdot 10^5 \text{ ц}.$$

По формуле (81) рассчитывают нижние доверительные границы для медианы и квантили ($\beta=0{,}9$):

$$\lg N^{\text{н}}_{0,5} = 5{,}47 - 1{,}33 \frac{0{,}14}{\sqrt{20}} = 5{,}43; \quad N^{\text{н}}_{0,5} = 2{,}68 \cdot 10^5 \text{ ц},$$

$$\lg N^{\text{н}}_{0,01} = 5{,}47 - 13{,}7 \frac{0{,}14}{\sqrt{20}} = 5{,}04; \quad N^{\text{н}}_{0,01} = 1{,}098 \cdot 10^5 \text{ ц}.$$

Квантили распределения Стьюдента рассчитывают по формуле (82).

2.5.2.6. В общем случае многократно-цензурированной справа выборки при $n \geqslant 20$ верхнюю и нижнюю односторонние довери-

тельные границы квантили уровня P рассчитывают по формулам (80), (81), где

$$t'_{\beta,1-\beta}=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B\cdot C_1}}{B}, \qquad (85)$$

$$A=\left[1-\frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right]\Delta-\frac{z_\beta^2\,\nu'_{12}}{\sqrt{n}};\ \Delta=z_p\sqrt{n}, \qquad (86)$$

$$B=\left[1-\frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right]^2-\frac{z_\beta^2\,\nu'_{22}}{n-1},\ C_1=\Delta^2-z_\beta^2\,\nu'_{11}. \qquad (87)$$

2.5.2.7. При объемах испытаний $n\leqslant 20$ доверительные границы рассчитывают с помощью метода Монте-Карло обращением к подпрограмме DOVNB. В качестве первого приближения используют квантили, рассчитанные по формуле (85).

Пример 7. Вычислить значение квантили $t'_{\beta,1-\beta}$ для оценки нижней доверительной границы квантили уровня $P=0{,}01$ нормального распределения. Объем однократно цензурированной выборки 1 типа $n=15$. Степень цензурирования выборки $h=\frac{r}{n}=0{,}5$.

Значения ν'_{11}, ν'_{12}, ν'_{22} рассчитывают по формулам (45—48) при $z\ (h=0{,}5)=0$. Первое приближение квантили $t'_{\text{прибл.}}$ рассчитывают по формуле (85). Обращением к подпрограмме DOVNB методом Монте-Карло рассчитывают квантиль $t'_{1-\beta}$. Значения указанных параметров составляют

$$\nu'_{11}=1{,}5171;\qquad \nu'_{22}=1{,}2415;\qquad \nu'_{12}=-0{,}6052;$$

$$t'_{\text{прибл.}}=-14{,}873;\qquad t'_{1-\beta}=-14{,}1329.$$

2.5.2.8. Приближенные доверительные границы для квантилей трехпараметрических распределений логнормального и Вейбулла — Гнеденко рассчитывают по формулам:

$$x_p^{\text{в,н}}\cong e^{\ln\hat{c}+\frac{1}{\hat{b}\sqrt{n}}t'_{\beta,1-\beta}}+\hat{x}_0 \quad \text{— для распределения Вейбулла — Гнеденко} \qquad (88)$$

$$x_p^{\text{в,н}}\cong e^{\hat{a}_l+\frac{\hat{\sigma}_l\,t'_{\beta,1-\beta}}{\sqrt{n}}}+\hat{x}_0 \quad \text{— для логарифмического нормального распределения,} \qquad (89)$$

где $t'_{\beta,1-\beta}$ рассчитывают по формуле (85) при:

$$A=\left[1-\frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right]\Delta-\frac{z_\beta^2}{\sqrt{n}}\left(\nu'_{12}+\frac{\nu'_{23}}{\hat{x}_p-\hat{x}_0}\right); \qquad (90)$$

$$B=\left[1-\frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right]^2-\frac{z_\beta^2}{n-1}\nu'_{22};$$

$$C_1=\Delta^2-z_\beta^2\left[\nu'_{11}+\frac{\nu'_{33}}{(\hat{x}_p-\hat{x}_0)^2}+\frac{2\nu'_{13}}{\hat{x}_p-\hat{x}_0}\right];$$

$\Delta=z_p\sqrt{n}$ — для логарифмического нормального распределения;

$\Delta=(\ln\ln\frac{1}{1-p})\sqrt{n}$ — для распределения Вейбулла — Гнеденко;

ν'_{ij} — элементы асимптотической матрицы оценок $\hat{a}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{x}_0$ по формуле (72) и $\hat{a}_l$, $\hat{\sigma}_l$, $\hat{x}_0$ по формуле (46).

Для двухпараметрических распределений все элементы матрицы ν'_{ij}, имеющие индекс «3», отсутствуют.

2.5.2.9. При использовании МНК-оценок доверительные границы определяют аналогично. При этом элементы матрицы ν'_{ij}, i, $j=1, 2$ рассчитывают по формуле (63).

2.5.2.10. Квантили $t'_{\beta,\,1-\beta}$ при определении доверительных границ на основе МНК-оценок определяют методом Монте-Карло обращением к подпрограмме DOVV. В качестве первого приближения используют формулу (85), где

$\Delta=z_p\sqrt{n}$ — для нормального и логарифмически нормального распределений;

$\Delta=(\ln\ln\frac{1}{1-p})\sqrt{n}$ — для распределения Вейбулла — Гнеденко.

Пример 8. Вычислить значения квантили $t'_{1-\beta=0,1}$ для оценки нижней доверительной границы квантили уровня $P=0{,}01$ распределения Вейбулла — Гнеденко на основе МНК-оценок. Объем однократно цензурированной выборки II типа $n=18$. Число наблюдаемых значений случайной величины $k=14$.

В соответствии с п. 2.5.2.10 необходимые параметры вычисляют методом Монте-Карло обращением к подпрограмме DOVV:

$\nu'_{11}=0{,}3154$; $\nu'_{22}=0{,}2466$; $\nu'_{12}=0{,}01085$; $t'_{\text{прибл.}}=-23{,}396$; $t'_{1-\beta}=-26{,}7727$.

2.5.2.11. Свободные от распределения (непараметрические) доверительные границы для квантили уровня P.

Двусторонний доверительный интервал для квантили x_p является свободным от распределения, если x_r, x_s — значения по-

рядковых статистик $x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots, x_p, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_n$ в выборке объема n из произвольного непрерывного распределения $r<s$ [1]:

$$p\{x_p^н \leqslant x_p \leqslant x_p^в\} = p\{x_r \leqslant x_p \leqslant x_s\} = \beta, \qquad (91)$$

где β — доверительная вероятность, т. е. вероятность накрыть квантиль x_p интервалом x_r, x_s.

Значение β рассчитывают по формуле [1]:

$$\beta = \sum_{i=r}^{s-1} c_i^n P^i (1-P)^{n-i}, \qquad (92)$$

где $$c_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad (93)$$

При использовании симметрично расположенных порядковых статистик $s=n-r+1$.

В частном случае медианы распределения $P=0{,}5$:

$$\beta = (0{,}5)^n \sum_{i=r}^{s-1} c_i^n. \qquad (94)$$

При заданных r, s, n, p по формуле (92) находят вероятность β, с которой интервал x_r, x_s накрывает квантиль x_p. При заданных n, p, β с помощью ЭВМ вычисляют значения r, s, определяющие наименьший интервал для квантили и наилучшее приближение к заданному значению доверительной вероятности β.

Пример 9. Для $n=30$ определить наименьший интервал x_r, x_s с целью оценки квантили уровня $P=0{,}1$ с доверительной вероятностью $\beta=0{,}9$.

В соответствии с пп. 2.4.8 и 2.5.2.11 с помощью ЭВМ обращением к подпрограмме Р24А88 вычисляют

$$i=3,\ \alpha_p = 0{,}1,\ \hat{x}_{0{,}1} = 0{,}9\,x_3 + 0{,}1\,x_4,\ r=1,\ s=6.$$

Расчетное значение доверительной вероятности составляет

$$\beta_{расч} = 0{,}8844.$$

2.5.2.12. Свободные от распределения двусторонние доверительные границы для квантили x_p в случае однократно цензурированной справа выборки I типа рассчитывают по формуле (91). Доверительную вероятность β рассчитывают по формуле

$$\beta = \sum_{k=s}^{n} h^k (1-h)^{n-k} c_k^n \left\{ \sum_{i=r}^{s-1} c_i^k P^i (1-P)^{k-i} \right\}, \quad r<s\leqslant k<n. \qquad (95)$$

Вычисления производят с помощью ЭВМ обращением к подпрограмме Р24А37.

2.5.2.13. Свободные от распределения толерантные интервалы. Толерантными границами называют такие $x^н$, $x^в$ границы, о которых с вероятностью β утверждают, что доля распределения не меньше γ содержится между ними (1).

$$P\{[F(x_s)-F(x_r)]\geqslant\gamma\}=\beta, \tag{96}$$

где $F(x)$ — непрерывная функция распределения случайной величины X;

γ — минимальная накрываемая доля $F(x)$;

$x_r=x^н$, $x_s=x^в$ — толерантные границы;

β — вероятность накрытия доли γ.

Значение β рассчитывают по формуле [1]:

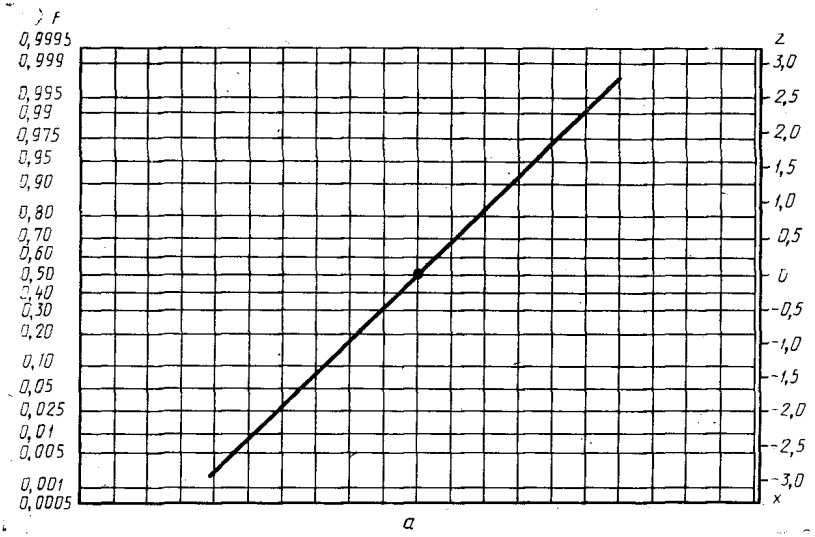
$$\beta=\sum_{i=0}^{s-r-1} c_i^n \gamma^i(1-\gamma)^{n-i}. \tag{97}$$

2.6. Построение графика функции распределения на вероятностной сетке (9)

2.6.1. При построении вероятностной сетки для нормального распределения вдоль оси абсцисс в равномерном или логарифмическом масштабе наносят шкалу значений случайной величины X, а по оси ординат в равномерном масштабе шкалу значений нормированной величины $z=\frac{x-a}{\sigma}$. Параллельно со шкалой z строят шкалу функции нормального распределения, значения которой определяют по формуле (4) или по табл. 20 приложения для соответствующих значений z (черт. 1, 2).

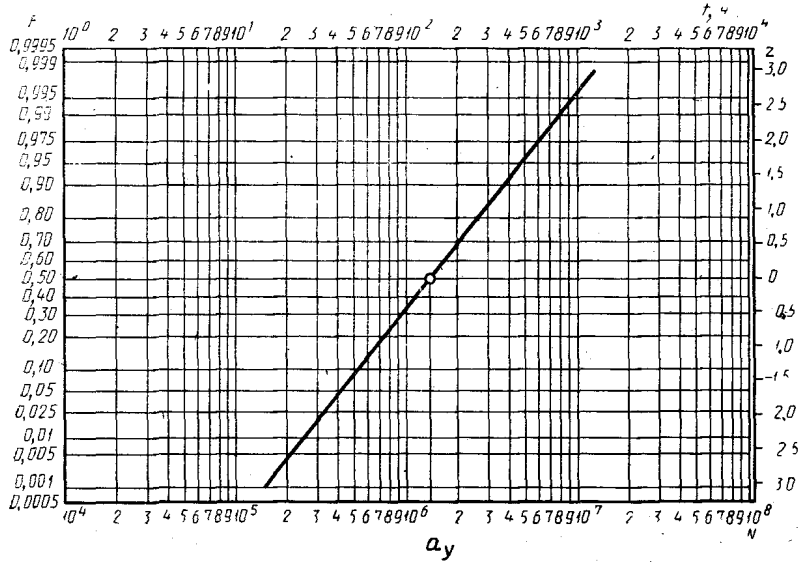
2.6.2. При построении вероятностной сетки для трехпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко вдоль оси абсцисс в равномерном масштабе располагают шкалу значений величины $\ln(x-x_0)$ или в логарифмическом масштабе шкалу значений $x-x_0$. Вдоль оси ординат в равномерном масштабе строят шкалу величины $y=\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}$ и шкалу соответствующих значений функции распределения $F(x)$. График функции распределения Вейбулла — Гнеденко на вероятностной сетке в соответствии с уравнением (71) изображают прямой с угловым коэффициентом b, проходящей через точку с координатами $x-x_0=c$ и $y=0$ $[F(x)=0{,}632]$ (черт. 3).

Вероятностная сетка для нормального распределения



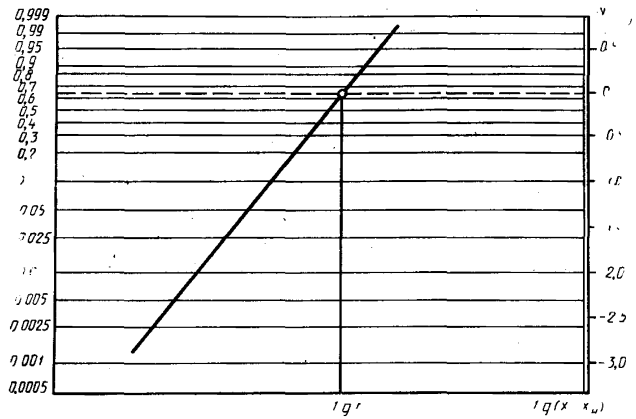
Черт. 1

Вероятностная сетка для логарифмически нормального распределения



Черт. 2

Вероятностная сетка для трехпараметрического распределения Вейбулла—Гнеденко



Черт. 3

2.6.3. Результаты механических испытаний представляют в виде эмпирической функции распределения на вероятностной сетке. С этой целью значения механических характеристик располагают в вариационный ряд. Для каждого члена вариационного ряда по формуле $W(x)=\frac{i-0,5}{n}$ или $W(x)=\frac{3i-1}{3n+1}$, или $W(x)=\frac{i-0,375}{n+0,25}$ рассчитывают оценку вероятности P, роль которой играет накопленная частость $W(x)$. Затем на вероятностную сетку наносят экспериментальные точки, абсциссами которых служат значения механической характеристики, а ординатами — оценки вероятности P (накопленная частость $W(x)$).

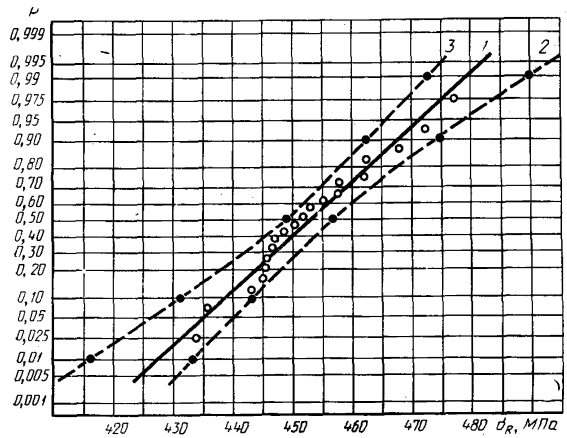
2.6.4. Графической оценкой функции нормального распределения (4) является эмпирическая функция распределения, которую на нормальной вероятностной сетке изображают прямой линией в соответствии с формулой (75).

Пример 10. В результате испытаний на разрыв 20 образцов из дюралюминиевого прессованного профиля измерены значения временных сопротивлений $\sigma_в$, МПа: 434, 436, 443, 445, 445, 446, 447, 447, 448, 451, 452, 453, 456, 456, 458, 458, 462, 462, 468, 472, 477. По-

строить эмпирическую функцию распределения, если $\hat{a}$=453 МПа, $\hat{\sigma}$=11,26 МПа.

Экспериментальные значения наносят на нормальную вероятностную сетку (черт. 4). Первая нижняя точка, соответствующая первому образцу вариационного ряда, имеет координаты σ_{B_1} = =453 МПа и $\hat{P}_1$=0,025. Экспериментальные точки аппроксимируют прямой линией на основании формулы (75).

90 %-ная доверительная область распределения предела прочности образцов из дюралюминиевого профиля на нормальной вероятностной сетке



1 — эмпирическая функция распределения; *2* — правая граница доверительной области; *3* — левая граница доверительной области

Черт. 4

Пример 11. В условиях примера 10 произвести оценку квантилей временного сопротивления для уровней P=0,01; 0,1; 0,5; 0,9; 0,99. Для β=0,95 определить нижние и верхние доверительные границы квантилей. Построить доверительную область для функции распределения временного сопротивления.

По табл. 21 приложения находят значения квантилей нормированного нормального распределения для указанных вероятностей: $z_{0,01}$ =—2,326; $z_{0,1}$ =—1,282; $z_{0,5}$ =0; $z_{0,9}$=1,282; $z_{0,99}$ =2,326.

Оценку квантилей производят по формуле (75):

$$\hat{\sigma}_{в_{0,01}} = 453 - 2{,}326 \cdot 11{,}26 = 427 \text{ МПа},$$

$$\hat{\sigma}_{в_{0,1}} = 453 - 1{,}282 \cdot 11{,}26 = 439 \text{ МПа},$$

$$\hat{\sigma}_{в_{0,5}} = 453 \text{ МПа},$$

$$\hat{\sigma}_{в_{0,9}} = 453 + 1{,}282 \cdot 11{,}26 = 467 \text{ МПа},$$

$$\hat{\sigma}_{в_{0,99}} = 453 + 2{,}326 \cdot 11{,}26 = 479 \text{ МПа}.$$

По формуле (82) рассчитывают значения $t'_{0,95}$. Для $P=0{,}99$; 0,9; 0,5; 0,1; 0,01 они равны соответственно 14,734; 8,616; 1,731; —3,842; —7,824. По формуле (80) находят односторонние доверительные границы квантилей временного сопротивления указанных вероятностей:

$$\sigma^{в}_{в_{0,99}} = 490 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{в}_{в_{0,9}} = 475 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{в}_{в_{0,5}} = 457 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{в}_{в_{0,1}} = 443 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{в}_{в_{0,01}} = 433 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{н}_{в_{0,99}} = 473 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{н}_{в_{0,9}} = 463 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{н}_{в_{0,5}} = 449 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{н}_{в_{0,1}} = 431 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{н}_{в_{0,01}} = 416 \text{ МПа}.$$

На черт. 4 штриховыми линиями *2* и *3* показаны верхние ($\beta = 0{,}95$) и нижние ($1-\beta = 0{,}05$) односторонние доверительные границы квантилей временного сопротивления, а область, заключенная между этими линиями, представляет собой 90 %-ную доверительную область функции распределения временного сопротивления.

2.7. Определение объема испытаний

2.7.1. При определении минимального необходимого объема выборки следует исходить из целей испытаний.

2.7.2. Если цель планируемых испытаний — оценка среднего квадратического отклонения ХМС, то объем выборки n для построения интервальной оценки среднего квадратического отклонения σ (см. п. 2.5.2.5) с заданной относительной погрешностью Δ определяют по табл. 24 приложения [4] для заданного значения доверительной вероятности β. При этом

$$(1+\Delta)^2 = \frac{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(f)}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(f)}. \qquad (98)$$

Если истинное значение математического ожидания a известно, то $n=f$, если a неизвестно, то $n=f+1$.

2.7.3. Если целью испытаний является оценка квантильных значений ХМС, то объем испытаний определяют на основе нормального распределения по формулам (см. п. 2.5.2.2):

$$\delta_p = z_p - t'_{1-\beta}[n-1;\ z_p\sqrt{n}]\,\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{для } P \leqslant 0{,}5; \qquad (99)$$

$$\delta_p = t'_{\beta}[n-1,\ z_p\sqrt{n}]\,\frac{1}{\sqrt{n}} - z_p \quad \text{для } P \geqslant 0{,}5, \qquad (100)$$

где δ_p — максимальная ошибка оценки квантили в долях выборочного среднего квадратического отклонения

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - x_p^{\text{н}}}{s} \quad \text{для } P \leqslant 0{,}5; \qquad (101)$$

$$\delta_p = \frac{x_p^{\text{в}} - \hat{x}_p}{s} \quad \text{для } P \geqslant 0{,}5. \qquad (102)$$

Величину δ_p принимают равной $0{,}2 \div 0{,}3$ при высоких требованиях к точности, $0{,}4 \div 0{,}6$ — при средних требованиях и $0{,}8 \div 1{,}0$ — при низкой точности. Для целей планирования используют данные табл. 25 приложения [9]. Объем испытаний для оценки математического ожидания или медианы ХМС определяют аналогично как для $P=0{,}5$.

2.7.4. Объем испытаний в общем случае цензурированной выборки определяют по уравнениям (99)—(102) с учетом требований пп. 2.5.2.6, 2.5.2.7.

2.7.5. Объем испытаний на основе МНК-оценок для нормального и Вейбулла — Гнеденко распределений определяют по уравнениям (99—102) с учетом требований пп. 2.5.2.8—2.5.2.10.

2.7.6. Объем испытаний для оценки квантили уровня P распределения ХМС с доверительной вероятностью β на основе непараметрического подхода (см. пп. 2.5.2.11, 2.5.2.12) рассчитывают по формулам (92—95) при заданных значениях r, s. С помощью ЭВМ задачу решают обращением к подпрограмме Р24А41.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

3.1. Основные понятия

3.1.1. Нулевая гипотеза (H_0) — основная гипотеза, состоящая, как правило, в предположении, что изучаемые явления не имеют существенных различий.

3.1.2. Альтернативная гипотеза (H_A) — гипотеза, противоположная по смыслу основной гипотезе.

3.1.3. Критическая область — значения выборочной статистики, при которых нулевая гипотеза отвергается.

3.1.4. Ошибка 1-го рода — отклонение нулевой гипотезы в то время, как она верна (вероятность ошибки 1-го рода — α).

3.1.5. Ошибка 2-го рода — принятие нулевой гипотезы в то время, как она неверна (вероятность ошибки 2-го рода — β).

3.1.6. $\beta_1 = 1 - \beta$ — вероятность отклонить неверную нулевую гипотезу называют мощностью критерия.

3.1.7. Критерий значимости — статистика, устанавливающая с определенной вероятностью значимость отличия одного изучаемого явления от другого.

3.1.8. Уровень значимости критерия (α) — вероятность отклонения нулевой гипотезы в то время, как она верна (вероятность ошибки 1-го рода), обычно $\alpha = 0{,}05$, реже 0,01.

3.1.9. Двусторонний критерий значимости — критерий, оценивающий абсолютное расхождение между случайными величинами.

3.1.10. Односторонний критерий значимости — критерий, оценивающий расхождение между двумя случайными величинами, когда одна из них строго больше другой (или строго меньше другой).

3.2. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний

Описываемые в данном разделе критерии применяют для отбрасывания резко выделяющихся результатов испытаний в том случае, когда причина резких отклонений не обнаруживается во время про-

ведения эксперимента, но значение полученной механической характеристики отдельного образца вызывает сомнение. Критерии применяются для случая нормального (логарифмически нормального) распределения исследуемой величины.

При выборках объемом больше 50 отбрасывание выделяющихся результатов наблюдений обычно не проводят, поскольку они не оказывают заметного влияния на точность оценки числовых характеристик и параметров распределения случайной величины.

Нулевой гипотезой при использовании критериев является предположение о том, что наибольшее ($x_{max}=x_n$) или наименьшее ($x_{min}=x_1$) значение вариационного ряда принадлежит той же генеральной совокупности, что и все остальные наблюдения.

3.2.1. *Критерий Смирнова* [4]

Критерий Смирнова применяют в тех случаях, когда имеются лишь статистические данные по рассматриваемой выборке. Для этого рассчитывают u_1 и u_n по формулам:

$$u_1=\frac{\bar{x}-x_1}{s} \qquad (103)$$

или

$$u_n=\frac{x_n-\bar{x}}{s} \qquad (104)$$

где $\bar{x}$ и s — выборочные среднее и среднее квадратическое отклонение (см. пп. 2.4.3—2.4.5).

Рассчитанное значение u сопоставляют с критическим u_α для заданного уровня значимости α и объема выборки n (табл. 26 приложения).

Нулевую гипотезу принимают, если $u\leqslant u_\alpha$ и отвергают, если $u>u_\alpha$.

Пример 12. В табл. 1 приведен вариационный ряд значений предела прочности образцов из дюралюминиевого прессованного профиля.

Требуется проверить с помощью критерия Смирнова принадлежность результата испытания последнего образца той же генеральной совокупности, что и остальных 19 образцов.

Для рассматриваемой выборки $\bar{x}=453$ МПа и $s=11{,}3$ МПа. На основании формулы (104)

$$u_{20}=\frac{477-453}{11{,}3}=2{,}12,$$

Таблица 1

Результаты статических испытаний на разрыв образцов из алюминиевого сплава

i	$\sigma_в$, МПа	i	$\sigma_в$, МПа	i	$\sigma_в$, МПа
1	434	8	447	15	458
2	436	9	448	16	462
3	443	10	451	17	462
4	445	11	452	18	468
5	445	12	453	19	472
6	446	13	456	20	477
7	447	14	458		

т. е. значительно меньше критического значения $u_\alpha = 2{,}38$ для $n = 20$ и уровня значимости $\alpha = 0{,}10$.

Следовательно, результат испытания последнего в вариационном ряду образца не является резко выделяющимся, а оказывается принадлежащим той же генеральной совокупности, что и результаты испытаний остальных 19 образцов выборки.

3.2.2. В тех случаях, когда среднее квадратическое отклонение σ надежно определено по результатам более ранних испытаний, рассчитывают критерий

$$t_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{\sigma} \qquad (105)$$

или

$$t_n = \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma} \qquad (106)$$

и сопоставляют с критическим значением t_α для уровня значимости α и объема выборки n (табл. 27 приложения).

При логарифмически нормальном распределении критерии пп. 3.2.1 и 3.2.2 применяют к логарифмам случайной величины. В формулах (103—106) в этом случае x_1 и x_n — логарифмы наблюденных значений; $\bar{x}$ и s — оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения логарифма случайной величины соответственно; σ — среднее квадратическое отклонение логарифма случайной величины.

3.2.3. С помощью ЭВМ проверку гипотезы по критерию Смирнова проводят обращением к подпрограмме Р24А01.

3.2.4. Для однократно цензурированной справа выборки I типа проверку гипотезы об аномальных наблюдениях проводят по урав-

нениям (103), (104), где $\hat{a}=\bar{x}$, $\hat{\sigma}=s$ — ММП-оценки нормального распределения ХМС. Критические значения критерия определяют методом Монте-Карло обращением к подпрограмме SMIRCR.

3.3. Проверка гипотезы о равенстве (однородности) двух дисперсий

3.3.1. *Критерий Фишера (F-критерий)* [1, 4]

Дисперсии двух совокупностей объемами n_1 и n_2, подчиняющихся нормальному (логарифмически нормальному) закону распределения, сравнивают с помощью двустороннего критерия F. Для этого рассчитывают дисперсионное отношение F по формуле

$$F=s_1^2/s_2^2 — \text{ при } s_1^2>s_2^2 \tag{107}$$

или

$$F=\frac{s_2^2}{s_1^2} — \text{ при } s_2^2>s_1^2, \tag{108}$$

где s_1^2 и s_2^2 — выборочные дисперсии.

Дисперсионное отношение F сопоставляют с критическим значением $F_{1-\alpha}$ для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы $f_1=n_1-1$ и $f_2=n_2-1$, где f_1 — число степеней свободы для большей дисперсии (табл. 28 приложения). В случае соблюдения условия $F\leqslant F_{1-\alpha}$ принимают нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

3.3.2. *Мощность F-критерия* [11].

Нулевая гипотеза заключается в предположении о равенстве генеральных дисперсий H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Альтернативная гипотеза заключается в предположении об отличии двух генеральных дисперсий в соответствии с уравнением

$$H_A: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2;\ \lambda^2=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ или } \lambda^2=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}.$$

При $\lambda^2>1$ мощность критерия β_1 рассчитывается по формуле

$$\beta_1=P\left\{F>\frac{F_\alpha}{\lambda^2}\right\}+P\left\{F<\frac{F_{1-\alpha}}{\lambda^2}\right\}. \tag{109}$$

Пример 13. В результате испытаний двух партий образцов ($n_1=30$ и $n_2=20$), вырезанных из разных мест прессованного профиля, найдены выборочные средние значения и дисперсии временного сопротивления алюминиевого сплава, которые составили $\bar{x}_1=\bar{\sigma}_{в_1}=401$ МПа, $s_1^2=82$ МПа и $\bar{x}_2=\bar{\sigma}_{в_2}=409$ МПа и $s_2^2=71$ МПа соответственно. Требуется оценить значимость расхождения в выбо-

рочных дисперсиях. В рассматриваемом примере $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=1{,}15$. По табл. 28 приложения для $f_1=29$ и $f_2=19$ находят $F_{0,05}=2{,}07$ ($\alpha=0{,}05$), что говорит об отсутствии значимого различия в пределах прочности образцов, т. е. можно принять, что зона профиля равноценна по однородности материала ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$). Для определения мощности критерия принимают альтернативную гипотезу об отличии генеральных дисперсий в два раза $H_A: \sigma_1^2=2\sigma_2^2$, $\lambda^2=2$. Мощность критерия для уровня значимости $\alpha=0{,}05$ и $f_1=29$, $f_2=19$ рассчитывают по формуле (109). Для вычисления критического значения $F_{1-\alpha}$ используют известное тождество [11]:

$$F_{1-\alpha}(f_1,f_2)=\frac{1}{F_\alpha(f_2,f_1)}=\frac{1}{1{,}94}=0{,}515.$$

Мощность критерия равна

$$\beta_1=P\{F\geqslant 1{,}035\}+P\{F<0{,}257\}.$$

Поскольку F-распределение весьма слабо табулировано, для определения мощности критерия используют достаточно тесную нормальную аппроксимацию [10]

$$\beta_1=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \qquad (110)$$

где

$$z_1=\frac{\left[(2f_2-f_1)\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{F_\alpha}{\lambda^2}\right]^{1/2}-(2f_1-1)^{1/2}}{\left(1+\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{F_\alpha}{\lambda^2}\right)^{1/2}}, \qquad (111)$$

$$z_2=\frac{\left[(2f_2-f_1)\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{F_{1-\alpha}}{\lambda^2}\right]^{1/2}-(2f_1-1)^{1/2}}{\left(1+\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{F_{1-\alpha}}{\lambda^2}\right)^{1/2}}. \qquad (112)$$

Уравнение (110) записывают в следующем виде

$$\beta_1=1-\Phi(z_2)+\Phi(z_1), \qquad (113)$$

где $\Phi(z)$ — значение функции Лапласса (табл. 20 приложения).

По уравнениям (111), (112) определяют $z_1=-3{,}165$; $z_2=0{,}0594$. Далее по табл. 20 определяют $\Phi(z_1)=0{,}00079$; $\Phi(z_2)=0{,}52$. Следовательно мощность критерия равна

$$\beta_1=1-0{,}52+0{,}00079=0{,}48.$$

Это означает, что лишь в 48 случаях из 100 F-критерий при указанных выше условиях отвергнет неверную нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Поскольку это весьма малое значение мощности, решают обратную задачу, т. е. определяют каким должно быть отличие в генеральных дисперсиях λ^2, чтобы F-критерий не менее чем в 95 % случаев отверг неверную нулевую гипотезу, т. е.

$$P\left\{F>\frac{2{,}07}{\lambda^2}\right\}+P\left\{F<\frac{0{,}515}{\lambda^2}\right\}=0{,}95. \qquad (114)$$

Решая уравнение (114) методом последовательного приближения с использованием формулы (110), получают $\lambda^2=4$.

3.4. Проверка гипотезы о равенстве (однородности двух средних значений [1, 11].

3.4.1. *Критерий Стьюдента (t-критерий)*

Критерий Стьюдента (t-критерий) применяют для сравнения средних значений двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных, но равных дисперсиях $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Для этого по выборочным средним $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ и выборочным дисперсиям s_1^2 и s_2^2 рассчитывают величину t

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}, \qquad (115)$$

где

$$s=\left(\frac{f_1s_1^2+f_2s_2^2}{f_1+f_2}\right)^{1/2}, \qquad (116)$$

$n_1=f_1+1$, $n_2=f_2+1$ — объемы выборок.

Полученное значение t-критерия сравнивают с табличным для уровня значимости α и числа степеней свободы $f=f_1+f_2$. Если $|t|\leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (табл. 22 приложения), то нулевую гипотезу о равенстве средних принимают. В противном случае $a_1\neq a_2$. При использовании критерия Стьюдента предварительно проверяют гипотезу о равенстве дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 по п. 3.3.

3.4.2. *Мощность критерия Стьюдента* [1, 8, 12]

Альтернативная гипотеза заключается в предположении о неравенстве средних $a_1\neq a_2$

H_0: $a_1=a_2$;

H_A : $a_1\neq a_2$.

Отличие генеральных средних характеризуется параметром нецентральности Δ, рассчитываемым по формуле

$$\Delta = \frac{|a_1 - a_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \qquad (117)$$

Мощность критерия рассчитывают по формуле

$$\beta_1 = P\{t'[f,\Delta] > t_{\frac{\alpha}{2}}\} + P\{t'[f,\Delta] < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}, \qquad (118)$$

где $t'[f, \Delta]$ — квантиль нецентрального распределения Стьюдента с числом степеней свободы f и параметром нецентральности Δ [8].

Кривые мощности t-критерия представлены на черт. 13 приложения в зависимости от параметра нецентральности $\Phi = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}$, уровня значимости α (0,05 и 0,01) и чисел степеней свободы от 6 до ∞ [8, 4]. Так как второе слагаемое уравнения (118) весьма мало, черт. 13 можно использовать для определения мощности одностороннего t-критерия с уровнем значимости $\alpha = 0{,}025$ и 0,005.

Для решения обратной задачи используют табл. 29 приложения [8]. При этом рассчитывают y по формуле

$$y = -\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{2f}}\left(1 + \frac{t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2f}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (119)$$

Затем по табл. 29 приложения определяют значение величины l в зависимости от значений y, f и β_1 — мощности критерия. Значение параметра нецентральности Δ рассчитывают далее по формуле

$$\Delta = -\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} - l\left(1 + \frac{t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2f}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (120)$$

Пример 14. В условиях примера 13 оценить значимость расхождения в пределах прочности алюминиевого сплава двух выборок.

В связи с равенством дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 рассчитывают по формуле (116) сводную выборочную дисперсию s^2:

$$s^2 = \frac{29 \cdot 82 + 19 \cdot 71}{30 + 20 - 2} = 78.$$

По формуле (115) рассчитывают значение величины t:

$$t = \frac{401 - 409}{\sqrt{78\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20}\right)}} = -3{,}04.$$

На основании табл. 22 приложения находят, что значение $t=3{,}04$ для $f=48$ соответствует значимости $\alpha=0{,}002$, что позволяет отвергнуть гипотезу о равенстве средних значений. Таким образом, расхождения в условиях формирования разных зон прессованного профиля из алюминиевого сплава оказывают значимое влияние на предел прочности материала.

Пример 15. В условиях примера 14 определить, каким должно быть минимальное стандартизованное отклонение генеральных средних $\frac{|a_1-a_2|}{\sigma}$, чтобы $t_{0,05}$-критерий в 95 % случаев отвергнул неверную нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних ($n_1=30$; $n_2=20$) ($f=48$).

Интерполируя между кривыми для $f=30$ и $f=60$, для $\alpha=0{,}05$ по черт. 13 приложения находят, что мощности $\beta_1=0{,}95$ соответствует значение $\Phi=2{,}6$. Это значит, что

$$\frac{|a_1-a_2|}{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\cdot\Phi\cdot\sqrt{2}=1{,}061.$$

Аналогичный результат получают по табл. 29 приложения.

По уравнению (119) рассчитывают y:

$$y=-\frac{1{,}96}{\sqrt{96}\cdot\sqrt{1+\frac{1{,}96^2}{96}}}=-0{,}196.$$

Далее по табл. 29 приложения для $\beta_1=0{,}95$, интерполируя между значениями f, равными 36 и 144, находят, что этому значению y соответствует $l=1{,}634$. Значение Δ далее рассчитывают по формуле (120):

$$\Delta=-\left[-1{,}96-1{,}63\sqrt{1+\frac{1{,}96^2}{96}}\right]=3{,}622;$$

$$\left|\frac{a_1-a_2}{\sigma}\right|=\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\cdot\Delta=1{,}046.$$

Полученный результат показывает, что для обеспечения мощности t-критерия при указанных выше условиях ($\beta_1=0{,}95$) абсолютное значение разности между генеральными средними должно быть не менее $1{,}046\sigma$.

Для приближенного расчета мощности критерия используют нормальную аппроксимацию [10], рассчитанную по формуле (110). При этом

$$z_1 = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{4f}\right)+\Delta}{\left(1+\frac{t^2_{\frac{\alpha}{2}}}{2f}\right)^{1/2}}; \qquad (121)$$

$$z_2 = \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{4f}\right)+\Delta}{\left(1+\frac{t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2f}\right)^{1/2}}. \qquad (122)$$

В условиях примера $z_1=1{,}639$; $z_2=5{,}463$;

$$\beta_1 = 1-\Phi(z_2)+\Phi(z_1)=1-0{,}9999+0{,}95\cong 0{,}95.$$

3.4.3. *Приближенный t-критерий* [11]

С помощью приближенного t-критерия производят проверку равенства средних значений в случае, когда $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Значение величины f рассчитывают по формуле

$$t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^{1/2}}. \qquad (123)$$

Для определения числа степеней свободы используют зависимость

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n_1-1}+\frac{(1-c)^2}{n_2-1}, \qquad (124)$$

где

$$c = \frac{s_1^2/n_1}{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}. \qquad (125)$$

При $|t| \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (табл. 22 приложения) имеем $a_1=a_2$. Если $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ имеем $a_1 \neq a_2$.

3.4.4. В общем случае многократно цензурированной выборки при $n=n_1+n_2 \geqslant 20$ для проверки гипотезы о равенстве средних значений $a_1=a_2$ двух нормально распределенных генеральных совокупностей находят статистику (см. формулу 123), где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2, s_2^2 — ММП-оценки параметров. Если альтернативная гипотеза является

двусторонней H_A : $a_1 \neq a_2$, то для выполнения нулевой гипотезы должны выполняться неравенства $|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ и $|t| < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ Критические значения $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $t_{\frac{\alpha}{2}}$ рассчитывают по формуле (85) для $\Delta = 0$, $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$. При этом

$$\nu'_{11} = c(\nu'_{11})_1 + (1-c)(\nu'_{11})_2;$$

$$\frac{\nu'_{22}}{n-1} = \frac{c^2(\nu'_{22})_1}{n_1-1} + \frac{(1-c)^2}{n_2-1}(\nu'_{22})_2;$$

$$\frac{\nu'_{12}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(1-c)^3}{n_2}} \cdot (\nu'_{12})_2 - \sqrt{\frac{c^3}{n_1}} \cdot (\nu'_{12})_1;$$

c — определяют по уравнению (125);

$(\nu'_{ij})_1$, $(\nu'_{ij})_2$ — определяют по уравнениям (45) — (48) для первой и второй выборок соответственно. Для полной выборки $\nu'_{11} = 1$; $\nu'_{22} = 0{,}5$; $\nu'_{12} = 0$ получают приближенный t-критерий (п. 3.4.3). Мощность двустороннего критерия рассчитывают по формуле (110),

где
$$z_1 = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}\left[1 - \frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right] + \Delta}{\left(\nu'_{11} + \frac{t^2_{\frac{\alpha}{2}}}{n-1}\nu'_{22} + \frac{2t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\nu'_{12}\right)^{1/2}}; \qquad (126)$$

$$z_2 = \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left[1 - \frac{\nu'_{22}}{2(n-1)}\right] + \Delta}{\left(\nu'_{11} + \frac{t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1}\nu'_{22} + \frac{2t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\nu'_{12}\right)^{1/2}}; \qquad (127)$$

$$\Delta = \frac{|a_1 - a_2|}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^{1/2}}.$$

3.5. Проверка значимости отклонения от установленного стандарта

3.5.1. *Проверка значимости отклонения от установленного стандарта среднего* [*11*]

Проверяют гипотезу:

$H_0: a=a_0$, где a_0 — некоторое генеральное значение среднего характеристики механических свойств, обусловленное промышленным стандартом, действующим в данной отрасли машиностроения.

Рассчитывают значение y по формуле

$$y=\frac{\bar{x}-a_0}{s/\sqrt{n}}, \qquad (128)$$

которое сравнивают с критическим значением (табл. 22 приложения). Если $|t|\leqslant t_{1-\alpha}(f)$, то гипотезу о соответствии генерального среднего ХМС стандарту принимают. Если $|t|>t_\alpha(f)$, нулевую гипотезу отвергают.

3.5.2. *Мощность t-критерия*

Мощность критерия против альтернативы $H_A: a_1\neq a_0$ определяют по уравнению (118), где параметр нецентральности Δ рассчитывают по формуле

$$\Delta=\frac{|a-a_0|}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad (129)$$

Все расчеты аналогичны приведенным в п. 3.4.2

3.5.3. *Проверка значимости отклонения от установленного стандарта дисперсии* [*11*]

Проверяют гипотезу:

$H_0: \sigma=\sigma_0^2$, где σ_0^2 — некоторое генеральное значение дисперсии ХМС, обусловленное стандартом, действующим в данной отрасли машиностроения.

Рассчитывают значение χ^2 по формуле

$$\chi^2=\frac{s^2}{\sigma_0^2}, \qquad (130)$$

которое сравнивают с табличным значением $\chi^2_{\alpha,\,f=n-1}$ (см. табл. 23 приложения). Если $\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha,\,f}$, то гипотезу о соответствии ХМС стандарту принимают. Если $\chi^2>\chi^2_{\alpha,\,f}$, то нулевую гипотезу отвергают.

3.5.4. *Мощность критерия* χ^2 [*11*]

Мощность критерия β, против альтернативы $H_A: \sigma^2\neq\sigma_0^2$ рассчитывают по формуле

$$\beta_1=P\left\{\chi^2>\frac{\chi^2_\alpha}{\lambda^2}\right\}+P\left\{\chi^2<\frac{\chi^2_{1-\alpha}}{\lambda^2}\right\}, \qquad (131)$$

где $\lambda^2=\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$.

Пример 16. Установить, каким должно быть отличие генеральной дисперсии ХМС от действующего стандарта σ_0^2, чтобы мощность критерия χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0{,}05$ и числом степеней свободы $f=30$ была не менее 85 %.

Критическое значение критерия $\chi^2_{0,05;\ 30}$ определяют по табл. 23 приложения, при этом $\chi^2_{0,05;\ 30}=43{,}8$ и $\chi^2_{0,95;\ 30}=18{,}5$.

Мощность критерия β_1 определяют по уравнению (131)

$$\beta_1=P\left\{\chi^2>\frac{43{,}8}{\lambda^2}\right\}+P\left\{\chi^2<\frac{18{,}5}{\lambda^2}\right\}=0{,}85;$$

или

$$\beta_1=P\left\{\chi^2>\frac{43{,}8}{\lambda^2}\right\}+1-P\left\{\chi^2>\frac{18{,}5}{\lambda^2}\right\}=0{,}85.$$

Решая уравнение методом последовательных приближений получают, что для обеспечения мощности 85 % отличие генеральной дисперсии от стандарта должно быть не менее чем в два раза ($\lambda^2=2$),

т.е. $P\{\chi^2>21{,}9\}+1-P\{\chi^2>9{,}25\}=0{,}85+1-0{,}99\cong 0{,}85$

3.6. Проверка гипотезы о равенстве (однородности) ряда дисперсий

3.6.1. *Критерий Бартлета* [*1, 9, 11, 13*]

Однородность (равенство) дисперсий ряда выборок из нормально распределенных совокупностей оценивают с помощью критерия Бартлета в случае равного или неравного количества образцов в отдельных выборках. Для этого рассчитывают χ^2 по формулам:

$$\chi^2=\frac{2{,}3026}{c}\left[\lg s^2\left(\sum_{i=1}^{m}n_i-m\right)-\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)\lg s_i^2\right], \qquad (132)$$

где m — количество выборок;

$$c=1+\frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i-1}-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}n_i-m}\right); \qquad (133)$$

$$s^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(n_i-1)s_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}n_i-m}; \qquad (134)$$

s_i^2 — выборочная дисперсия.

Если значение $\chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha,\, f=m-1}$, то гипотеза однородности ряда дисперсий подтверждается. В случае $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\, f}$

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_m^2.$$

3.6.2. Проверку гипотезы с помощью ЭВМ проводят обращением к подпрограмме Р24А28.

3.6.3. *Критерий Кохрена* [*1, 9, 11, 14*]

По сравнению с критерием Барлета критерий Кохрена несколько менее мощный, но более простой. Он используется в случае равенства числа образцов во всех выборках. Для этого рассчитывают значение $G_{\max}$ по формуле

$$G_{\max} = \frac{(s_i^2)_{\max}}{\sum\limits_{i=1}^{m} s_i^2}, \qquad (135)$$

которое сравнивают с критическим значением $G_{\alpha,\, f_1,\, f_2}$ для уровня значимости α и числа степеней свободы $f_1 = m$ и $f_2 = n-1$ (табл. 30 приложения). Гипотеза однородности ряда дисперсий принимается, если

$$G_{\max} < G_{\alpha,\, f_1,\, f_2}.$$

Пример 17. По результатам испытания на растяжение пяти серий по 20 образцов из алюминиевого сплава различных плавок получены значения дисперсий временного сопротивления: $s_1^2 = 154$ МПа; $s_2^2 = 208$ МПа; $s_3^2 = 186$ МПа; $s_4^2 = 197$ МПа; $s_5^2 = 158$ МПа. Требуется оценить значимость влияния плавочных отклонений на дисперсию временного сопротивления алюминиевого сплава. По формуле (135) рассчитывают $G_{\max}$

$$G_{\max} = \frac{208}{154+208+186+197+158} = 0{,}23.$$

По табл. 30 приложения для $\alpha = 0{,}05$; $f_1 = 5$ и $f_2 = 19$ определяют $G_{0{,}05} = 0{,}35$. Таким образом, плавочные отклонения не оказывают существенного влияния на дисперсию временного сопротивления рассматриваемого алюминиевого сплава.

3.7. Проверка гипотезы о равенстве (однородности) ряда средних значений

3.7.1. *Однофакторный дисперсионный анализ* [*1, 8, 11*]

Равенство (однородность) ряда средних значений оценивают с помощью однофакторного дисперсионного анализа результатов испытаний. В основе его лежит предположение нормальности закона распределения характеристик механических свойств и одно-

родности ряда дисперсий. Проверку проводят с помощью критерия F, рассчитываемого по формуле

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \qquad (136)$$

где s_1^2 — дисперсия между партиями, характеризующая рассеяние по факторам (табл. 2).

s_2^2 — внутренняя дисперсия, характеризующая внутреннее рассеяние, связанное со случайными колебаниями внутри партии (табл. 3).

Таблица 2

Порядок расчетов при однофакторном дисперсионном анализе

Номер партии	Результаты испытаний	n_i	$sx_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	$\bar{x}_i = \frac{sx_i}{n_i}$	$ss_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$	$s_i^2 = \frac{ss_i - sx_i^2/n_i}{n_i - 1}$
1	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1j}, \ldots x_{1n_1}$	n_1	sx_1	$\bar{x}_1$	ss_1	s_1^2
2	$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2j}, \ldots, x_{2n_2}$	n_2	sx_2	$\bar{x}_2$	ss_2	s_2^2
.						
.						
.						
i	$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}, \ldots x_{in_i}$	n_i	sx_i	$\bar{x}_i$	ss_i	s_i^2
.						
.						
.						
m	$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_j}, \ldots, x_{mn}$	n_m	sx_m	$\bar{x}_m$	ss_m	s_m^2

Таблица 3

Расчет дисперсий однофакторного дисперсионного анализа

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат (дисперсия)
Между партиями	$Q_1 = \sum_{i=1}^{m} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$f_1 = m - 1$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{f_1}$
Внутри партий	$Q_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_i)^2$	$f_2 = \sum_{i=1}^{m} n_i - m$	$s_2^2 = \frac{Q_2}{f_2}$

Продолжение табл. 3

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат (дисперсия)
Полная	$Q=Q_1+Q_2$	$f=f_1+f_2$	$s^2=\frac{Q}{f}$

Если дисперсионное отношение (136) окажется меньше табличного значения F_α, найденного для уровня значимости α и числа степеней свободы $f_1=m-1$, $f_2=\sum_{i=1}^{m} n_i-m$ (где m — общее число партий; n_i — количество образцов в i-й партии), то $a_1=a_2=\ldots=a_m=a$. В этом случае все рассматриваемые результаты испытаний принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ^2 и a. Оценкой σ^2 служит выборочная полная (общая) дисперсия s^2 (табл. 5), а оценкой a — выборочное общее среднее $\bar{x}$, рассчитываемое по формуле

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} \qquad (137)$$

Если справедливо неравенство $F>F_\alpha$, то гипотеза о равенстве средних значений отвергается. Здесь имеет место m нормально распределенных генеральных совокупностей с общей дисперсией σ^2 и разными средними a_i. Оценкой генеральной дисперсии σ^2 является величина s_2^2, а оценками генеральных средних a_i — выборочные средние $\bar{x}_i$ (табл. 3).

Пример 16. По данным, приведенным в табл. 4, провести дисперсионный анализ с целью проверки равенства средних значений временного сопротивления алюминиевого сплава.

Таблица 4

Результаты статических испытаний на разрыв образцов из 15 плавок алюминиевого сплава

Номер плавки	$\sigma_в$, МПа		Номер плавки	$\sigma_в$, МПа	
	$\bar{x}_i$	s_i^2		$\bar{x}_i$	s_i^2
1	403,2	20,2	4	406,0	21,9
2	412,2	19,6	5	400,0	6,5
3	403,1	4,7	6	407,3	20,1

Продолжение табл. 4

Номер плавки	$\sigma_в$, МПа		Номер плавки	$\sigma_в$, МПа	
	$\bar{x}_i$	s_i^2		$\bar{x}_i$	s_i^2
7	405,4	46,6	12	399,3	49,4
8	401,7	7,6	13	408,4	18,4
9	402,6	26,7	14	401,4	42,6
10	400,5	43,4	15	406,0	15,6
11	403,8	14,9			

$\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 6060{,}9$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i^2 = 358{,}2.$

Учитывая, что число образцов для всех плавок одинаковое ($n=20$), строят критерий однородности дисперсий по формуле (135)

$$G_{max} = \frac{49{,}4}{358{,}2} = 0{,}138.$$

В табл. 30 приложения для $f_1 = n - 1 = 19$ и $f_2 = m = 15$ находят $G_{0,05} = 0{,}139$, что не отвергает гипотезу однородности дисперсий для различных плавок. Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 5.

Таблица 5

Дисперсионный анализ влияния плавочных отклонений на временное сопротивление образцов из алюминиевого сплава

Компонента дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Межплавочная	3464,98	14	$s_1^2 = 247{,}5$
Внутриплавочная	7163,01	285	$s_2^2 = 25{,}1$

Дисперсионное отношение $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{247{,}5}{25{,}1} = 9{,}86$ при $f_1 = 14$ и $f_2 = 285$ превышает $F_{0,01} = 2{,}65$ (табл. 28 приложения). Следовательно, гипотеза о равенстве средних значений отвергается, т. е. колебания в режимах технологии производства полуфабрикатов оказывают значимое влияние на временное сопротивление алюминиевого сплава.

3.7.2. Проверку гипотезы о равенстве ряда средних значений с помощью ЭВМ проводят обращением к подпрограмме Р24А29.

3.7.3. *Мощность F-критерия при однофакторном дисперсионном анализе* [*11, 8*]

Альтернативная гипотеза заключается в предположении об отличии генеральных дисперсий σ_1^2 и σ_2^2:

$$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2; \quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{M\{s_1^2\}}{\sigma^2} = \lambda,$$

где $M\{s_1^2\} = \sigma^2 + \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} n_i \alpha_i^2;$

$\sigma^2 = M\{s_2^2\}$ — общая дисперсия m нормальных совокупностей при неверной нулевой гипотезе.

$\alpha_i = (a_i - \bar{a})^2$ — квадрат разности между генеральным средним значением ХМС i-й системы и общим средним

$$\lambda = \frac{M\{s_1^2\}}{\sigma^2} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \alpha_i^2}{(m-1)\sigma^2}. \qquad (138)$$

В том случае, когда неверна нулевая гипотеза и верна альтернативная, отношение дисперсий $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ подчиняется нецентральному F-распределению [8, 15, 16] с параметром нецентральности Δ и числами степеней свободы f_1 и f_2,

где $$\Delta = (\lambda - 1)(m-1) = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \alpha_i^2}{\sigma^2}. \qquad (139)$$

Когда справедлива нулевая гипотеза, $\Delta = 0$, так как $M\{a_i\} = \bar{a}$. Мощность критерия β_1 рассчитывают по формуле

$$\beta_1 = \int_{F_\alpha} f(F')dF', \qquad (140)$$

где $f(F')$ — плотность нецентрального F-распределения [8]. На черт. 14 приложения представлены кривые мощности F-критерия в зависимости от f_1, f_2, $\varphi = \sqrt{\frac{\Delta}{m}}$ для двух уровней значимости $\alpha = 0{,}01$ и $0{,}05$ [4, 8].

Пример 19. Пусть имеется $m = 6$ плавок с различными значениями временных сопротивлений испытанных образцов ($n_1 = n_2 = \ldots = n_6 = 9$). F-критерий подтверждает гипотезу об однородности

средних значений временных сопротивлений с уровнем значимости $\alpha=0{,}01$. Определить мощность критерия при условии, что отличие в средних значениях временных сопротивлений ведет к увеличению генерального среднего квадратического отклонения не менее чем на 20 %, то есть

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i\alpha_i^2}{N}+\sigma^2}{\sigma^2}}\geqslant 1{,}2$$

или $$\varphi\sqrt{\frac{m}{N}}\geqslant\sqrt{1{,}2^2-1}=0{,}663,$$

где $N=9m=54$, откуда $\varphi=1{,}99$.

Это означает также, что значение параметра $\lambda=\frac{M\{s_1^2\}}{\sigma^2}$, определяющего альтернативную гипотезу, равно:

$$\lambda=1+\frac{\Delta}{m-1}=1+\frac{\varphi^2 m}{m-1}=5{,}752$$

Для $\alpha=0{,}01$; $f_1=6$; $f_2=N-m=48$; $\varphi=1{,}99$ по черт. 18 приложения находим β_1, равное 0,86.

Это означает, что при описанных выше условиях вероятность обнаружить колебания в режимах технологии производства полуфабрикатов составляет не менее 86 % и в 14 % случаев неверная нулевая гипотеза о незначимом влиянии этих колебаний на временное сопротивление может быть принята. Для увеличения мощности критерия необходимо увеличить объем испытаний.

3.8. Критерии согласия

Проверка соответствия опытных данных выбранному виду гипотетического распределения целесообразна при объемах выборки не менее 50. В отдельных случаях проверка согласия возможна и при $n<50$.

Рекомендуется одновременное применение нескольких критериев в тех случаях, когда результаты проверки по одному критерию не позволяют сделать безусловный вывод о согласии опытного и теоретического распределений.

3.8.1. *Критерий Шапиро-Уилка (W)*

Критерий W предназначен для проверки гипотезы о нормальном (логарифмически нормальном) распределениях [1, 9, 17, 18]. При ограниченном объеме опытных данных ($n\leqslant 50$) критерий W является наиболее мощным. Результаты механических испытаний располагают в вариационный ряд

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n. \qquad (141)$$

Для расчета критерия W

$$W = \frac{b^2}{s^2} \qquad (142)$$

определяют величины:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}{n} \qquad (143)$$

и

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i), \qquad (144)$$

где значения a_{n-i+1} для $i=1, k$ берут из табл. 31 приложения. Если n — четное число, $k=n/2$, если n —нечетное число, $k=(n-1)/2$. Вычисленное значение W сравнивают с табличным (табл. 32 приложения). Если W больше табличного значения для данного уровня значимости α и объема выборки n, то нулевая гипотеза принимается. В противном случае нулевая гипотеза отвергается.

3.8.2. Значения коэффициентов a_i в уравнении (144) получают по уравнению

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j V_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j V_{ij}\right)^2\right]^{1/2}}, \qquad (145)$$

где α_j, V_{ij} определяют в соответствии с п. 2.5.1.26. С помощью ЭВМ проверку гипотезы о нормальном распределении ХМС проводят обращением к подпрограмме Р24А45. Критические значения критерия вычисляют методом Монте-Карло.

3.8.3. Для проверки гипотезы о принадлежности результатов испытаний ХМС двухпараметрическому распределению Вейбулла-Гнеденко [6], а также нормальному распределению в случае полной выборки или цензурированной выборки II типа рассчитывают статистику по формуле

$$s = \frac{\sum_{i=\mathrm{int}\left(\frac{r}{2}\right)+1}^{r-1} \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)}{\sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)} \ll s_{\alpha,n,r}, \qquad (146)$$

где α_i — по п. 2.5.1.26;

$-\left(\frac{x}{c}\right)^b$

$y_i = \ln x_i$ — для распределения Вейбулла-Гнеденко $P = 1 - e$;

$y_i = x_i$ — для нормального распределения случайной величины x;

r — число наблюдаемых значений случайной величины в выборке объема n.

В табл. 33 приложения приведены значения разностей $M_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ и критические значения критерия $s_{\alpha, n, r}$ применительно к распределению Вейбулла-Гнеденко.

С помощью ЭВМ проверку гипотезы по критерию (146) проводят обращением к подпрограмме VEIBCR.

Пример 20. В условиях примера 1 (см. п. 2.5.1.12) провести проверку гипотезы о принадлежности результатов испытаний распределению Вейбулла-Гнеденко для случайной величины $x_i = N_i - \hat{N}_0$ и нормальному распределению для случайной величины $x_i = \lg(N_i - \hat{N}_0)$ где $\hat{N}_0 = 632110$ — независимая оценка порога.

Обращением к подпрограмме VEIBCR определяют для распределения Вейбулла-Гнеденко

$s = 0{,}6408$, $s_{0{,}05;\,22;\,22} = 0{,}6409$;

для нормального распределения

$s = 0{,}5213$, $s_{0{,}05;\,22;\,22} = 0{,}6399$,

что свидетельствует о соответствии результатов испытаний распределению Вейбулла-Гнеденко и нормальному распределению. Лучшее соответствие имеет место для нормального распределения.

Пример 21. По результатам испытаний, приведенным в табл. 6, провести проверку гипотезы о нормальном распределении значений относительного сужения ψ_k образцов из алюминиевого сплава АВ.

Таблица 6

Результаты статических испытаний на разрыв образцов из сплава АВ

i	ψ_k	i	ψ_k	i	ψ_k
1	0,275	8	0,305	15	0,340
2	0,280	9	0,308	16	0,360
3	0,285	10	0,310	17	0,390
4	0,290	11	0,313	18	0,409
5	0,292	12	0,315	19	0,420
6	0,298	13	0,320	20	0,430
7	0,299	14	0,327		

По формуле (143) получаем $s^2=0{,}0436$. Для $n=20$ и $k=\frac{n}{2}=10$ из табл. 31 приложения находим значение a_{n-i+1} и по формуле (144) рассчитываем значение $b=0{,}1922$. Критерий

$$W=\frac{b^2}{s^2}=0{,}848$$

меньше $W_{0,01}=0{,}868$, т. е. гипотеза о нормальном распределении величины относительного сужения для сплава АВ не приемлема.

3.8.4. *Мощность критерия Шапиро-Уилка* [*17, 18*]

Мощность критерия W определялась методом статистического моделирования на ЭВМ [18] для объемов испытаний $n=10$, 15, 20, 35 и 50, пятнадцати вариантов альтернативных функций распределения. При этом проводилось 500 повторений. Критерий W сравнивался с восемью конкурирующими критериями. Установлено, что критерий W является наиболее мощным критерием.

3.8.5. *Критерий* χ^2

Критерий согласия χ^2 применяется для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому распределению $F(x)$. В качестве критерия соответствия рассматривают величину [1, 4]

$$\chi^2=\sum_{j=1}^{e}\frac{(n_j-nP_j)^2}{nP_j}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{e}\frac{n_j^2}{P_j}-n. \qquad (147)$$

Для его расчета размах варьирования случайной величины разбивают на интервалы и для каждого из них определяют число наблюдений n_j. Интервалы, содержащие $n_j<5$ объединяют с соседними. Пользуясь оценками параметров функции распределения $F(x)$, определяют оценку вероятности попадания случайной величины в интервал P_j. Расчетное значение χ^2 сопоставляют с критическим $\chi^2_{\alpha,f}$, найденным для уровня значимости α и числа степеней свободы $f=e-d-1$ (e — количество интервалов после их объединения; d — число параметров функции $F(x)$, оцениваемых по данным выборки) (табл. 23 приложения). Если $\chi^2\leqslant\chi^2_{\alpha,f}$, то нулевая гипотеза о соответствии опытных данных выбранному принимается. Если $\chi^2>\chi^2_{\alpha,f}$, то гипотеза отвергается.

3.8.6. *Мощность критерия* [*1, 8, 19, 20, 21, 18*]

Предельная функция мощности критерия χ^2 определяется из уравнения

$$\beta_1=P\{\chi^2_{\alpha,f}\leqslant\chi^{2\prime}\}, \qquad (148)$$

где $\chi^{2\prime}$ — квантиль нецентрального распределения χ^2 с $f=e—d—1$ степенями свободы и параметром нецентральности, определяемым по формуле

$$\Delta=n\sum_{j=1}^{e}\frac{(P_{1j}-P_j)^2}{P_j}, \qquad (149)$$

где P_{1j} — вероятность попадания в j-й интервал, определенная по теоретической функции распределения $F_1(x)$, принимаемой в качестве альтернативной по отношению к исходной функции распределения $F(x)$.

Мощность критерия χ^2 представлена в табл. 34 приложения для уровней значимости $\alpha=0{,}01$ и $0{,}05$ в зависимости от параметра нецентральности Δ и числа степеней свободы f [8]. Строго говоря, табл. 34 предназначена для определения по заданной мощности β_1 искомого значения Δ, т. е. решения обратной задачи. Учитывая, что мощность изменяется в табл. 34 приложения с достаточной частотой и в широких пределах (от 0,25 до 0,99), таблицей можно пользоваться и для решения прямой задачи.

Пример 22. Проверить с помощью критерия согласия χ^2 гипотезу о соответствии распределения величины относительного сужения ψ_k алюминиевого сплава закону Вейбулла. Все расчеты сведены в табл. 7. В связи с малым числом наблюдений последние три интервала объединены в один. Для оценки вероятности попадания в интервал P_j рассчитывают разность значений функции распределения закона Вейбулла на правой и левой границе интервала по формуле

$$\widehat{P}_x=1-e^{-\left(\frac{x}{\widehat{c}}\right)^{\widehat{b}}}, \qquad (150)$$

где $\widehat{c}=0{,}08004$; $\widehat{b}=2{,}5$ — параметры распределения, определенные по данным выборки (см. п. 2.5.1.13).

Значение критерия χ^2 рассчитывают по формуле (147). В данном случае $\chi^2=12{,}967$. В табл. 23 приложения для числа степеней свободы $f=10—2—1=7$ находят, что вычисленное по данным выборки χ^2 меньше критического $\chi^2_{\alpha,f}=14{,}1$ для уровня значимости $\alpha=0{,}05$. Следовательно, опытное распределение может быть описано с помощью закона распределения Вейбулла.

Определить значение мощности критерия β_1 при $\alpha=0{,}05$, $f=7$ в предположении, что истинная функция распределения $F_1(x)$ относительного сужения ψ_k описывается законом Вейбулла с параметрами $c=0{,}09$ и $b=2{,}5$. Вероятность P_{1j} попадания в j-й интервал при альтернативной функции распределения $F_1(x)$ пред-

ставлена в табл. 7. Значение параметра нецентральности Δ рассчитывают по формуле (149) $\Delta=7{,}84656$. По табл. 34 приложения находят, что этому значению Δ для $\alpha=0{,}05$ и $f=7$ соответствует мощность критерия χ^2 $\beta_1=0{,}5$.

3.8.7. При использовании критерия χ^2 затруднительно дать однозначные рекомендации относительно увеличения мощности критерия [1], так как мощность существенно зависит от выбора числа интервалов группировки данных. Увеличение числа интервалов ведет к увеличению параметра нецентральности Δ, а следовательно и мощности критерия. Однако гораздо большее влияние оказывает увеличение при этом числа степеней свободы, так как при данном Δ центральное и нецентральное χ^2-распределение сближаются при возрастании числа степеней свободы и это влияет на мощность сильнее в отрицательной степени. В качестве рекомендации может быть предложен выбор интервалов с равными или примерно равными вероятностями. С учетом последней рекомендации разработана подпрограмма Р24А36 для расчета на ЭВМ критерия χ^2 с равными вероятностями, с оптимизацией выбора числа интервалов группировки данных по параметру мощности критерия.

3.8.8. *Критерий* ω^2

Критерий ω^2 используют при объемах выборки $n\geqslant 50$. Он является более мощным, чем критерий χ^2, однако его использование требует большего объема расчетов.

Статистика ω^2 представляет собой взвешенную сумму квадратов разности между эмпирической $F_n(x)$ и теоретической $F(x)$ функциями распределения

$$\omega^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\psi[F(x)][F_n(x)-F(x)]^2dF(x), \qquad (151)$$

где $\psi[F(x)]$ — весовая функция, область определения которой является область значений функции $F(x)$.

Обычно используют два вида весовой функции

$$\psi=1 \qquad (152)$$

и

$$\psi[F(x)]=\frac{1}{F(x)[1-F(x)]}. \qquad (153)$$

В первом случае ω^2 называют статистикой Смирнова, во втором случае — статистикой Андерсона-Дарлинга и обозначают через A_n^2 [8, 12].

Весовую функцию (153) используют в тех случаях, когда больший интерес представляет соответствие эмпирической функ-

Таблица 7

Последовательность расчета критерия χ^2 и его мощности β_1

Номер интервала	Граница интервала $x=\psi_k$	Число наблюдений в интервале n_j	Оценка вероятности попадания в интервал P_j	$\frac{n_j^2}{P_j}$	Оценка вероятности попадания в интервал P_{1j}	$W(x_j)=\frac{n_j}{n}+\frac{n_{j-1}}{n}$	$F(x_j)$	$F_1(x_j)$
1	0—0,04	9	0,16185	500,4634	0,1234	0,111	0,03073	0,023
2	0,04—0,05	10	0,10355	965,7170	0,0821	0,234	0,211	0,162
3	0,05—0,06	6	0,11984	300,4005	0,0988	0,308	0,324	0,253
4	0,06—0,07	6	0,12571	286,3734	0,1091	0,382	0,448	0,358
5	0,07—0,08	8	0,12071	530,1963	0,1118	0,481	0,572	0,469
6	0,08—0,09	9	0,10668	759,2800	0,1069	0,592	0,687	0,579
7	0,09—0,10	9	0,08697	931,3556	0,0957	0,703	0,784	0,681
8	0,10—0,11	8	0,06545	977,8456	0,0804	0,802	0,860	0,770
9	0,11—0,12	6	0,04545	792,0792	0,0634	0,876	0,915	0,842
10	0,12—0,13	5	0,06379	1567,6438	0,1284	0,999	0,975	0,936
11	0,13—0,14	2	—	—	—	—	—	—
12	0,14—0,15	3	—	—	—	—	—	—
Σ		81	1,00	7611,3547	1,00			

$$\chi^2=\frac{7611,35}{81}-81=12,97; \qquad \Delta=81\cdot 0,0968=7,846.$$

ции распределения теоретической в области крайних значений случайной величины (на «хвостах» распределения).

3.8.8.1. При использовании формул (151) и (152) для проверки гипотезы соответствия (H_0) эмпирического распределения нормальному закону, параметры которого оценивают по выборке, рассчитывают величину ω^2 по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} [F(x) - W(x)]^2, \qquad (154)$$

где $W(x)$ накопленная частость (см. п. 2.6.3)
и составляют неравенство

$$\omega^2 \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \leqslant W_\alpha^2 . \qquad (155)$$

Если неравенство (155) выполняется, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае H_0 отвергают.

В выражении (155) W_α^2 представляет собой критическое значение критерия ω^2 для уровня значимости α (для $\alpha=0{,}15$; $W_\alpha^2 = 0{,}091$; $\alpha=0{,}1$; $W_\alpha^2 = 0{,}104$; $\alpha=0{,}05$; $W_\alpha^2 = 0{,}126$; $\alpha=0{,}01$; $W_\alpha^2 = 0{,}178$ [8, 23]).

3.8.8.2. При использовании формул (151) и (153) для проверки гипотезы соответствия эмпирического распределения нормальному закону, параметры которого оцениваются по выборке, рассчитывают величину ω^2 по формуле

$$\omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln[1 - F(x_i)] \right\} \qquad (156)$$

и составляют неравенство

$$\left(\omega^2 - \frac{0{,}7}{n} \right) \left(1 + \frac{3{,}6}{n} - \frac{8{,}0}{n^2} \right) \ll A_\alpha . \qquad (157)$$

Если неравенство (157) выполняется, то нулевую гипотезу H_0 принимают, в противном случае H_0 отвергают.

В выражении (157) A_α представляет собой критическое значение критерия ω^2 для уровня значимости α (для $\alpha=0{,}15$; $A_\alpha = 0{,}576$; $\alpha=0{,}10$; $A_\alpha = 0{,}656$; $\alpha=0{,}05$; $A_\alpha = 0{,}787$; $\alpha=0{,}01$; $A_\alpha = 1{,}092$ [8]).

3.8.9. *Критерий Колмогорова-Смирнова*

Критерий Колмогорова-Смирнова применяют при объеме выборки $n \geqslant 100$.

Проверяют нулевую гипотезу о соответствии эмпирического (выборочного) распределения $F_n(x) = W(x)$ нормальному закону, параметры которого оценивают по выборке. С этой целью для

наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины подсчитывают накопленную частость $W(x_i)=i/n$ и значение функции нормального распределения $F(x_i)$, в качестве которой используют их оценки. Рассчитывают статистику

$$D^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{i}{n}-F(x_i)\right],$$

$$D^-=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[F(x_i)-\frac{i-1}{n}\right], \qquad (158)$$

$$D=\max[D^+, D^-]$$

и составляют неравенство

$$D\left(\sqrt{n}-0{,}01+\frac{0{,}85}{\sqrt{n}}\right)\leqslant D_\alpha. \qquad (159)$$

Если неравенство (159) выполняется, то нулевую гипотезу H_0 *принимают, в противном случае* H_0 отвергают.

В выражении (135) D_α представляет собой критическое значение критерия для уровня значимости α (для $\alpha=0{,}15$; $D_\alpha=0{,}775$; $\alpha=0{,}10$; $D_\alpha=0{,}819$; $\alpha=0{,}05$; $D_\alpha=0{,}895$; $\alpha=0{,}01$; $D_\alpha=1{,}035$ [8, 23]).

Пример 23. В примере 22 рассматривалась выборка из 100 испытаний, в результате которых определялись значения относительного сужения площади поперечного сечения при разрушении. Проверить соответствие опытных данных нормальному закону распределения, если $D=0{,}171$.

По формуле (135) находят $D\left(\sqrt{n}-0{,}01+\frac{0{,}85}{n}\right)=0{,}171(10-0{,}01+0{,}085)=1{,}723$, что существенно превышает $D_{0{,}01}=1{,}035$. Следовательно, эмпирическое распределение не соответствует нормальному закону.

3.8.10. *Мощность критериев* D, ω^2, A_n^2

Мощность критериев определялась методом статистического моделирования (Монте-Карло) на ЭВМ [24, 25, 26]. Установлено, что критерии D и ω^2 являются наиболее мощными для альтернатив со «сдвигом». Критерий A_n^2 является наиболее мощным в области имеющихся рассогласований на «хвостах» эмпирического распределения. При этом мощность критерия ω^2 выше чем D.

3.9. Непараметрические критерии для проверки статистических гипотез

3.9.1. *Критерий знаков для медианы* [*1, 4, 23, 27, 28*]

При использовании критерия знаков рассматривают последовательность, состоящую из n независимых испытаний, в каждом

из которых могут осуществиться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равновероятности положительного и отрицательного исходов. Пусть проведены испытания первой (X) и второй (Y) совокупностей и получены значения ХМС, расположенные в порядке испытаний

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в n пар испытаний получены k положительных разностей, m — отрицательных и l — нулевых; $n_1=n-l$. Нулевую гипотезу о равенстве медиан ХМС двух совокупностей не отвергают, если число k попадает в область допустимых значений $k_\alpha^н$, $k_\alpha^в$ с уровнем значимости α. Границы допустимых значений рассчитывают по формулам:

$$\alpha=0{,}5^{n_1}\sum_{i=0}^{k_\alpha^н} c_{n_1}^i, \qquad (160)$$

$$c_{n_1}^i=\frac{n_1!}{i!\,(n_1-i)!}, \quad k_\alpha^в=n_1-k_\alpha^н. \qquad (161)$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $P=0{,}5$ при альтернативной гипотезе H_A : $P<0{,}5$ должно выполняться неравенство $k\geqslant k_\alpha^н$. При альтернативной гипотезе H_A: $P>0{,}5$ должно выполняться неравенство $k\leqslant k_\alpha^в=n_1-k_\alpha^н$. При двусторонней альтернативной гипотезе выполняется неравенство H_A : $P\neq 0{,}5$; $\min\{k, n_1-k\}\geqslant k_\alpha^н$ с уровнем значимости 2α.

Для проверки гипотезы с помощью ЭВМ с вычислением точных критических значений $k_\alpha^н$, $k_\alpha^в$ используют обращение к подпрограмме SIGNE.

Критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов испытаний ХМС общей генеральной совокупности.

Пример 24. На двух машинах одной конструкции при одинаковых режимах было испытано на усталость по 10 идентичных образцов. Значения чисел циклов до разрушения в порядке их испытания и знаки разностей соответствующих пар долговечностей составляют ($N\cdot 10^{-6}$):

машина № 1: 3,18; 2,53; 4,06; 7,92; 1,60; 1,38; 3,91; 2,74; 1,17; 4,47;

машина № 2: 3,92; 1,65; 5,22; 2,86; 1,60; 6,76; 3,99; 2,07; 3,85; 4,78.

Знак — + — + 0 — — + — —

$k=3$, $m=6$, $l=1$, $n_1=9$

Обращением к подпрограмме SIGNE для $\alpha=0{,}05$; $n_1=9$, находят $k_\alpha^н=2$, $k_\alpha^в=7$, что не дает основания для отбрасывания нулевой гипотезы об отсутствии систематической ошибки в результатах испытаний на одной машине по отношению к другой, т. е. о равенстве медиан двух совокупностей результатов испытаний.

3.9.2. *Критерий знаковых рангов Уилкоксона* [*27, 28*]

В отличие от критерия знаков критерий знаковых рангов Уилкоксона учитывает расстояние наблюдений относительно нуля посредством рангов.

Пусть пары случайных величин (X, Y) представляют собой результаты механических испытаний двух совокупностей с совместной функцией распределения $F(X, Y)$. Одну из выборок подвергают некоторой обработке. Результаты механических испытаний другой выборки используют для контроля влияния обработки. Обработку и контроль назначают независимо и случайно. Критерий проверяет нулевую гипотезу об отсутствии различия между обработкой и контролем. Это означает, что при выполнении нулевой гипотезы случайная величина $Z=X—Y$ распределена симметрично относительно нуля. Критерий также используют для проверки гипотезы о симметрии непрерывного распределения $F(x)$ относительно центра θ. Для этого вместо второй выборки задают n значений, равных θ. Результаты испытаний образцов первой X и второй Y совокупностей располагают в порядке испытаний

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n;$$
$$z_1=x_1—y_1, z_2=x_2—y_2, \ldots, z_n=x_n—y_n.$$

Абсолютные значения разностей $|z_i|$ располагают в порядке возрастания (ранжируют) и подсчитывают сумму рангов T (порядковых номеров) положительных значений z_i в этом ряду. Нулевые разности не учитывают, $n_1=n—l$. Для проверки нулевой гипотезы H_0: $\theta=0$, где θ — медиана генеральной совокупности разностей, из которой извлекают выборку, при альтернативной гипотезе H_A : $\theta<0$ должно выполняться неравенство $T>T_\alpha^н$. При альтернативной гипотезе H_A : $\theta>0$ должно выполняться неравенство

$$T\leqslant T_\alpha^в=\frac{n_1(n_1+1)}{2}-T_\alpha^н.$$

При двусторонней альтернативной гипотезе H_A: $\theta\neq 0$ должно выполняться неравенство $\min\left(T, \frac{n_1(n_1+1)}{2}-T\right)\geqslant T_\alpha^н$ с уровнем значимости 2α.

Для проверки гипотезы с помощью ЭВМ с вычислением точных критических значений $T_{\alpha}^{н}$, $T_{\alpha}^{в}$ используют обращение к подпрограмме WSIGNE. Для приближенного расчета вычисляют статистики T_1 и T_1^* по формулам:

$$T_1 = \frac{T - \frac{n_1(n_1+1)}{4}}{\left[\frac{n_1(n_1+1)(2n_1+1)}{24}\right]^{1/2}}; \qquad (162)$$

$$T_1^* = \frac{T_1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 - T_1^2}}\right).$$

Нулевую гипотезу принимают, если $T_{\frac{\alpha}{2}}^* < T_1^* < T_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$, [28, 29], где

$$T_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 0{,}5[t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}]; \qquad (163)$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(f)$ — квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента;

$f = n_1 - 1$ — степень свободы (табл. 22 приложения);

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения (табл. 21 приложения).

Пример 25. В условиях примера 24 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю медианы разностей значений долговечностей первой и второй выборок на основании критерия знаковых рангов Уилкоксона. Абсолютные значения разностей составляют: 0,08; 0,31; 0,67; 0,74; 0,88; 1,16; 2,68; 5,06; 5,37; $n_1 = 9$. Сумма рангов положительных разностей составляет $T = 3 + 5 + 8 = 16$.

Значения статистик T_1, T_1^* рассчитывают по формуле (162).

$$T_1 = \frac{16 - 22{,}5}{8{,}44} = -0{,}77; \quad T_1^* = -\frac{0{,}77}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{8}{9 - 0{,}77^2}}\right) = -0{,}76.$$

Критические значения $T_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$, $T_{\frac{\alpha}{2}}^*$ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ рассчитывают по формуле (163):

$$T_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 2{,}133; \qquad T_{\frac{\alpha}{2}}^* = -2{,}133.$$

Таким образом нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Точный расчет критических значений $T_{\alpha}^{н}$, $T_{\alpha}^{в}$ производят обращением к подпрограмме WSIGNE.

Обращением к подпрограмме WSIGNE получают $T_{\alpha}^{н}=6$, $T_{\alpha}^{в}=39$. Расчетный уровень значимости составляет $\alpha=0{,}054$. Так как $16>6$, двусторонняя нулевая гипотеза подтверждается.

3.10. Проверка гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одной и той же генеральной совокупности

Если рассматриваемая характеристика механических свойств распределена нормально (логарифмически нормально), то проверка принадлежности двух выборок общей генеральной совокупности сводится к проверке однородности дисперсий и средних значений.

3.10.1. *Критерий Колмогорова — Смирнова* [*1, 8, 32, 33, 21, 18*]

В качестве статистики критерия служит наибольшая разность между накопленными частостями, которые рассчитывают для каждого значения случайной величины X обеих выборочных совокупностей объемом n_1 и n_2:

$$k=\max|W_1(x)-W_2(x)| \qquad (164)$$

При больших n значения k рассчитывают на общих границах интервалов, которые должны быть одинаковой ширины для обеих выборок.

Рассчитанное значение k сравнивают с критическим k_{α}. Если $k\leqslant k_{\alpha}$, гипотеза о принадлежности двух независимых выборок одной генеральной совокупности подтверждается, при $k>k_{\alpha}$ нулевая гипотеза отвергается. Для средних и больших выборок ($n_1+n_2>35$) значение k_{α} рассчитывают по формуле

$$k_{\alpha}=D_{\alpha}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}, \qquad (165)$$

где $D_{\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\ln\frac{2}{\alpha}}$. $D_{\alpha}=1{,}22$ — для $\alpha=0{,}1$;

$D_{\alpha}=1{,}36$ для $\alpha=0{,}05$; $D_{\alpha}=1{,}63$ — для $\alpha=0{,}01$.

Пример 26. Проверить гипотезу о принадлежности общей генеральной совокупности значений временного сопротивления образцов двух выборок ($n_1=20$; $n_2=16$), приведенных в столбцах 1—3 табл. 8. Расчет разностей эмпирических функций распределения приведен в столбце 8. Полученное максимальное значение $k=0{,}1875$ сравнивают с критическим для $\alpha=0{,}05$;

$k_{0{,}05}=1{,}36\sqrt{\frac{36}{320}}=0{,}47$, следовательно, гипотеза о принадлежности данных выборок общей совокупности не противоречит опытным данным.

Таблица 8

Расчет разностей значений эмпирических функций распределения

Значения $x=\sigma_в$	Частота		Накопленная частота i		Накопленная частость i/n		$\lvert W_1(x)-W_2(x)\rvert$
	1-я выборка	2-я выборка	1-я выборка	2-я выборка	1-я выборка	2-я выборка	
1	2	3	4	5	6	7	8
431	—	1	0	1	0,0000	0,0625	0,0625
434	1	—	1	1	0,05	0,0625	0,0125
436	1	—	2	1	0,10	0,0625	0,0375
437	—	1	2	2	0,10	0,1250	0,0250
440	—	1	2	3	0,10	0,1875	0,0875
443	1	1	3	4	0,15	0,2500	0,1000
445	2	—	5	4	0,25	0,2500	0,0000
446	1	—	6	4	0,30	0,2500	0,0500
447	2	1	8	5	0,40	0,3125	0,0675
448	1	—	9	5	0,45	0,3125	0,1375
449	—	1	9	6	0,45	0,3750	0,0750
451	1	1	10	7	0,50	0,4375	0,0725
452	1	—	11	7	0,55	0,4375	0,1125
453	1	1	12	8	0,60	0,5000	0,1000
455	—	1	12	9	0,60	0,5625	0,0375
456	1	—	13	9	0,65	0,5625	0,0875
455	2	—	15	9	0,75	0,5625	0,1875
459	—	1	15	10	0,75	0,6250	0,1250
461	—	1	15	11	0,75	0,6875	0,0625
462	2	—	17	11	0,85	0,6875	0,1625
466	—	1	17	12	0,85	0,7500	0,1000
468	1	1	18	13	0,90	0,8125	0,0875
470	—	1	18	14	0,90	0,9750	0,0250
472	1	—	19	14	0,95	0,8750	0,0750
473	—	1	19	15	0,95	0,9375	0,0125
477	1	—	20	15	1,00	0,9375	0,0625
479	—	1	20	16	1,00	1,00	0,000
Σ	20	16			$k=0{,}1875$		

3.10.2. *Мощность критерия Колмогорова — Смирнова* [*32, 33, 35, 21, 34, 36, 37, 18*]

Нижнюю границу мощности критерия определяют из уравнения (110), где

$$z_1=\frac{\Delta-k_\alpha}{\sigma};$$

$$z_2=\frac{\Delta+k_\alpha}{\sigma}, \qquad (166)$$

где $\Delta=|F_2(x_\Delta)-F_1(x_\Delta)|$,

x_Δ — значение x, при котором F_1 и F_2 наиболее удалены;
F_1, F_2 — теоретические функции распределения 1-й и 2-й выборок;

$$\sigma = \left[\frac{F_1(1-F_1)}{n_1} + \frac{F_2(1-F_2)}{n_2} \right]^{1/2} \qquad (167)$$

Пример 27. Для случая альтернативной гипотезы

$H_A : F_1 \neq F_2,\ F_1 = F_2^a\ (a>0)$

определить, каким должно быть значение параметра a, при котором мощность критерия для $\alpha=0{,}05$ и $n_1=20$; $n_2=16$ составляла бы не менее 90 %.

Для случая альтернативной гипотезы, определяют значения функций распределения F_1 и F_2 в точке, соответствующей максимальной разности между ними:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} - a \cdot F_1^{a-1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$F_1(x_\Delta) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}},\ F_2(x_\Delta) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a(a-1)}}.$$

Методом последовательного приближения устанавливают, что значению мощности критерия $\beta_1=0{,}9$, определенному по уравнению (110), соответствует значение $a=7{,}3$ ($k_{0,05}=0{,}47$)

$$\Delta = |F_1 - F_1^a| = |0{,}729 - 0{,}099| = 0{,}629;$$

$$\sigma^2 = \frac{0{,}729(1-0{,}729)}{20} + \frac{0{,}099(1-0{,}099)}{16} = 0{,}01548;$$

$$z_1 = 1{,}28;\quad z_2 = 8{,}834;$$

$$\beta_1 \cong 0{,}9.$$

3.11. Двухвыборочный критерий Уилкоксона (критерий ранговых сумм) [1, 27, 28]

3.11.1. Критерий предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, т. е. об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении.

3.11.2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — случайная выборка из $F(x-\theta_x)$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — из $F(y-\theta_y)$ $(m \leqslant n)$. Функцию распределения F не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности H_0: $\Delta=0$ против альтернативы H_A : $\Delta \neq 0$ строят вариационный ряд

из $k=m+n$ наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Рассчитывают статистику

$$W=\sum_{i=1}^{m} R_i, \tag{168}$$

представляющую собой сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду.

Далее рассчитывают величины [28, 30] W_1 и W_1^* по формулам:

$$W_1=\frac{W-0{,}5n(m+n+1)+0{,}5}{\left[\frac{mn(m+n+1)}{12}\right]^{1/2}}; \tag{169}$$

$$W_1^*=\frac{W_1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{m+n-2}{m+n-1-(W_1)^2}}\right]. \tag{170}$$

Нулевую гипотезу принимают, если для двустороннего критерия с уровнем значимости α выполняется неравенство

$$W^*_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant W_1^*\leqslant W^*_{1-\frac{\alpha}{2}}; \tag{171}$$

$$W^*_{1-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}=0{,}5\left[t_{1-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)+z_{1-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}\right], \tag{172}$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}(f)$ — квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента с f степенями свободы (табл. 22 приложения);

$z_{1-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль уровня $1-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}$ нормированного нормального распределения (табл. 21 приложения).

В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

3.11.3. При $m\leqslant 12$ рассчитывают точные критические значения $W^{\text{н}}_{\frac{\alpha}{2}}$, $W^{\text{в}}_{\frac{\alpha}{2}}$, $W^{\text{н}}_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant W\leqslant W^{\text{в}}_{\frac{\alpha}{2}}$ статистики W (см. формулу 168) — обращением к подпрограмме WILCC. Статистику W рассчитывают обращением к подпрограмме P24103.

3.11.4. В подпрограмме WILCC предусмотрена возможность точного расчета критических значений при наличии цензурированных наблюдений I типа в обеих выборках. При этом предполагают, что однократное цензурирование справа в обеих выборках имеет место при одинаковых базах.

3.11.5. В общем случае многократно цензурированных выборок I типа в произвольных точках [18, 39, 40] приближенную проверку нулевой гипотезы об однородности двух выборок проводят обращением к подпрограмме WILC.

Пример 28.Определить точные критические значения статистики W при $\alpha=0{,}1$, $m=3$, $n=4$, $r=2$ (число цензурированных наблюдений в обеих выборках).

Обращением к подпрограмме WILCC получают $W^{н}_{\frac{\alpha}{2}}=2$, $W^{в}_{\frac{\alpha}{2}}=11$, $\alpha=0{,}114$. При $r=0$ получают $W^{в}_{\frac{\alpha}{2}}=17$, $W^{н}_{\frac{\alpha}{2}}=7$.

3.11.6. Пример 29. В двух независимых выборках $m=11$ и $n=12$ измерены значения долговечностей:

1-я выборка $N\cdot10^{-5}$: 1,17; 1,39; 1,6; 2,53; 2,74; 3,18; 3,91; 4,06; 4,47; 7,92;

2-я выборка $N\cdot10^{-5}$: 1,6; 1,65; 2,07; 2,86; 3,85; 3,92; 3,99; 4,78; 5,22; 6,76.

Известно, что два образца 1-й выборки и один образец 2-й выборки не разрушились.

При этом значения долговечностей неразрушенных образцов 1-й выборки составили: $2\cdot10^5$ и $8\cdot10^5$ циклов; 2-й выборки: $6\cdot10^5$ циклов.

Произвести проверку гипотезы о принадлежности результатов испытаний 1-й и 2-й выборок единой генеральной совокупности.

Обращением к подпрограмме WILC получают для $\alpha=0{,}05$ значение нормированной статистики $z=0{,}561$, которую сопоставляют с критическим значением $z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1{,}96$, определяемым по табл. 21 приложения. Так как $z<z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, нулевую гипотезу не отвергают.

3.11.7. *Мощность критерия Уилкоксона* [*34, 41, 35, 36, 32, 21, 18*]

При альтернативной гипотезе $H_A: F_1\neq F_2$; $F_1=F_2^a$ (см. пример 27) нижнюю границу мощности критерия определяют по уравнению (110),

где $$z_1=\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\frac{mn}{\sigma}}+\Delta;$$

$$z_2=\frac{u_{\frac{\alpha}{2}}}{\frac{mn}{\sigma}}+\Delta;$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{mn}{2} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{mn}{12}(m+n-1)} ;$$

$$\Delta = \frac{a}{a+1} ;$$

$$\sigma^2 = \frac{a}{(a+1)^2 mn}\left[\frac{m-1}{a+2} + \frac{a(n-1)}{2a+1} + 1\right].$$

Критерий Уилкоксона, как показывают исследования, является наиболее мощным при проверке гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одной генеральной совокупности. В табл. 9 представлены значения мощности критерия Уилкоксона в сравнении с критериями Колмогорова — Смирнова (см. п. 3.10.1) для ряда значений параметра a. Как видно из табл. 9 критерий Уилкоксона оказывается равномерно наиболее мощным по сравнению с критерием Колмогорова — Смирнова. Установлено также, что при сравнении критерия Уилкоксона с t-критерием Стьюдента (который является оптимальным критерием сдвига, если F_1 имеет нормальное распределение) теряется не более 5 % эффективности, что является хорошим свидетельством в пользу критерия Уилкоксона.

Таблица 9

Мощность критериев Уилкоксона и Колмогорова — Смирнова ($m=n=50$), $\alpha=0{,}05$

a	Критерий Уилкоксона			Критерий Колмогорова—Смирнова			
	$\Delta=\frac{a}{a+1}$	σ	β_1 (110)	F_1	Δ	σ (167)	β_1 (110)
1,5	0,6	0,0566	0,405	0,4444	0,1481	0,09543	0,099
2,0	0,6666	0,05403	0,836	0,5	0,25	0,09354	0,409
2,5	0,71428	0,05135	0,975	0,5428	0,3257	0,09145	0,7224
3,0	0,75	0,04883	0,997	0,5773	0,3849	0,08937	0,897

3.12. Критерий Краскела—Уоллиса [1, 27, 28]

3.12.1. Критерий Краскелла — Уоллиса обобщает задачу о двух выборках (пп. 3.10, 3.11) на случай k выборок: x_{ij}, $i=1, n_j$, $j=1,k$ с функциями распределения $F(x-\theta_j)$, где n_j — число наблюдений в j-й выборке.

Нулевая гипотеза утверждает, что k выборок рассматривают как одну (объединенную) выборку из общей совокупности, т. е. утверждается равенство параметров сдвига, когда не задано значение общего параметра положения H_0: $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_k$ против H_A : $\theta_1, \ldots, \theta_k$ не все равны.

3.12.2. Для проверки нулевой гипотезы строят общий вариационный ряд из $N=\sum_{j=1}^{k} n_j$ наблюдений и рассчитывают статистику

$$H=\frac{1}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{k}\frac{R_j^2}{n_j}-3(N+1), \qquad (173)$$

где R_j — сумма рангов j-й выборки в общем вариационном ряду.

Далее рассчитывают величину [28, 31] H_1 по формуле

$$H_1=\frac{H}{2}\left(1+\frac{N-k}{N-1-H}\right), \qquad (174)$$

которую сравнивают с критическим значением $H_{1\alpha}$, рассчитанным по формуле

$$H_{1\alpha}=0{,}5[(k-1)F_{1-\alpha}(k-1, N-k)+\chi^2_{1-\alpha}(k-1)], \qquad (175)$$

где $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$ квантиль уровня $1-\alpha$ F-распределения с f_1, f_2 степенями свободы (табл. 28 приложения);

$\chi^2_{1-\alpha}(f)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ χ^2-распределения с $f=k-1$ степенями свободы (табл. 23 приложения).

Нулевую гипотезу принимают, если $H_1 \leqslant H_{1\alpha}$ с уровнем значимости α. В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

3.12.3. Обращением к подпрограмме KRUSK рассчитывают точные критические значения H_α с уровнем значимости α статистики H (см. формулу 173). Гипотезу H_0 принимают, если $H \leqslant H_\alpha$. Статистики по формулам (173)—(175) рассчитывают обращением к подпрограмме P24A07.

3.12.4. Подпрограмма KRUSK предусматривает возможность точного расчета критических значений при наличии цензурированных наблюдений во всех или в части выборок. Цензурирование имеет место при одинаковых базах.

Пример 30. Рассчитать точное критическое значение статистики H критерия Краскела-Уоллиса для $N=10$ ($n_1=2$; $n_2=2$; $n_3=3$; $n_4=3$) при $\alpha=0{,}05$.

Обращением к подпрограмме KRUSK получают $H_\alpha=6{,}473$. Расчетный уровень значимости составляет $\alpha=0{,}0524$.

3.1.2.5. Мощность критерия Краскела — Уолляса [42, 43, 14].

Если верна альтернативная гипотеза $H_A: F_1 \neq F_2 \neq \ldots \neq F_k$, то статистика H (173) имеет предельное нецентральное χ^2-распределений с $f=k-1$ степенями свободы и параметром нецентральности Δ, рассчитываемым по формуле

$$\Delta=12\sum_{i=1}^{k} n_i(z_i-\bar{z})^2, \qquad (176)$$

где z_i — действительные числа; $F(x_i)$ — функция распределения при нулевой гипотезе; $F(x_i + z_i)$ — функция распределения при альтернативной гипотезе.

При всех $z_i = 0$ верна нулевая гипотеза.

При $z_i \neq z_j$ верна альтернативная гипотеза.

Мощность критерия определяют по уравнению (148) (см. табл. 34 приложения).

Пример 31. Определить, каким должен быть параметр нецентральности Δ, обеспечивающий мощность $\beta_1 = 0{,}95$ критерия χ^2 при однопроцентном уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ и $f = k - 1 = 7$?

По табл. 34 приложения находят, что этому значению мощности критерия соответствует значение параметра нецентральности $\Delta = 28{,}212$, то есть

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (z_i - \bar{z})^2 = 2{,}351.$$

4. ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

4.1. Общие положения

Испытания на усталость относят к прямым испытаниям, если их конечной целью является определение долговечности. В случае построения кривой усталости и дальнейшего определения на ее основании предела выносливости эти испытания относят к косвенным.

Испытаниям на усталость характерен повышенный разброс результатов, что обусловлено большим числом различных факторов, влияющих на сопротивление усталостному разрушению. Основными факторами, определяющими рассеяние результатов испытаний на усталость, являются макро- и микронеоднородность структуры конструкционных материалов, неоднородность качества поверхности образцов и элементов конструкций, колебания в условиях испытаний (среда, температура и пр). Разброс характеристик сопротивления усталостному разрушению зависит также от состояния испытательного оборудования и квалификации обслуживающего персонала, но при соблюдении основных требований к постановке и проведению испытаний влияние последних факторов на рассеяние результатов оказывается незначительным.

В связи с большой длительностью и высокой стоимостью испытаний на усталость вопросы планирования имеют большую актуальность. При косвенных испытаниях планирование предусмат-

ривает не только определение необходимого объема испытаний серии образцов или элементов конструкций для оценки усталостных свойств с заданной степенью точности, но и оптимальное распределение этой серии на отдельные группы, испытуемые при различных уровнях нагрузки, а также определение рационального числа групп. В качестве критериев при планировании испытаний на усталость, помимо точности оценки характеристик сопротивления усталости, принимают также стоимость и полное время испытаний [46].

4.2. Определение долговечности при испытаниях на усталость

4.2.1. Статистическая обработка по долговечности может иметь первичный характер при последующем построении кривых усталости и определении значений предела выносливости. При испытаниях на одном-двух уровнях напряжений для обоснования расчетных и нормативных характеристик по ресурсу, для оценки влияния технологических и других факторов обработка по долговечности носит окончательный характер.

4.2.2. *Функции распределения долговечности при действии переменных нагрузок*

Исследования закономерностей рассеяния характеристик сопротивления усталостному разрушению легких сплавов показали, что долговечность при постоянном уровне максимального напряжения цикла и предел ограниченной выносливости на заданной базе испытания имеют как нижнюю, так и верхнюю границы [44]. Верхняя граница долговечности на несколько порядков превышает наблюдаемое при испытании число циклов до разрушения. Нижняя граница долговечности существенно отличается от нуля. Поэтому считают, что долговечность N при испытаниях на усталость имеет непрерывное распределение в интервале от нижней границы N_0 до бесконечности (параметр N_0 называют порогом чувствительности по циклам).

Для статистической обработки результатов испытаний на усталость используют нормальный закон распределения величины $Y = \lg(N - N_0)$ и закон распределения Вейбулла — Гнеденко (пп. 2.3.5—2.3.7).

Основным затруднением при использовании нормального закона распределения величины $Y = \lg(N - N_0)$ для оценки ресурса натурных элементов конструкции является сложность определения порога чувствительности N_0. Оценка N_0 по результатам натурных испытаний затруднена из-за большого объема испытаний и из-за большой длительности испытаний на низких уровнях напряжений, характерных для работы натурных элементов конструкций.

Аналогичные трудности возникают при использовании трехпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко.

В качестве более простого распределения используют нормальный закон для случайной величины $Y = \lg N$ и двухпараметрический закон распределения Вейбулла — Гнеденко. Дисперсия величины $Y = \lg N$ для образцов и элементов конструкций увеличивается с ростом средней долговечности или со снижением уровня максимального напряжения цикла.

4.2.3. *Статистическая обработка и определение объема испытаний*

Результаты испытаний серии из n образцов при уровне амплитуды напряжений σ_a располагают в вариационный ряд в порядке возрастания долговечности (см. табл. 10). Для уровней напряжений, на которых разрушились все образцы серии, рассчитывают непараметрические оценки характеристик логарифма долговечности по формулам (20)—(27), где $X = \lg N$.

Параметрические оценки характеристик распределения долговечности определяют в случае полной или цензурированной выборки в соответствии с п. 2.5.

При определении ММП-оценок трехпараметрического логарифмически нормального распределения (п. 2.5.1.5) $Y = \lg(N - N_0)$, $X = N$. При определении ММП-оценок двухпараметрического логарифмически нормального распределения (2.5.1.4) $Y = \lg N$. При определении ММП-оценок распределения Вейбулла — Гнеденко (пп. 2.5.1.13 и 2.5.1.14) $X = N$.

МНК-оценки параметров нормального и Вейбулла — Гнеденко распределений определяют в соответствии с п. 2.5.1.19. При этом в уравнения (58), (59), (62), (63) подставляют для нормального распределения $X = \lg(N - \hat{N}_0)$, для распределения Вейбулла — Гнеденко $X = \ln(N - \hat{N}_0)$, где $\hat{N}_0$ — независимая оценка порога чувствительности по циклам.

Независимую оценку N_0 при $n > 20$ и при $(N_{\max} - N_{\min}) > 5N_{0,5}$ определяют по уравнению (42), либо по приближенному уравнению

$$\hat{N}_0 = (N_{\min} \cdot N_{\max} - N_{0,5}^2)/(N_{\max} + N_{\min} - 2N_{0,5}), \qquad (177)$$

где $N_{\min}$, $N_{\max}$, $N_{0,5}$ — минимальное, максимальное и медианное значение долговечностей соответственно;

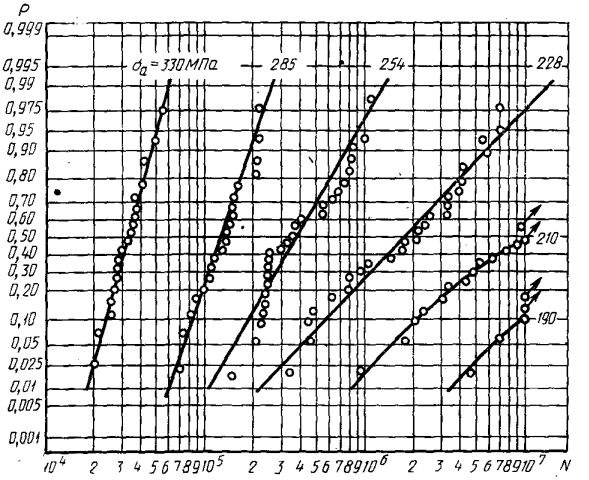
либо графически на основании анализа эмпирической функции распределения долговечности. Используют также подход, описанный в п. 2.5.1.25.

Оценки вероятности непревышения заданного уровня, квантилей распределения определяют, как указано в пп. 2.5.1.28 и 2.5.1.29.

Интервальные оценки долговечности определяют в соответствии с п. 2.5.2.

Эмпирические функции распределения долговечности строят в соответствии с п. 2.6. На черт. 5 показано семейство кривых распределения долговечности на нормальной вероятностной сетке, построенных по данным табл. 10.

Кривые распределения долговечности образцов из алюминиевого сплава В95



Черт. 5

Необходимый объем испытаний определяют по методике, изложенной в п. 2.7.

4.3. Построение кривых усталости

4.3.1. *Уравнения кривых усталости*

В зависимости от назначения кривые усталости представляют в графическом или аналитическом виде. Графические кривые усталости изображают в полулогарифмических σ_a —lg$N$ или логарифмических lgσ_a —lg$N$ координатах. При оценке прочности и ресурса элементов конструкций необходимо располагать уравнением кривой усталости. Применительно к сплавам на железной основе хо-

рошее соответствие экспериментальных данных при симметричном цикле нагружения в широком диапазоне долговечности имеет уравнение Стромейра

$$\sigma_a=\sigma_{-1}+c_1(N+B)^{-\alpha} \tag{178}$$

или

$$\lg(\sigma_a-\sigma_{-1})=c-\alpha\lg(N+B), \tag{179}$$

где σ_{-1}, α, B, $c=\lg c_1$ — параметры.

Значение параметра B для многих материалов лежит в пределах от 0 до $5\cdot10^4$ циклов и его не учитывают, если минимальная долговечность образцов превышает 10^5 циклов. В этом случае

$$\sigma_a=\sigma_{-1}+c_1N^{-\alpha} \tag{180}$$

или

$$\lg(\sigma_a-\sigma_{-1})=c-\alpha\lg N. \tag{181}$$

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости для указанных материалов используют экспоненциальное уравнение

$$N=e^{c_1-b_1\sigma_a} \tag{182}$$

или

$$\lg N=c-b_2\sigma_a \tag{183}$$

и степенно́е

$$N=a_1\sigma_a^{-m} \tag{184}$$

или

$$\lg N=a_2-m\lg\sigma_a, \tag{185}$$

являющееся частным случаем уравнения (181) для $\sigma_{-1}=0$, $m=\frac{1}{\alpha}$, $a_2=\frac{c}{\alpha}$.

Для описания сопротивления усталости деформируемых титановых, алюминиевых и магниевых сплавов используют уравнения кривой усталости (178)—(181), а также уравнение [44]

$$\sigma_a=\sigma_{-1}+a_1[\lg N]^{-\beta}. \tag{186}$$

Для гладких и надрезанных образцов различных типоразмеров из деформируемых алюминиевых сплавов, а также для натурных элементов конструкций (лонжерон лопасти несущего винта вертолета, лопасть винта самолета, бурильные трубы) параметр β уравнения (186) считают постоянным и равным $\beta=2$.

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости при отсутствии необходимости экстраполяции опытных данных в область малых $N \leqslant 10^5$ и больших $N \geqslant 10^5$ долговечностей используют уравнение

$$\sigma_a = a_1 (\lg N)^{-\beta}, \qquad (187)$$

полученное из уравнения (186) для $\sigma_{-1} = 0$.

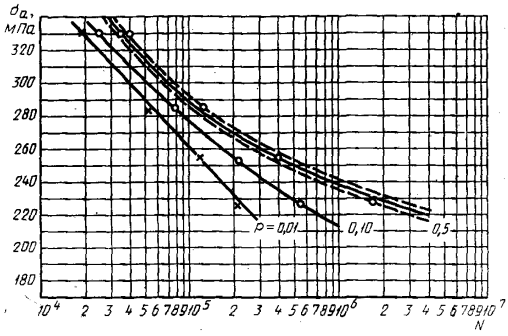
Если испытания на усталость проводят при асимметричном цикле напряжений с постоянным коэффициентом асимметрии R (при изменяющемся среднем значении напряжения цикла σ_m), то в формулах (178—187) вместо σ_a подставляют максимальное напряжение цикла σ_{max} и вместо σ_{-1} — предел неограниченной выносливости σ_R. В случае испытаний при $\sigma_m = \text{const}$ в указанных формулах вместо σ_{-1} подставляют предельную амплитуду цикла σ'_a, соответствующую неограниченной долговечности.

4.3.2. *Графическое построение кривых усталости*

В тех случаях, когда не предусматривают оценку параметров уравнений кривых усталости, обработку результатов испытаний на усталость проводят графическим путем. По результатам испытаний на усталость на 4—6 уровнях амплитуды цикла напряжений строят семейство кривых эмпирической функции распределения долговечности на вероятностной сетке. Подобные кривые для образцов из сплава В95 по данным табл. 10 приведены на черт. 5. Задаваясь фиксированными значениями вероятности разрушения, по кривым распределения долговечности определяют разрушающие числа циклов для заданных уровней амплитуды напряжения и строят соответствующие квантильные кривые усталости для принятых уровней P в координатах $\sigma_a - \lg N$ или $\lg\sigma_a - \lg N$. На черт. 6 представлены квантильные кривые усталости образцов из сплава В95 для уровней вероятностей $P = 0{,}5$; 0,1; 0,01, построенные по данным черт. 5. Экстраполяция кривой усталости, не имеющей горизонтального участка, в область больших долговечностей не должна превышать достигнутого числа циклов на нижнем уровне амплитуды напряжений для соответствующей вероятности разрушения более чем в 2—5 раз. В противном случае возможны значительные погрешности оценки предела выносливости при этих долговечностях.

Экстраполяция кривых, имеющих горизонтальный участок (углеродистые стали), не должна превышать долговечность, соответствующую точке перелома кривой усталости.

Кривые усталости для сплава В95



Черт. 6

4.3.3. *Оценка параметров уравнений кривых усталости*

4.3.3.1. Оценку параметров уравнений кривых усталости проводят на основании метода максимального правдоподобия. Уравнения (180—187) приводят к следующему виду

$$Y=a+b(x-\bar{x}), \tag{188}$$

где $x=\ln(\sigma_a-\sigma_{-1})$, $Y=\ln N$, $b=-\frac{1}{\alpha}$, $a=b\bar{x}-b\ln c_1$ —

при использовании уравнения (180);

$x=\sigma_a$, $Y=\lg N$, $b=-b_2$, $a=c+b\bar{x}$ —

при использовании уравнения (183);

$x=\lg\sigma_a$, $Y=\lg N$, $b=-m$, $a=b\bar{x}+a_2$ — (189)

при использовании уравнения (185);

$x=\ln(\sigma_a-\sigma_{-1})$, $Y=\ln\lg N$, $b=-\frac{1}{\beta}$, $a=b\bar{x}-b\ln a_1$ —

при использовании уравнения (186);

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i, \tag{190}$$

где m — число уровней амплитуд напряжений циклов,

n_i — объем испытаний на i-м уровне.

Предполагают, что распределение случайной величины Y подчиняется нормальному закону распределения на каждом уровне x

с параметрами y_i , $\sigma^2_{Y_i}$. ММП-оценки параметров y_i , $\sigma^2_{Y_i}$ в случае полных выборок равны

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}, \quad \hat{\sigma}^2_{Y_i} = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_i)^2. \tag{191}$$

Для цензурированных выборок оценки $\hat{y}_i$, $\hat{\sigma}_{Y_i}$ рассчитывают в соответствии с п. 2.5.1.5.

4.3.3.2. Весовую функцию $\omega_i = \omega_i(x)$ для учета изменения условной дисперсии случайной величины Y подбирают на основании опытных данных. Для этого строят график, по одной оси которого откладывают $\hat{\sigma}^2_{Y_i}$, по другой — амплитуду цикла напряжений σ_{a_i} . Полученную графическую зависимость аппроксимируют степенной функцией

$$\sigma^2_{Y_i} = \sigma^2_0 \sigma^{-\gamma}_{a_i}, \tag{192}$$

графически или аналитически оценивая параметр γ. В качестве функции $\omega(x)$ принимают

$$\omega_i(x) = \hat{\sigma}^{\gamma}_{a_i} \cdot k_i \tag{193}$$

Коэффициент k_i принимают равным единице для полной выборки. Для цензурированной выборки k_i рассчитывают по формуле

$$k_i = \frac{1}{\nu'_{11_i}}, \tag{194}$$

где ν'_{11_i} — определяют в соответствии с уравнением (45).

4.3.3.3. Применительно к уравнениям (180), (186) оценку параметра σ_{-1} рассчитывают по формуле [47]:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i \left[\frac{\hat{y}_i - \hat{a} - \hat{b}(x_i - \bar{x})}{\sigma_{a_i} - \hat{\sigma}_{-1}} \right] = 0, \tag{195}$$

где $\hat{a}$, $\hat{b}$ — оценки параметров a, b, при этом

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i \hat{y}_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i; \tag{196}$$

$$\hat{b}=\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i\hat{y}_i(x_i-\bar{x})/\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i(x_i-\bar{x})^2. \qquad (197)$$

Для уравнений (183), (185) оценку параметра σ_{-1} не рассчитывают. Оценки параметров кривых усталости рассчитывают в соответствии с уравнениями (189).

4.3.3.4. Для оценки параметра σ_{-1} используют также минимизацию по параметру σ_{-1} логарифма функции максимального правдоподобия по формуле

$$\ln L=\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_i[\hat{y}_i-\hat{a}-\hat{b}(x_i-\bar{x})]^2, \qquad (198)$$

где оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ рассчитывают по формулам (196), (197).

4.3.3.5. Линейность кривых регрессии в соответствии с линейным регрессионным анализом [11] проверяют с помощью дисперсионного отношения

$$F=s_2^2/s_1^2, \qquad (199)$$

где s_1^2 — дисперсия внутри системы, рассчитываемая по формуле

$$s_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\omega_i(y_{ij}-\hat{y}_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)-m}; \qquad (200)$$

s_2^2 — дисперсия вокруг эмпирической линии регрессии, рассчитываемая по формуле

$$s_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\omega_i n_i[\hat{y}_i-\hat{a}-\hat{b}(x_i-\bar{x})]^2}{m-2}. \qquad (201)$$

Если дисперсионное отношение не превышает критического значения $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$ (табл. 28 приложения) для уровня значимости α и чисел степеней свободы $f_1=\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ и $f_2=m-2$, то наличие линейной зависимости (188) подтверждается. В этом случае дисперсии s_1^2, s_2^2 объединяют в общую оценку s^2, рассчитывают по формуле

$$s^2=\hat{\sigma}_0^2=\frac{s_1^2\cdot f_1+s_2^2\cdot f_2}{f_1+f_2}, \qquad (202)$$

являющуюся оценкой параметра σ_0^2 в уравнении (192).

4.3.3.6. Матрицу вариаций-ковариаций $\|v_{ij}\|$ разномерности 3×3 ММП-оценок параметров a, b, σ_{-1} определяют обращением матрицы $\|\mu_{ij}\|$ [47]

$$\|v_{ij}\| = \frac{\sigma_0^2}{n} \|\mu_{ij}\|^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{n} \|v'_{ij}\|, \qquad (203)$$

$$i,j=1,2,3;$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_{11}=\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i;\ \mu_{22}=\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i(x_i-\bar{x})^2;\\
&\mu_{12}=\mu_{21}=\mu_{13}=\mu_{31}=0;\\
&\mu_{33}=b^2\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i \frac{1}{(\sigma_{a_i}-\sigma_{-1})^2} - b^2\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i\times\right.\\
&\left.\times \frac{1}{\sigma_{a_i}-\sigma_{-1}}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i;\\
&\mu_{23}=\mu_{32}=-b\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_i \frac{(x_i-\bar{x})}{\sigma_{a_i}-\sigma_{-1}};\ n=\sum_{i=1}^{m} n_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (204)$$

4.3.3.7. При малом числе испытанных образцов на уровнях амплитуд напряжений циклов n_i оценку дисперсии (192) не рассчитывают. В этом случае в уравнениях (190—197) принимают $\omega_i = 1$ для всех i. При единичных испытаниях на уровнях амплитуд напряжений циклов принимают $n_i\ \omega_i = 1$ для всех i. В обоих случаях линейность кривой регрессии проверяют графически. В качестве оценки $\hat{\sigma}_0^2$ рассчитывают по формуле

$$\hat{\sigma}_0^2 = s^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^{m} n_i[\hat{y}_i - \hat{a} - \hat{b}(x_i-\bar{x})]^2. \qquad (205)$$

4.3.3.8. При статистической обработке результатов усталостных испытаний в уравнениях (203), (204) подставляют оценки параметров σ_0^2, a, b, σ_{-1}. При планировании усталостных испытаний задают ожидаемые значения этих параметров.

4.3.3.9. Оценки параметров σ_{-1_p}, a_p, b_p, квантильных кривых усталости уровня P проводят на основании уравнения [47]:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i\omega_{p_i} \frac{[\hat{y}_{p_i} - \hat{a}_p - \hat{b}_p(x_i-\bar{x}_p)]}{\sigma_{x_i} - \hat{\sigma}_{-1_p}} = 0; \qquad (206)$$

$$\hat{a}_p = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i} \hat{y}_{p_i} \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i}; \qquad (207)$$

$$\hat{b}_p = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i} \hat{y}_{p_i} (x_i - \bar{x}_p) \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i} (x_i - \bar{x}_p)^2, \qquad (208)$$

где $\hat{y}_{p_i} = \hat{y}_i + z_p \hat{\sigma}_{Y_i}$ — оценка квантили случайной величины Y; z_p — квантиль уровня P нормированного нормального распределения;

$$\omega_{p_i} = \omega_{p_i}(x) = (\sigma_{a_i})^{\hat{\nu}} \cdot k_{p_i}, \qquad (209)$$

где k_{p_i} — коэффициент, определяемый в соответствии с уравнением

$$k_{p_i} = (\nu'_{11_i} + z_p^2 \nu'_{22_i} + 2 z_p \nu'_{12_i})^{-1}, \qquad (210)$$

где ν'_{11}, ν'_{22}, ν'_{12} — определяют в соответствии с уравнением (45);

$$\bar{x}_p = \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i} x_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i}; \qquad (211)$$

$x_i = \ln(\sigma_{a_i} - \hat{\sigma}_{-1_p})$ — для уравнений (180), (186);

$x_i = \sigma_{a_i}$ и $x_i = \lg \sigma_{a_i}$ — для уравнений (183) и (185) соответственно.

Для уравнений (183), (185) оценку параметра σ_{-1_p} не рассчитывают. Оценки параметров квантильных кривых усталости рассчитывают в соответствии с уравнением (189). Например для уравнения кривой усталости (186)

$$\hat{a}_{1p} = e^{\bar{x}_p - \frac{\hat{a}_p}{\hat{b}_p}}, \quad \hat{\beta}_p = -\frac{1}{\hat{b}_p}.$$

4.3.3.10. Для оценки параметра σ_{-1_p} используют также минимизацию по параметру σ_{1_p} уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_{p_i} [\hat{y}_{p_i} - \hat{a}_p - \hat{b}_p (x_i - \bar{x}_p)]^2,$$

где $\hat{a}_p$, $\hat{b}_p$ — рассчитывают по уравнениям (207), (208).

4.3.3.11. Матрицу вариаций-ковариаций ММП-оценок параметров a_p, b_p σ_{-1_p}, рассчитывают обращением матрицы $\|\mu_{ij}\|_p$ [47]

$$\|\nu_{ij}\|_p = \frac{\sigma_0^2}{n}\,\|\mu_{ij}\|_p^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{n}\,\|\nu'_{ij}\|_p, \text{ при этом } i,j=1,2,3. \quad (212)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_{11_p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i};\quad \mu_{22_p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i}\,(x_i-\bar{x}_p)^2;\\
&\mu_{12_p} = \mu_{21_p} = \mu_{13_p} = \mu_{31_p} = 0;\\
&\mu_{33_p} = b_p^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i}\,\frac{1}{(\sigma_{a_i}-\sigma_{-1_p})^2} - b_p^2\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i} \times \right.\\
&\qquad \left. \times \frac{1}{\sigma_{a_i}-\sigma_{-1_p}}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i};\\
&\mu_{23_p} = \mu_{32_p} = -b_p \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\,\omega_{p_i}\,\frac{(x_i-\bar{x}_p)}{\sigma_{a_i}-\sigma_{-1_p}}
\end{aligned}\right\} \quad (213)$$

4.3.3.12. Для уравнений кривых усталости (183), (185) в уравнениях (203), (212) $i, j = 1, 2$.

4.3.3.13. При планировании испытаний в уравнения (212), (213) подставляют ожидаемые значения параметров σ_0, a_p, b_p, σ_{-1_p} При статистической обработке результатов усталостных испытаний в уравнения (212), (213) подставляют оценки этих параметров.

4.3.3.14. Приближенные верхние и нижние доверительные границы квантили уровня P предела выносливости с доверительной вероятностью β для заданной базы N_6 определяют из уравнений [47]

$$\sigma_{a_p}^{\text{в,н}} \cong e^{\hat{x}_p + z_{\beta,\,1-\beta}\,s_p} + \hat{\sigma}_{-1_p} \text{ — для уравнений (180), (186), (214);}$$

$$\sigma_{a_p}^{\text{в,н}} \cong \hat{\sigma}_{a_p}(N_6) + z_{\beta,\,1-\beta} s_p \text{ — для уравнений (183), (215);}$$

$$\sigma_{a_p}^{\text{в,н}} \cong 10^{\hat{x}_p + z_{\beta,\,1-\beta}\,s_p} \text{ — для уравнения (185).}$$

Например для уравнения (186)

$$\hat{x}_p = \ln[\hat{\sigma}_{a_p}(N_6) - \hat{\sigma}_{-1_p}],\ \hat{\sigma}_{a_p}(N_6) = \hat{\sigma}_{-1_p} + \hat{a}_{1_p}(\lg N_6)^{-\hat{\beta}_p},$$

$z_{\beta,\,1-\beta}$ — квантиль уровня β или $1-\beta$ нормированного нормального распределения

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x_p}{\partial g_i}\right)_{g=\hat{g}} \cdot \left(\frac{\partial x_p}{\partial g_j}\right)_{g=\hat{g}} \cdot \nu_{ij_p}; \quad (216)$$

$$g_1=a_p,\ g_2=b_p,\ g_3=\sigma_{-1_p};$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial a_p}=\frac{1}{b_p},\ \frac{\partial x_p}{\partial b_p}=\frac{x_p-\bar{x}_p}{b_p},\ \frac{\partial x_p}{\partial \sigma_{-1_p}}=\frac{1}{\sigma_{a_p}(N_6)-\sigma_{-1_p}}.$$

Для уравнений кривых усталости (183), (185) в уравнении (216) $i, j=1, 2$. Для двухпараметрических уравнений кривых усталости, а также для трехпараметрических уравнений, в которых не учитывают вариацию третьего параметра (чаще всего σ_{-1}), более точными являются доверительные границы

$$\sigma^{в,н}_{a_p}\cong e^{\frac{\hat{x}_p-\mu\bar{x}_p}{1-\mu}\pm\frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}s'_p}+\hat{\sigma}_{-1_p}$$ — для уравнений (180), (186);

$$\sigma^{в,н}_{a_p}\cong\frac{\hat{\sigma}_{a_p}-\mu\bar{\sigma}_p}{1-\mu}\pm\frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}s'_p$$ — для уравнений (183);

$$\sigma^{в,н}_{a_p}\cong 10^{\frac{\hat{x}_p-\mu\bar{x}_p}{1-\mu}\pm\frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\cdot s'_p}$$ — для уравнений (185);

$$s'_p=\left[\frac{\nu'_{11}}{\nu'_{22}}(1-\mu)+(\hat{x}_p-\bar{x}_p)^2\right]^{1/2},\ \mu=\frac{t^2_\beta\,\nu'_{22}\,\hat{\sigma}^2_0}{\hat{b}^2_p\,n},$$

t_β — квантиль уровня β распределения Стьюдента с $f=n-2$ степенями свободы,

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_p&=\ln[\hat{\sigma}_{a_p}(N_6)-\hat{\sigma}_{-1_p}],\\ \hat{\sigma}_{a_p}&=\hat{\sigma}_{-1_p}+\hat{a}_{1_p}(\lg N_6)^{-\hat{\beta}_p};\end{aligned}\right\}$$ — для уравнения (186);

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_p&=\ln[\hat{\sigma}_{a_p}(N_6)-\hat{\sigma}_{-1_p}],\\ \sigma_{a_p}(N_6)&=\hat{\sigma}_{-1_p}+\hat{c}_{1_p}(N_6)^{-\hat{\alpha}_p};\end{aligned}\right\}$$ — для уравнения (180);

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_p&=\hat{\sigma}_{a_p}(N_6),\\ \hat{\sigma}_{a_p}(N_6)&=(\hat{c}_p-\lg N_6)/\hat{b}_{2p};\end{aligned}\right\}$$ — для уравнения (183);

$$\left.\begin{aligned}\widehat{x}_p &= \lg[\widehat{\sigma}_{a_p}(N_б)],\\ \widehat{\sigma}_{a_p}(N_б) &= (\widehat{a}_{гр} - \lg N_б)/\widehat{m}_p\end{aligned}\right\} \text{— для уравнения (185).}$$

При планировании испытаний оценки параметров заменяют их ожидаемыми значениями, при этом $t_\beta = z_\beta$.

4.3.3.15. Оценку параметров уравнений кривых усталости, квантилей и доверительных интервалов для квантилей пределов выносливости с помощью ЭВМ проводят обращением к подпрограмме Р24А02.

4.3.3.16. Если распределение случайной величины $Y = \ln \lg N$ или $Y = \lg N$ значимо отличается от нормального закона распределения, для оценки выборочных медианы и квантили используют данные пп. 2.4.8, 2.4.9. Оценку параметров медианной и квантильной кривых усталости a, b, σ_{-1} проводят методом наименьших квадратов. Оценку параметра σ_{-1} определяют минимизацией уравнения (198) по параметру σ_{-1}, оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ — по уравнениям (196), (197). При этом $\omega_i = 1$ для всех i. Аналогично определяют оценки параметров квантильной кривой усталости.

4.3.3.17. Оценку параметров на основе п. 4.3.3.16 с помощью ЭВМ проводят обращением к подпрограмме Р24А95, Р24А96.

Пример 32. Дать оценку параметров уравнений кривых усталости на основании данных, представленных в табл. 10, 11.

Таблица 10

Вариационные ряды числа циклов до разрушения образцов из сплава В95

Порядковый номер образца i	σ_{max}, МПа				
	380	285	254	228	210
	Числа циклов до разрушения				
	$N \cdot 10^{-4}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$
1	2,18	0,701	1,63	3,44	9,82
2	2,29	0,740	2,07	4,58	19,7
3	2,58	0,809	2,15	4,61	22,0
4	2,80	0,910	2,27	5,06	23,5
5	2,81	1,03	2,30	6,21	31,9
6	2,91	1,09	2,54	8,40	36,6
7	2,97	1,17	2,56	8,98	47,6
8	3,05	1,18	2,62	9,47	49,8
9	3,05	1,35	2,64	10,4	54,0
10	3,27	1,42	2,69	15,4	65,3

Продолжение табл. 10

Порядковый номер образца i	σ_{max}, МПа				
	330	285	254	228	210
	Числа циклов до разрушения				
	$N \cdot 10^{-4}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$	$N \cdot 10^{-5}$
11	3,39	1,43	2,87	18,5	82,8
12	3,48	1,54	3,02	18,8	90,4
13	3,63	1,54	3,41	23,2	10^{7*}
14	3,82	1,57	3,72	23,7	10^{7*}
15	3,84	1,58	3,74	24,8	10^{7*}
16	4,10	1,80	4,25	27,6	10^{7*}
17	4,12	2,02	5,23	33,0	10^{7*}
18	4,39	2,15	5,52	33,9	10^{7*}
19	5,21	2,22	6,63	37,4	10^{7*}
20	5,72	2,35	7,06	39,6	10^{7*}
21	—	—	7,93	41,8	10^{7*}
22	—	—	8,00	47,6	10^{7*}
23	—	—	8,07	55,5	10^{7*}
24	—	—	8,64	55,6	10^{7*}
25	—	—	10,2	67,3	10^{7*}
26	—	—	10,3	—	—

10^{7*} — образцы не разрушились.

Таблица 11

Значения выборочных средних и средних квадратических отклонений величин $Y=\ln N$ и $Y=\ln\lg N$

Статистические характеристики	Значения статистических характеристик при σ_a, МПа				
	330	285	254	228	210
$\hat{y}_i = \ln N_i$	$(4,5284)\ \frac{1}{m_1}$	$\frac{5,1295}{m_1}$	$\frac{5,6039}{m_1}$	$\frac{6,2548}{m_1}$	$\frac{7,0079}{m_1}$
$\hat{\sigma}_{Y_i}$	$\frac{0,1089}{m_1}$	$\frac{0,1565}{m_1}$	$\frac{0,2449}{m_1}$	$\frac{0,3894}{m_1}$	$\frac{0,5106}{m_1}$
$\hat{y}_i = \ln\lg N_i$	1,5101	1,6346	1,7225	1,8314	1,9475
$\hat{\sigma}_{Y_i}$	0,02421	0,03082	0,04368	0,06323	0,07717
$m_1 = 0,43429$					

Таблица 12

Результаты расчетов характеристик усталостных свойств образцов из сплава В95

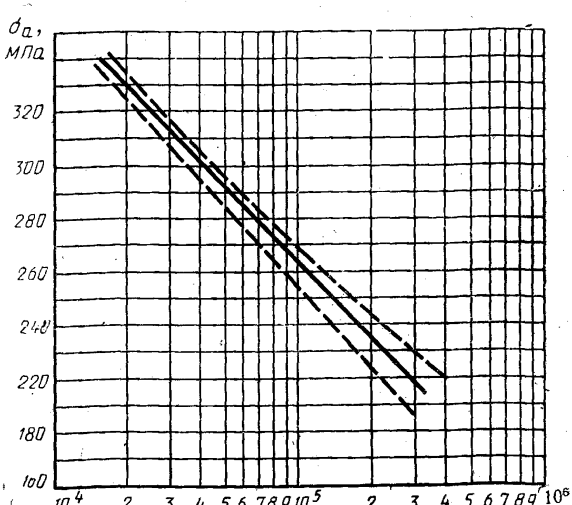
Кривая усталости	$\langle\gamma$	F	$\langle\sigma_0^2$	$\langle\sigma_{-1}$, МПа	$\langle c_1(a_1)$, МПа	$\langle\alpha(\beta)$	$\langle(\sigma_{-1})_p$, МПа	$\langle c_{1p}(\alpha_{1p})$, МПа	$\langle\alpha_p(\beta_p)$	$N_б = 10^6$ циклов			$N_б = 10^7$ циклов		
										$\frac{\sigma_{0,5}}{\sigma_{0,1}}$	$\sigma^{в}_{0,1}$	$\sigma^{н}_{0,1}$	$\frac{\sigma_{0,5}}{\sigma_{0,1}}$	$\sigma^{в}_{0,1}$	$\sigma^{н}_{0,1}$
(180)	14,1018	0,1669	(219,103)	175,00	2504,8	0,2665	158,55	2258,9	0,2501	$\frac{238,05}{229,84}$	267,41	205,23	$\frac{209,13}{198,62}$	244,30	177,28
(186)	10,6882	0,788	(147,7)	140,6	6786,9	2,3675	123,37	7782,4	2,4474	$\frac{238,18}{220,35}$	384,58	159,38	$\frac{208,35}{189,88}$	423,42	138,11

Как видно из табл. 11 последний уровень $\sigma_a = 210$ МПа является цензурированным. Оценки параметров для этого уровня определены в примере 2. Оценки параметров для полных выборок определяют в соответствии с уравнением (191).

Обращением к подпрограмме Р24А02 определяют оценки параметров уравнений кривых усталости (180) и (186) для $P = 0{,}5$ и $P = 0{,}1$, а также верхние и нижние доверительные границы квантилей пределов выносливости с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}9$ для баз 10^6 и 10^7 циклов.

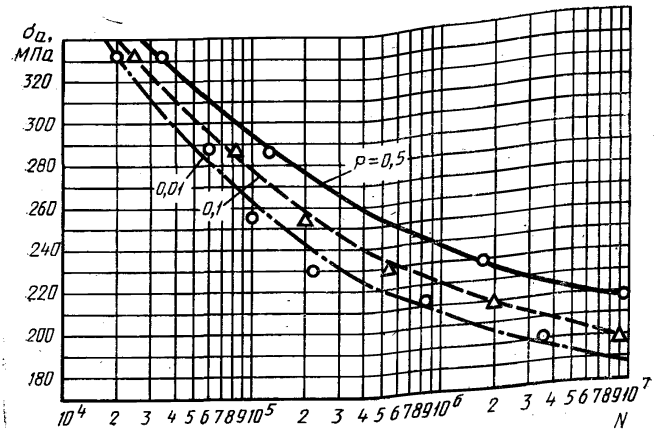
Все результаты расчетов сведены в табл. 12. Кривые усталости представлены на черт. 7, 8.

Квантильная кривая усталости уровня $P = 0{,}01$ для сплава В95 (сплошная линия) и границы 90 %-ной доверительной области (штриховые линии)



Черт. 7

Кривые усталости образцов из сплава В95



Черт. 8

4.3.4. *Планирование испытаний при построении кривых усталости*

4.3.4.1. При построении медианной $P = 0,5$ кривой усталости объем серии из образцов или элементов конструкций разделяют в зависимости от планируемой протяженности кривой на 3—5 групп, каждую из которых испытывают при постоянном уровне переменных напряжений. С увеличением числа уровней амплитуд напряжений ошибка в определении предела выносливости возрастает. Значение средней квадратической ошибки определения предела выносливости зависит от характера распределения объема серии объектов усталостных испытаний n на отдельные группы по числу принятых уровней напряжений при испытаниях m. Наименьшая ошибка достигается в том случае, когда преобладающую часть объема серии испытывают на самом нижнем уровне переменных напряжений, но этот вариант распределения не является целесообразным из-за резкого увеличения машинного времени при испытаниях. Если себестоимость объекта испытаний сравнительно не велика, то наиболее оптимальным с точки зрения минимума ошибки в определении предела выносливости и без резкого возрастания машинного времени является максимально возможный неравномерный вариант распределения образцов по уровням напряжений,

симметричный относительно середины диапазона амплитуд цикла напряжений [48]. Например, при $m = 4$ на двух крайних уровнях напряжения испытывают до 40 % от n, при двух средних — по 10 % от n. При $m = 3$ на среднем уровне испытывают 10 % от n образцов, а на крайних — по 45 % от n. Большей асимметрии при $n \leqslant 10$ добиться практически невозможно.

4.3.4.2. Объем усталостных испытаний n определяют из условия обеспечения относительной ошибки Δ_p оценки квантили предела выносливости уровня P с доверительной вероятностью β по уравнению

$$\Delta_p = \frac{\sigma^{в}_{a_p} - \widehat{\sigma}_{a_p}(N_б)}{\widehat{\sigma}_{a_p}(N_б)} \quad \text{— для квантилей верхних уровней } (P \geqslant 0{,}5); \tag{217}$$

$$\Delta_p = \frac{\widehat{\sigma}_{a_p}(N_б) - \sigma^{н}_{a_p}}{\widehat{\sigma}_{a_p}(N_б)} \quad \text{— для квантилей нижних уровней } (P < 0{,}5), \tag{218}$$

где $\sigma^{в;\,н}_{a_p}$ — верхние и нижние соответственно доверительные границы квантили уровня P предела выносливости, определяемые по уравнениям (214)—(216) с учетом требований пп. 4.3.3.8 и 4.3.3.13.

4.3.4.3. Эффективность планирования испытаний на усталость в значительной степени зависит от степени достоверности выбора параметров медианной кривой усталости по справочной информации, на основании которой назначают уровни амплитуд цикла напряжений для испытания элементов на усталость. Для деформируемых алюминиевых сплавов применительно к гладким лабораторным образцам диаметром 7,5—10 мм априорная кривая усталости для симметричного цикла нагружения может быть построена на основании следующих уравнений [9]:

$$\sigma_a = \sigma_в^{0{,}63}[1{,}57 + 94{,}1(\lg N)^{-2}] \quad \text{— для переменного изгиба;} \tag{219}$$

$$\sigma_{a_p} = \sigma_в^{0{,}63}[1{,}43 + 85{,}7(\lg N)^{-2}] \quad \text{— для переменного растяжения-сжатия.} \tag{220}$$

В случае асимметричного цикла нагружения с $\sigma_m = \text{const}$ уравнения кривых усталости принимают вид

$\sigma_a = (\sigma_в - \sigma_m)^{0{,}63}[1{,}57 + 94{,}1(\lg N)^{-2}]$ — для переменного изгиба;

$$\sigma_{a_p}=(\sigma_в-\sigma_m)^{0,63}[1,43+85,7(\lg N)^{-2}] \quad (221)$$

— для переменного растяжения-сжатия.

В формулах (219)—(221) σ_a представляет собой ординату точек медианной кривой усталости, выраженную в мегапаскалях; $\sigma_в$ — условный предел прочности в той же размерности.

Применительно к образцам большего диаметра, при наличии концентрации напряжений, а также для натурных элементов конструкций априорную кривую усталости для деформированных алюминиевых сплавов строят с использованием уравнения обобщенной кривой усталости

$$\frac{\sigma_{ад}}{\sigma'_{ад}}=0,45+26,95(\lg N)^{-2}, \quad (222)$$

где $\sigma_{ад}$ — предельная амплитуда цикла напряжений кривой усталости элемента конструкции, соответствующая долговечности N (ордината точек кривой усталости);

$\sigma'_{ад}$ — предельная амплитуда элемента конструкции для базы $N_б=10^7$ циклов.

Величину $\sigma'_{ад}$ для базы 10^7 циклов оценивают на основании формулы

$$\sigma'_{ад}=\frac{\sigma'_a}{\alpha_\sigma \mathrm{EXP}\left[2,3q_\sigma\left(\lg\frac{L}{G}-2\right)\right]}, \quad (223)$$

где σ'_a — предельная амплитуда цикла напряжений (предел ограниченной выносливости) гладкого лабораторного образца диаметром 7,5—10 мм (в МПа), рассчитываемая по формулам (219)—(221) для $N=10^7$ циклов или по формулам:

$$\sigma'_a=\sigma_{-1}=3,49\sigma_в^{0,63} \quad \text{— для переменного изгиба} \quad (224)$$

и

$$\sigma'_{ap}=\sigma_{-1p}=3,18\sigma_в^{0,63} \quad \text{— для переменного растяжения-сжатия;} \quad (225)$$

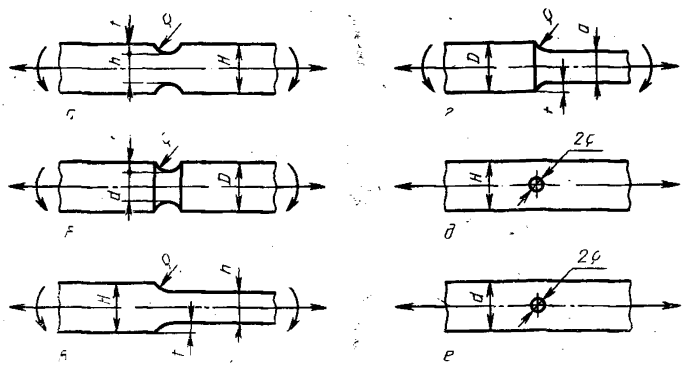
α_σ — теоретический коэффициент концентрации напряжений;

q_σ — коэффициент, являющийся характеристикой материала, отражающий его чувствительность к напрягаемому объему, определяемому абсолютными размерами элемента конструкции и степенью неравномерности распределения напряжений по сечению (для деформированных алюминиевых и магниевых сплавов $q_\sigma=0,04$—$0,08$);

L — часть параметра опасного поперечного сечения элемента конструкции или образца, в точках которого действуют максимальные напряжения, мм;

$\overline{G}$ — относительный максимальный градиент напряжений в зоне концентрации в мм$^{-1}$, формулы расчета которого для элементов конструкций, представленных на черт. 9, приведены в табл. 13.

Эскиз рабочей части элемента конструкции или образца для усталостных испытаний



Черт. 9

Таблица 13

Формулы для расчета L и $\overline{G}$

Эскиз элемента на черт. 9	Относительные размеры	Растяжение—сжатие		Изгиб	
		L, мм	$\overline{G}$, $\frac{1}{\text{мм}}$	L, мм	$\overline{G}$, $\frac{1}{\text{мм}}$
а)	$\frac{H}{h} \geqslant 1{,}5$	2δ	$\frac{2}{\rho}$	2δ	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1{,}5$	2δ	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	2δ	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
б)	$\frac{D}{d} \geqslant 1{,}5$	πd	$\frac{2}{\rho}$	πd	$\frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1{,}5$	πd	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	πd	$\frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$

Продолжение табл. 13

Эскиз элемента на черт. 9	Относительные размеры	Растяжение—сжатие		Изгиб	
		L, мм	$\overline{G}$, $\frac{1}{\text{мм}}$	L, мм	$\overline{G}$, $\frac{1}{\text{мм}}$
в)	$\frac{H}{h} \geqslant 1{,}5$	2δ	$\frac{2{,}3}{\rho}$	2δ	$\frac{2{,}3}{\rho} + \frac{2}{h}$
	$\frac{H}{h} < 1{,}5$	2δ	$\frac{2{,}3(1+\varphi)}{\rho}$	2δ	$\frac{2{,}3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$
г)	$\frac{D}{d} \geqslant 1{,}5$	πd	$\frac{2{,}3}{\rho}$	πd	$\frac{2{,}3}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$\frac{D}{d} < 1{,}5$	πd	$\frac{2{,}3(1+\varphi)}{\rho}$	πd	$\frac{2{,}3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$
д)	—	2δ	$\frac{2{,}3}{\rho}$	—	—
е)	—	$2d$	$\frac{2{,}3}{\rho}$	—	—

Примечания:

1. δ — толщина плоских элементов конструкции в опасном сечении.

2. $\varphi = \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{t}{\rho}+2}}$.

Построение априорной кривой усталости для стальных образцов и элементов конструкций осуществляют также на основании информации о соотношениях параметров кривых усталости, статической прочности материала, геометрических особенностей элементов и т. д.

Пределы выносливости гладких лабораторных образцов диаметром 7,5—10 мм при переменном изгибе оцениваются, МПа, на основании выражений

$$\sigma_{-1} = 1{,}23\sigma_{\text{в}}^{0{,}850} \quad \text{— для углеродистых сталей} \qquad (226)$$

и

$$\sigma_{-1} = 2{,}21\sigma_{\text{в}}^{0{,}777} \quad \text{— для легированных сталей.} \qquad (227)$$

Пределы выносливости в случае переменного растяжения-сжатия в среднем составляют 0,75—0,95 предела выносливости при переменном изгибе.

Для целей планирования усталостных испытаний предел выносливости при переменном изгибе стальных гладких полированных образцов можно оценить по формуле

$$\sigma_{-1} = (0{,}55 - 10^{-4}\,\sigma_в)\sigma_в.$$

При этом, как показал анализ, для легированных сталей она по сравнению с формулой (227) приводит к дополнительной систематической ошибке в сторону занижения предела выносливости на 5—10 %, а для углеродистых сталей по сравнению с формулой (226) приводит к дополнительной систематической ошибке в сторону завышения на 2—5 %.

Для образцов больших поперечных сечений, при наличии концентраторов напряжений, а также для натурных элементов конструкций медиану предела выносливости $\sigma_{-1д}$ оценивают по выражению

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}\left[1 + \left(0{,}0113\frac{L}{G}\right)^{-\nu_\sigma}\right]}{2\alpha_\sigma}, \qquad (228)$$

где σ_{-1} — предел выносливости гладкого лабораторного образца диаметром 7,5—10 мм;

ν_σ — параметр уравнения подобия усталостного разрушения, равный 0,10—0,18 для углеродистых сталей и 0,04—0,12 — для легированных сталей; остальные обозначения те же, что и в формуле (223).

Левую наклонную ветвь априорной кривой усталости проводят через точку с координатами (N_0, $\sigma_{-1д}$), где N_0 — абсцисса точки *перелома кривой усталости, значение которой обычно принимают* от 10^6 до $3 \cdot 10^6$ циклов или рассчитывают по формуле

$$N_0 = 10^4 \sigma_{-1д}^{0{,}997 - 0{,}003 \cdot m}, \qquad (229)$$

где m — параметр уравнения кривой усталости (184), определяемый на основании корреляционного соотношения (230)

$$m = 0{,}027\sigma_{-1д} + 1{,}4 \qquad (230)$$

или приближенно по формуле

$$m = c\,\frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{-1}},$$

где $c = 12$ — для сварных соединений, $c = 12—20$ — для элементов из углеродистой стали и $c = 20—30$ — для элементов конструкций из легированной стали.

Для целей расчета на прочность рекомендуют следующую формулу для оценки величины c:

$$c = 5 + \frac{\sigma_в}{80}.$$

Наклон левой ветви априорной кривой усталости в этом случае определяется параметром m.

При наличии упрочняющей обработки элементов конструкций, действии агрессивных сред или повышенных температур в формулы (222), (223), (228) вводят поправочные коэффициенты, учитывающие действие указанных факторов на предел выносливости.

По построенной таким образом априорной кривой усталости объекта будущих усталостных испытаний устанавливают уровни амплитуд цикла напряжений, входящих в формулы (217), (218). Верхний уровень выбирают с учетом требования на протяженность кривой усталости в зону низкой долговечности, однако при этом напряжении медиана числа циклов до разрушения не должна быть ниже $5 \cdot 10^4—10^5$ циклов, т. е. долговечность при испытании должна определяться областью многоцикловой усталости.

Нижний уровень амплитуды цикла напряжений для объектов испытаний, имеющих горизонтальный участок на кривой усталости, выбирают равным расчетному значению предельной амплитуды по формуле (228). Для элементов из магниевых, алюминиевых, титановых и др. сплавов, горизонтальный участок на кривой усталости у которых отсутствует, нижний уровень амплитуды цикла напряжений выбирают из диапазона (1,0—1,2) от оценки предельной амплитуды для принятой базы испытания по формуле (222). В случае выбора левой границы указанного диапазона отпадает необходимость экстраполяции кривой усталости в область базовой долговечности, что при принятом уровне ошибки определения предела выносливости приводит к снижению общего числа испытуемых объектов и к увеличению машинного времени испытаний на нижнем уровне напряжений. И, наоборот, выбор правой границы диапазона для нижнего уровня амплитуды цикла вызывает потребность экстраполяции кривой, что при заданном уровне ошибки приведет к увеличению числа объектов испытаний и снижению машинного времени, которое в основном определяется временем испытания на нижнем уровне напряжения. Таким образом, при выборе нижнего уровня амплитуды цикла напряжений выступает экономический аспект, требующий учета стоимости машинного вре-

мени и стоимости объекта испытаний, т. к. требуемая точность определения предела выносливости может быть достигнута при разных объемах серий объектов испытаний и при различном машинном времени.

Остальные уровни амплитуд цикла напряжений при испытании выбирают в диапазоне между максимальным и минимальным уровнем через равные интервалы.

Начинать испытания следует с промежуточных уровней и при необходимости проводить их корректировку.

Для уточнения значения предела неограниченной выносливости объектов при наличии горизонтального участка на кривой усталости при уровнях амплитуды цикла напряжений 0,95—1,05 значения, соответствующего пределу выносливости, определяемому по уже построенной кривой усталости, испытывают до базовой долговечности дополнительную группу образцов объемом 10—20 % от n, но не менее 3 шт.

Пример 33. Определить необходимый объем усталостных испытаний образцов сплава АВ для обеспечения относительной ошибки (218) оценки квантили предела выносливости уровня $P = 0{,}1$ $\Delta_p = 0{,}05$ с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}95$ на базе 10^7 циклов.

На основании литературных данных [44] принимают в уравнении (222) $(\sigma_{-1})_{10^7} = 150$ МПа, $\gamma_\sigma = 0{,}05$. Планируемые уровни амплитуды напряжений соответствуют долговечностям 10^5, $10^{5{,}7}$; $10^{6{,}3}$; 10^7 циклов и составляют $\sigma_{a_1} = 229{,}2$ МПа; $\sigma_{a_2} = 191{,}2$ МПа; $\sigma_{a_3} = 169{,}3$ МПа; $\sigma_{a_4} = 150$ МПа. Зависимость (192) дисперсии σ_Y^2 случайной величины Y от σ_a принимают в следующем виде

$$\sigma_Y^2 = \frac{\gamma_\sigma^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a - \sigma_{-1}}\right)^2, \text{ (при этом } \beta = 2).$$

Необходимый объем испытаний определяют обращением к подпрограмме PLAN. В табл. 14 приведен один из шагов расчета для равномерного варианта распределения образцов по уровням. Видно, что требуемым условиям отвечает объем усталостных испытаний $n = 60$. В этом случае на каждом уровне испытывают по 15 образцов. Для полного решения задачи варьируют распределением образцов по уровням, добиваясь наименьшего суммарного объема усталостных испытаний при тех же условиях. При необходимости в процесс оптимизации включают стоимость испытаний (46).

Таблица 14

Результаты расчета относительных ошибок оценки квантили предела выносливости

Объем испытаний n	Характеристика	База испытания, цикл				
		10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
60	$\sigma_{0,1}$, МПа	214,79	168,35	140,52	122,54	110,28
	$\sigma^{н}_{0,1}$, МПа	210,24	164,88	133,48	108,19	91,406
	Δ_p	0,0212	0,0206	0,0501	0,117	0,171
80	$\sigma_{0,1}$, МПа	214,79	168,35	140,52	122,54	110,28
	$\sigma^{н}_{0,1}$, МПа	210,85	165,35	134,38	109,82	93,146
	Δ_p	0,0183	0,0178	0,0436	0,103	0,154
100	$\sigma_{0,1}$, МПа	214,79	168,35	140,52	122,54	110,28
	$\sigma^{н}_{0,1}$, МПа	212,27	165,66	135,02	111,03	94,581
	Δ_p	0,0164	0,0159	0,0391	0,0940	0,142

4.4. Оценка параметров функции распределения предела выносливости

4.4.1. Одним из вариантов представления характеристик сопротивления усталости материала и конструктивных элементов являются кривые функции распределения предела выносливости.

Для расчета элементов конструкций, планирования испытаний и статистического анализа их результатов рекомендуют нормальный закон распределения предела выносливости $X=\sigma_{-1}$, который удовлетворительно согласуется с опытными данными [44]. Для тех же целей используют нормальное распределение величины $X=\ln(\sigma_{-1}-x_0)$ [49] (логарифмически нормальное распределение). Для сталей широко используют распределение Вейбулла, когда $X=\sigma_{-1}$.

4.4.2. Статистическую оценку параметров функции распределения предела выносливости проводят методами «вверх-вниз», «пробитов», а также на основании анализа эмпирической функции распределения предела выносливости.

4.4.3. *Метод «вверх-вниз»*

4.4.3.1. В соответствии с методом «вверх-вниз» [50, 51, 52] первый образец серии объектов объемом N испытывают при значении предела выносливости равном ожидаемому. Если первый образец не разрушится до базового числа циклов N_6, то второй образец испытывают при более высоком напряжении, а если он разрушится, то испытание второго объекта проводят при более низком уровне напряжения. Уровень напряжения для испытания третьего образца выбирают в зависимости от результатов испытания второго образца.

4.4.3.2. ММП-оценки параметров распределения определяют решением системы k уравнений

$$\sum_{i=1}^{k_1} \left(\frac{\partial F}{\partial g_j} \right)_{g=\hat{g}} \cdot \left(\frac{n_i}{F_i} - \frac{m_i}{1-F_i} \right)_{g=\hat{g}} = 0, \qquad (231)$$

при этом $j=1,2,\ldots,k$;

$i=1, 2, \ldots, k_1$ — номера уровней амплитуд напряжений ($\sigma_{a_1}, \ldots, \sigma_{a_{k_1}}$ при испытаниях;

k_1 — число уровней амплитуд напряжений (при испытаниях методом «вверх-вниз» k_1 — величина случайная);

n_i — число разрушенных объектов на i-м уровне;

m_i — число неразрушенных объектов на i-м уровне;

$N_i = n_i + m_i$ — общее число испытанных образцов на i-м уровне;

$N = \sum_{i=1}^{k_1} N_i$ — общее число испытанных образцов (при испытаниях методом «вверх-вниз» n_i, m_i, N_i — величины случайные);

k — число подлежащих оценке параметров $g_1, g_2, \ldots, g_k$ непрерывной дифференцируемой функции распределения $F(\sigma_{-1}, g_1, \ldots, g_k)$ предела выносливости;

$\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_k$ — оценки параметров.

4.4.3.3. Производные $\frac{\partial F}{\partial g}$ определяют конкретный вид системы уравнений (231); для нормального распределения $g_1 = a$, $g_2 = \sigma$, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{\varphi(z)}{\sigma}; \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\frac{\varphi(z) \cdot z}{\sigma}; \quad z = \frac{\sigma_{-1} - a}{\sigma};$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}};$$

$$F(\sigma_{-1})=\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(x)dx.$$

Для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла — Гнеденко $g_1=a_l\,(a)$, $g_2=\sigma_l\,(\sigma)$, $g_3=x_0$, тогда

$z=\dfrac{\ln(\sigma_{-1}-x_0)-a_l}{\sigma_l}$ — для логарифмически нормального распределения;

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}};$$

$z=\dfrac{\ln(\sigma_{-1}-x_0)-a}{\sigma}$ —для распределения Вейбулла—Гнеденко

$$a=\ln c,\ b=\frac{1}{\sigma}.$$

$$\varphi(z)=e^{z-e^z},\ F(z)=1-\mathrm{EXP}(-e^z).$$

4.4.3.4. Для нормального распределения предела выносливости линейная аппроксимация [50, 51, 52] системы уравнений (231) приводит при определенных ограничениях к простым оценкам параметров

$$\widehat{a}=\bar{\sigma}_{-1}=\sigma_{a_1}+d\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1} in_i}{\sum\limits_{i=1}^{k_1} n_i}\pm 0{,}5\right]; \qquad (232)$$

$$\widehat{\sigma}=s_{\sigma_{-1}}=1{,}62d\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_1} n_i\sum\limits_{i=1}^{k_1} i^2n_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{k_1} in_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k_1} n_i\right)^2}+0{,}029\right], \qquad (233)$$

где d — интервал между уровнями напряжений (на продолжении испытаний выдерживается постоянным).

После проведения испытаний перед расчетом по формулам (232), (233) устанавливают общее число разрушений и неразрушений. Если общее число разрушений $\sum\limits_{i=1}^{k_1} n_i$ меньше числа неразрушений $\sum\limits_{i=1}^{k_1} m_i$, расчет ведут по разрушенным образцам. В этом случае

в формуле (232) ставят знак минус. Если меньшим оказывается общее число неразрушений, то расчет ведут по неразрушенным образцам (т. е. в формулах (232, 233) вместо n_i подставляют m_i) и в формуле (232) ставят знак плюс. Формула (233) дает удовлетворительные результаты при значении первого слагаемого в квадратных скобках больше 0,3.

4.4.3.5. Асимптотическую матрицу размерности $k \times k$ вариаций-ковариаций ММП-оценок параметров распределений $\|\nu_{es}\|$ определяют обращением матрицы $\|\mu_{es}\|$ по формулам:

$$\|\nu_{es}\| = \|\mu_{es}\|^{-1} \quad \text{(при этом } e,s=1,2,\ldots,k); \tag{234}$$

$$\mu_{es} = \sum_{i=1}^{k_i} \left(\frac{\partial F}{\partial g_e}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial g_s}\right)\left[\frac{n_i}{F_i^2} + \frac{m_i}{(1-F_i)^2}\right]$$

при этом $e,s=1,2,\ldots,k$). (235)

При статистической обработке результатов усталостных испытаний в уравнениях (234), (235) приближенно подставляют ММП-оценки параметров и действительные числа разрушений n_i и неразрушений m_i. При планировании испытаний методом «вверх-вниз» в уравнениях (234), (235) подставляют ожидаемые значения параметров распределения и чисел разрушений и неразрушений.

4.4.3.6. Ожидаемые значения чисел разрушений на i-м уровне амплитуды напряжения цикла σ_{a_i} определяют из уравнений

$$n_i = \frac{N}{2} \cdot \frac{\omega_i}{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_i};$$

$$\omega_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{F_j}{1-F_j} \text{ при } F_i < 1-F_i (i<0);$$

$$\omega_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1-F_j}{F_j} \text{ при } F_i > 1-F_i (i>0); \tag{236}$$

$$\omega_0 = 1 \text{ при } F_i = 1-F_i;$$

$$N = 2n_0 \left[\sum_{i=-\infty}^{-1} \prod_{j=1}^{i} \frac{F_j}{1-F_j} + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1-F_j}{F_j}\right], \tag{237}$$

где N — ожидаемое значение общего числа испытаний.

Ожидаемое значение числа неразрушений на i-м уровне определяют из уравнения

$$m_i = n_{i+1} = n_i \frac{1-F_i}{F_i} \tag{238}$$

4.4.3.7. В соответствии с формулами (234) — (238) ожидаемые значения элементов матрицы (235) определяют из уравнений

$$\mu_{es}=\frac{N}{2\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}\omega_i}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_e}\right)\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_s}\right)\frac{\omega_i}{F_i^2(1-F_i)}. \qquad (239)$$

Для нормального распределения элементы матрицы оценок ν_{es} по формулам (232) — (233) определяют из уравнений

$$\nu_{11}=D\{\hat{a}\}=\frac{2\sigma^2}{N}G^2;\ \nu_{22}=D\{\hat{\sigma}\}=\frac{2\sigma^2}{N}H^2; \qquad (240)$$

$$\nu_{12}\cong 0,$$

где ν_{11} — асимптотическая дисперсия выборочного среднего значения предела выносливости;

ν_{22} — асимптотическая дисперсия выборочного среднего квадратического отклонения предела выносливости.

$$\nu'_{11}=2G^2;\ \nu'_{22}=2H^2;\ \nu'_{12}\cong 0.$$

Значения функций G и H даны в табл. 35 приложения в зависимости от отношения величины интервала между уровнями d к ожидаемому значению среднего квадратического отклонения $\frac{d}{\sigma}$ и в зависимости от положения ожидаемого среднего значения предела выносливости a относительно ближайшего к этому значению уровня амплитуды напряжения цикла при испытаниях.

4.4.3.8. Приближенные доверительные границы для квантили уровня P предела выносливости с доверительной вероятностью β определяют в соответствии с пп. 2.5.2.8—2.5.2.10.

Оценку параметров функции распределения предела выносливости методом «вверх-вниз» и доверительное оценивание квантилей проводят с помощью ЭВМ обращением к подпрограммам Р24А72, Р24А61, Р24А76 для трех типов распределений.

Пример 34. В табл. 15 приведены результаты усталостных испытаний методом «вверх-вниз» 40 образцов из углеродистой стали с $\sigma_в = 600$ МПа. Дать оценку параметров функций распределения предела выносливости и оценку квантили уровня $P = 0{,}1$ с построением доверительных интервалов для квантилей.

Обращением к подпрограммам Р24А61, Р24А72, Р24А76 получают общие оценки параметров нормального, логарифмически нормального и Вейбулла-распределений. Для нормального распределения $\hat{a}=295{,}52$ МПа, $\hat{\sigma}=6{,}18$ МПа; для логарифмически нормального $\hat{a}_l=3{,}266$, $\hat{\sigma}_l=0{,}229$, $\hat{x}_0=269{,}0$ МПа; для распределения Вейбулла $\hat{c}=13{,}421$, $\hat{b}=2{,}085$, $\hat{x}_0=284$ МПа.

Таблица 15

Результаты испытаний образцов

σ_{a_i}, МПа	Число образцов		
	разрушенных n_i	неразрушенных m_i	общее N_i
285	0	1	1
290	1	8	9
295	9	6	15
300	7	4	11
305	4	0	4

Верхние и нижние доверительные границы квантили уровня $p=0,1$ предела выносливости с доверительной вероятностью $\beta=0,9$ определяют из уравнений (88) — (90) для нормального распределения; логарифмически нормального и Вейбулла:

$\sigma^{в}_{p=0,1}=292,27$ МПа; $\hat{\sigma}_{p=0,1}=287,6$ МПа; $\sigma^{н}_{p=0,1}=282,9$ МПа;

$\sigma^{в}_{p=0,1}=294,2$ МПа; $\hat{\sigma}_{p=0,1}=288,5$ МПа; $\sigma^{н}_{p=0,1}=282,9$ МПа;

$\sigma^{в}_{p=0,1}=294,4$ МПа; $\hat{\sigma}_{p=0,1}=288,57$ МПа; $\sigma^{н}_{p=0,1}=282,7$ МПа.

Значение статистики критерия согласия хи-квадрат, рассчитываемой по формуле

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k_1}\frac{(n_i-N_iF_i)^2}{N_iF_i(1-F_i)}\leqslant\chi^2_{\alpha,k_1-2} \qquad (241)$$

составляет для нормального распределения 2,747; для логарифмически нормального распределения — 2,422; для распределения Вейбулла — 2,370. Критическое значение критерия $\chi^2_{\alpha,\,k_1-2}$ для числа степеней свободы $f=k_1-2=5-2=3$ и уровня значимости $\alpha=0,05$ равно 7,8, что подтверждает гипотезу о соответствии опытных данных теоретическому закону для рассматриваемых распределений.

Анализ результатов статистической обработки свидетельствует о лучшем соответствии опытным данным логнормального распределения и распределения Вейбулла — Гнеденко по сравнению с нормальным законом распределения предела выносливости.

4.4.4. *Метод «пробитов»* [9]

4.4.4.1. В соответствии с методом «пробитов» серию образцов объемом N делят на 4—5 групп. Образцы каждой группы испытывают до базового значения числа циклов на соответствующем уровне напряжения. В результате испытаний на каждом уровне σ_a об-

разуются разрушенные и неразрушенные объекты. Оценки параметров распределения предела выносливости определяют решением системы уравнений (231). Асимптотическую матрицу вариаций-ковариаций определяют по уравнениям (234), (235). В отличие от метода «вверх-вниз» число уровней амплитуд напряжений k_1, а также число испытуемых образцов на каждом уровне N_i ($i=1, 2, ..., k_1$) определяют заранее, исходя из плана испытаний. Поэтому ожидаемые значения элементов матрицы (235) имеют вид:

$$\mu_{es}=N\sum_{i=1}^{k_1}\frac{\partial F_i}{\partial g_e}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial g_s}\omega_i\left(\frac{1}{F_i}+\frac{1}{1-F_i}\right), \qquad (242)$$

где $\omega_i=\frac{N_i}{N}=\frac{n_i+m_i}{N}$ — относительный объем испытаний на i-м уровне.

4.4.4.2. Для нормального закона распределения предела выносливости приближенно рассчитывают более простые оценки параметров a, σ по формулам:

$$\hat{a}=\bar{\sigma}_1=\bar{x}-\alpha/\beta; \qquad (243)$$

$$\hat{\sigma}=s_{\sigma_{-1}}=\frac{1}{\beta}, \qquad (244)$$

где $\bar{x}=\bar{\sigma}_a=\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i\sigma_{a_i}/\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i$; (245)

$$\alpha=\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i z_{p_i}/\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i; \qquad (246)$$

$$\beta=\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i(\sigma_{a_i}-\bar{\sigma}_a)(z_{p_i}-\alpha)/\sum_{i=1}^{k_1}N_i\omega_i(\sigma_{a_i}-\bar{\sigma}_a)^2; \qquad (247)$$

$$\omega_i=\varphi^2(z_{p_i})/[\hat{P}_i(1-\hat{P}_i)], \qquad (248)$$

где z_{p_i} — квантиль уровня $\hat{P}_i$ нормированного нормального распределения;

$\hat{P}_i=\frac{n_i}{N_i}$ — оценка вероятности разрушения на i-м уровне;

$$\varphi(z_{p_i})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_{p_i}^2}{2}}$$

4.4.4.3. Доверительные границы для квантилей пределов выносливости определяют в соответствии с пп. 2.5.2.8—2.5.2.10 для

$$n=N, \quad \nu_{ij}=\frac{\sigma^2}{N}\,\|\mu_{ij}\|^{-1}.$$

4.4.5. *Планирование испытаний методами «вверх-вниз» и пробитов*

4.4.5.1. Планирование испытаний методом «вверх-вниз» предусматривает определение потребного объема N испытаний для обеспечения заданной относительной ошибки δ_p оценки квантили предела выносливости уровня P с доверительной вероятностью β (см. п. 2.7.3).

$$\delta_p=\frac{x_p^{\text{в}}-\widehat{x}_p}{\widehat{\sigma}} \quad \text{—для } P\geqslant 0{,}5; \tag{249}$$

$$\delta_p=\frac{\widehat{x}_p-x_p^{\text{н}}}{\widehat{\sigma}} \quad \text{—для } P<0{,}5, \tag{250}$$

где $x_p=\sigma_p$ — для нормального распределения;

$x_p=\ln(\sigma_p-x_0)$ — для распределения Вейбулла — Гнеденко;

$x_p=\lg(\sigma_p-x_0)$ — для логарифмически нормального распределения.

При этом задают величину интервала между уровнями амплитуд напряжений d, значение одного из уровней амплитуд напряжений, ожидаемые значения параметров функции распределения предела выносливости.

4.4.5.2. Планирование испытаний методом «пробитов» предусматривает определение потребного объема испытаний N при заданных числе и значениях уровней амплитуд напряжений циклов, характере распределения объектов испытаний по уровням для обеспечения заданной относительной ошибки δ_p. Задают также ожидаемые значения параметров функции распределения предела выносливости.

4.4.5.3. Метод «вверх-вниз» дает оценки с меньшей дисперсией, чем метод «пробитов». К числу преимуществ метода «пробитов» относятся: возможность параллельного испытания нескольких объектов на ряде усталостных машин, возможность варьирования величиной интервала между уровнями, возможность объединения разнородных испытаний однотипных объектов в одну группу.

4.4.6. *Модифицированный метод пробитов (графоаналитический метод)* [9]

4.4.6.1. Метод используют для определения предела выносливости.

Образцы испытывают на шести уровнях напряжения. Самый высокий уровень выбирают с таким расчетом, чтобы все образцы разрушились до базового числа циклов. Ориентировочно это напряжение равно 1,3 — 1,5 значения предела выносливости для $P=50$ %.

Остальные пять уровней распределяют таким образом, чтобы на среднем разрушилось около 50 % образцов, на двух высоких от 70 до 80 % и не менее 90 % на двух низких — не более 10 % и 20 — 30 % соответственно.

Наименьший уровень напряжения выбирают с учетом возможности надежной экстраполяции до базового числа циклов кривой усталости, построенной для малой вероятности разрушения.

4.4.6.2. Результаты испытаний представляют в виде вариационных рядов, на основании которых строятся кривые распределения долговечности.

На основании кривых распределения долговечности строят семейство кривых усталости для ряда вероятностей разрушения (п. 4.3.2).

Целесообразно использовать вероятности, равные 0,01; 0,10; 0,30; 0,50; 0,70; 0,90; 0,99.

4.4.6.3. По кривым усталости определяют соответствующие значения предела выносливости. Предел выносливости для малой вероятности разрушения, например для $P=0{,}01$, находят путем графической экстраполяции, соответствующей кривой усталости до базового числа циклов.

Значения пределов выносливости наносят на график, координатами которого являются вероятность разрушения и предел выносливости. Через построенные точки проводят линию, представляющую графическую оценку функции распределения предела выносливости.

4.4.6.4. Оценки параметров функции распределения пределов выносливости определяют по уравнению

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F_i}{\partial g_l}\right)\left(\frac{\widehat{P}_i}{F_i}-\frac{1-\widehat{P}_i}{1-F_i}\right)_{g=\widehat{g}}=0, \text{ (при этом } l=1,2,\ldots,k_1), \quad (251)$$

где $\widehat{P}_i$ — вероятность разрушения, соответствующая i-й квантильной кривой усталости;

k — число параметров распределения;

k_1 — число квантильных кривых усталости, подвергающихся обработке;

F_i — непрерывная дифференцируемая функция распределения предела выносливости, параметры которой подлежат оценке.

4.4.6.5. Оценку параметров эмпирической функции распределения предела выносливости с помощью ЭВМ проводят обращением к подпрограмме PROBIT.

Пример 35. Построить функцию распределения предела выносливости образцов из алюминиевого сплава для базы 5×10^7 циклов по данным табл. 16 и оценить ее параметры.

Таблица 16

Значение долговечности образцов из алюминиевого сплава

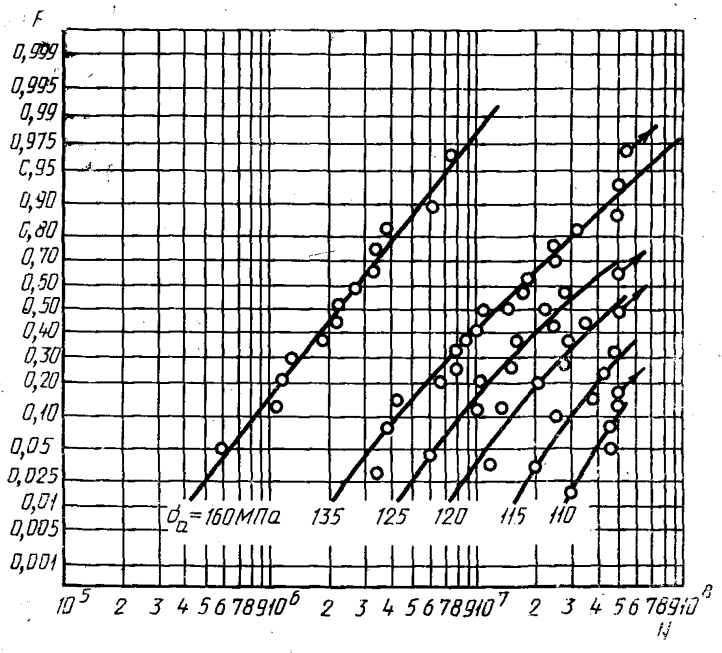
$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=110 МПа	$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=115 МПа	$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=120 МПа	$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=125 МПа	$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=135 МПа	$N\cdot10^{-7}$ при σ_{max}=160 МПа
3,02	1,90	1,01	0,46	2,25	0,68
4,30	2,70	1,21	0,78	3,84	0,80
5,00*	3,25	1,68	1,05	5,21	0,93
5,00*	3,80	2,20	1,08	5,35	1,28
5,00*	4,30	2,45	1,48	5,8	1,42
5,00*	4,80	2,51	1,49	6,41	1,61
5,00*	5,00*	3,29	1,67	7,51	1,62
5,00*	5,00*	3,39	1,80	9,72	1,72
5,00*	5,00*	4,21	2,17	11,5	2,15
5,00*	5,00*	4,80	2,59	11,6	2,39
5,00*	5,00*	5,00*	3,35	12,5	2,58
5,00*	5,00*	5,00*	3,50	13,1	2,90
5,00*	5,00*	5,00*	4,19	15,5	2,91
5,00*	5,00*	5,00*	4,91	17,0	3,08
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	25,0	3,40
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	26,3	3,48
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	36,5	3,95
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	41,9	5,81
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	6,15
5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	5,00*	9,98

* Образцы не разрушились.

На основании вариационных рядов (см. табл. 16) строят кривые распределения долговечности (черт. 10). Производя горизонтальные разрезы кривых распределения долговечности для уровней вероятности P=0,01; 0,10; 0,30; 0,50; 0,70; 0,90; 0,99, находят соответствующие долговечности при заданных значениях напряжений, на основании которых строят кривые усталости по параметру вероятностей разрушения (черт. 11).

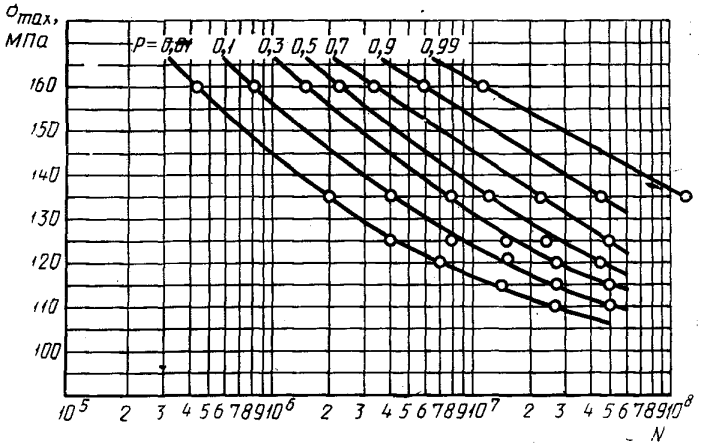
С графиков (черт. 11) снимают значения пределов выносливости для базы 5×10^7 циклов. Значения пределов выносливости приведены в табл. 17. По данным табл. 17 строят кривую распределения пределов выносливости (черт. 12).

Кривые эмпирического распределения долговечности образцов из сплава АВ



Черт. 10

Квантильные кривые усталости образцов из сплава АВ для различных уровней вероятности



Черт. 11

Таблица 17

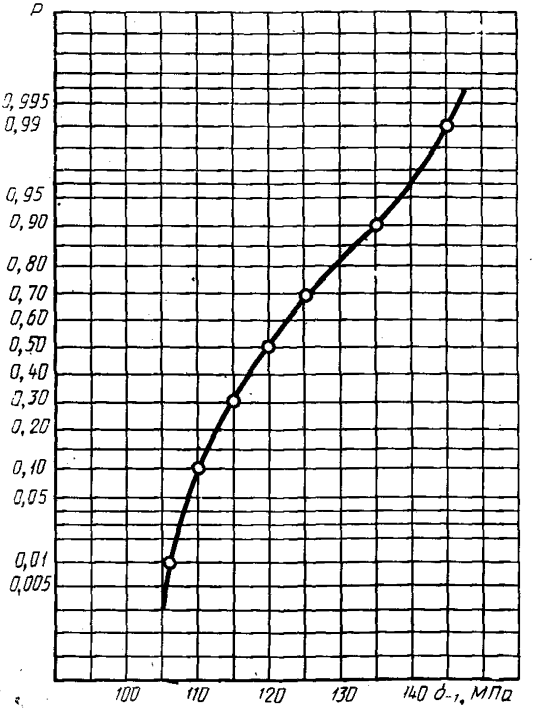
Значения пределов ограниченной выносливости образцов из алюминиевого сплава для базы $5 \cdot 10^7$ циклов

Вероятность разрушения	0,01	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	0,99
Предел ограниченной выносливости σ_{-1}, МПа	106	110	115	120	125	135	145

Обращением к подпрограмме PROBIT рассчитывают оценки параметров функций распределения пределов выносливости. Для нормального распределения $\hat{a}=121{,}07$ МПа, $\hat{\sigma}=9{,}23$ МПа.

Для логарифмически нормального распределения $\hat{a}_l=3{,}12$; $\hat{\sigma}_l=0{,}39$; $\hat{x}_0=96{,}7$ МПа. Для распределения Вейбулла — Гнеденко $\hat{c}=18{,}73$; $\hat{b}=1{,}834$; $\hat{x}_0=104{,}5$ МПа. Значения функций распределения, соответствующие значениям пределов выносливости, представленным в табл. 17, приведены в табл. 18.

График эмпирической функции распределения предела ограниченной выносливости образцов из сплава АВ для базы 5×10^7 циклов



Черт. 12

Таблица 18

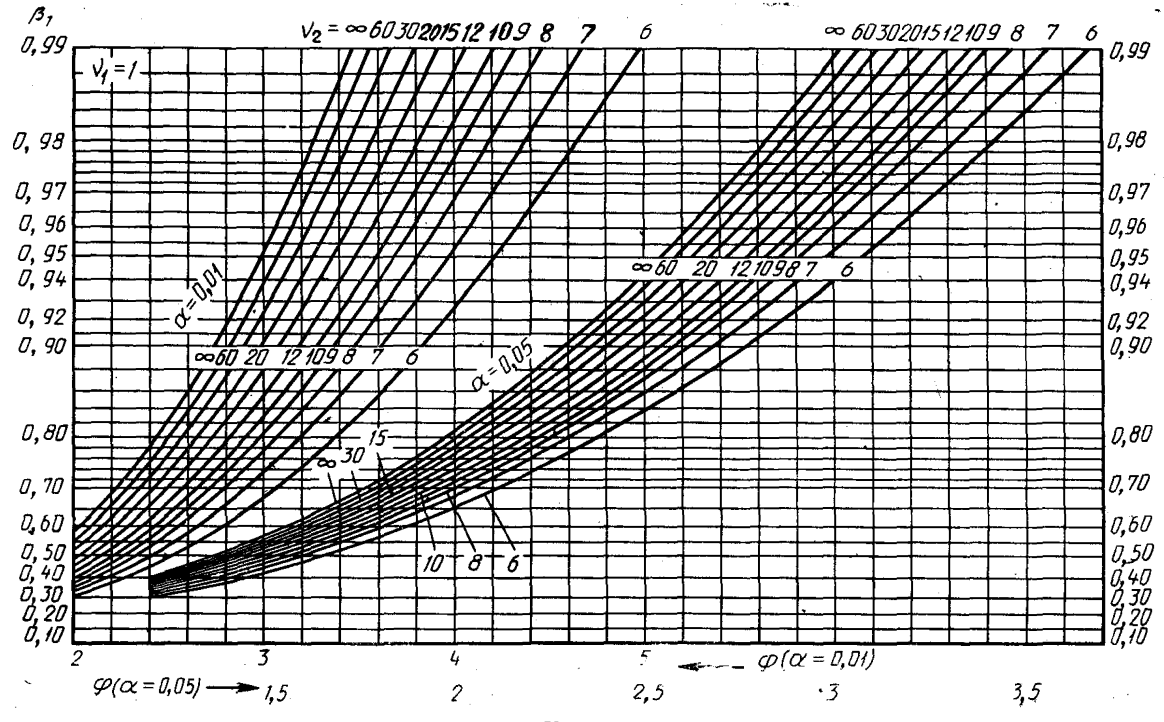
Значения функций распределения пределов выносливости

Вероятность разрушения	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,99
Предел ограниченной выносливости σ_{-1}, МПа	106	110	115	120	125	135	145
Значения функции нормального распределения	0,051	0,115	0,255	0,454	0,665	0,934	0,995
Значения функции логнормального распределения	0,011	0,086	0,290	0,526	0,713	0,909	0,973
Значения функции распределения Вейбулла — Гнеденко	0,0099	0,100	0,293	0,507	0,693	0,913	0,984

Сравнение вероятностей разрушения и значений функций распределения пределов выносливости позволяет сделать вывод о более тесном соответствии опытным данным логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла — Гнеденко по сравнению с нормальным законом распределения предела выносливости.

Кривые мощности t-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

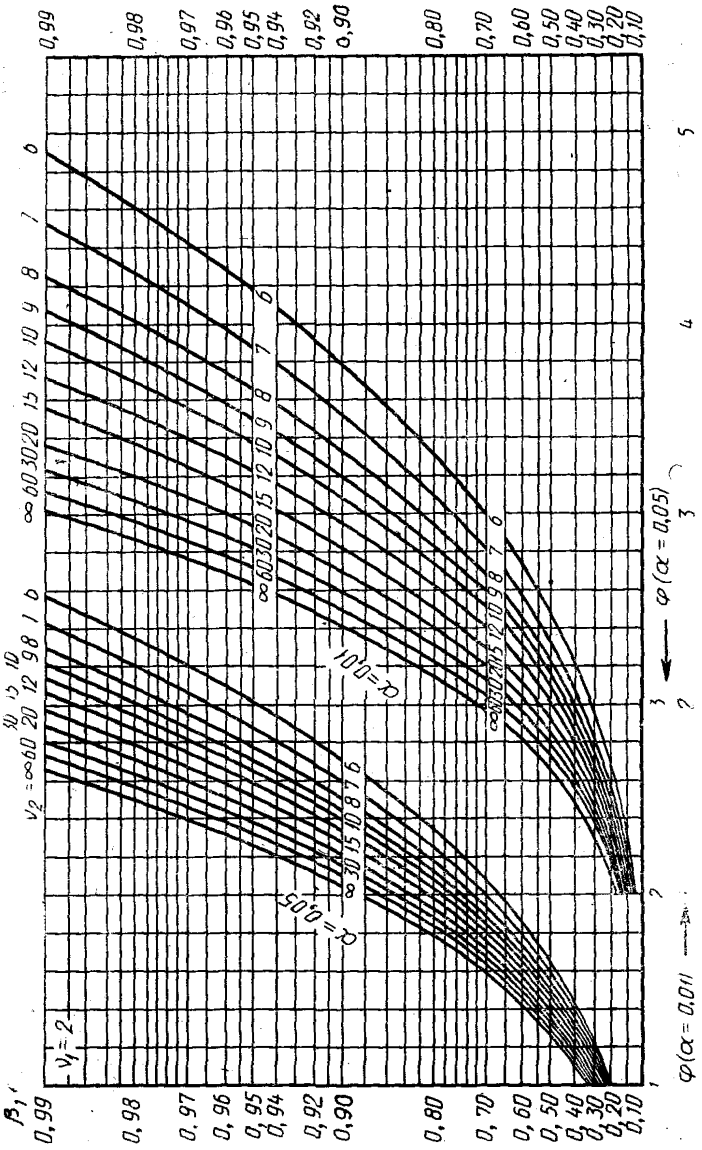
Для степени свободы $\nu_1 = 1$



Черт. 13

Кривые мощности *F*-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

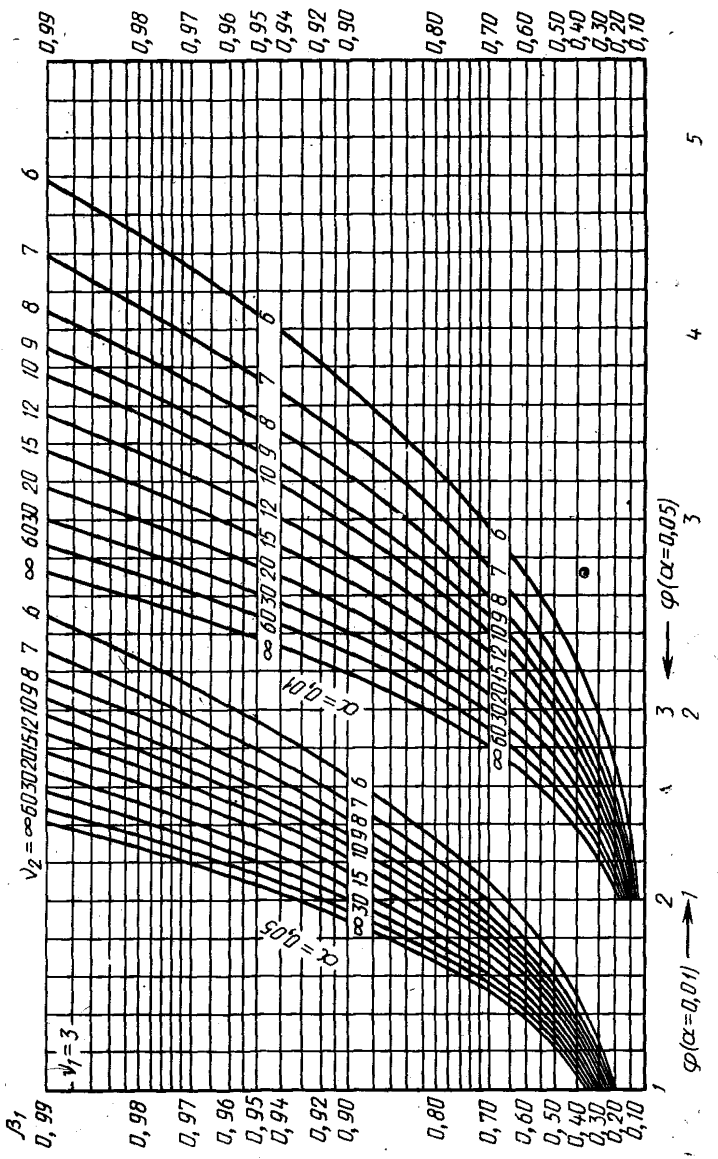
Для степени свободы $\nu_1 = 2$



Черт. 14

Кривые мощности F-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

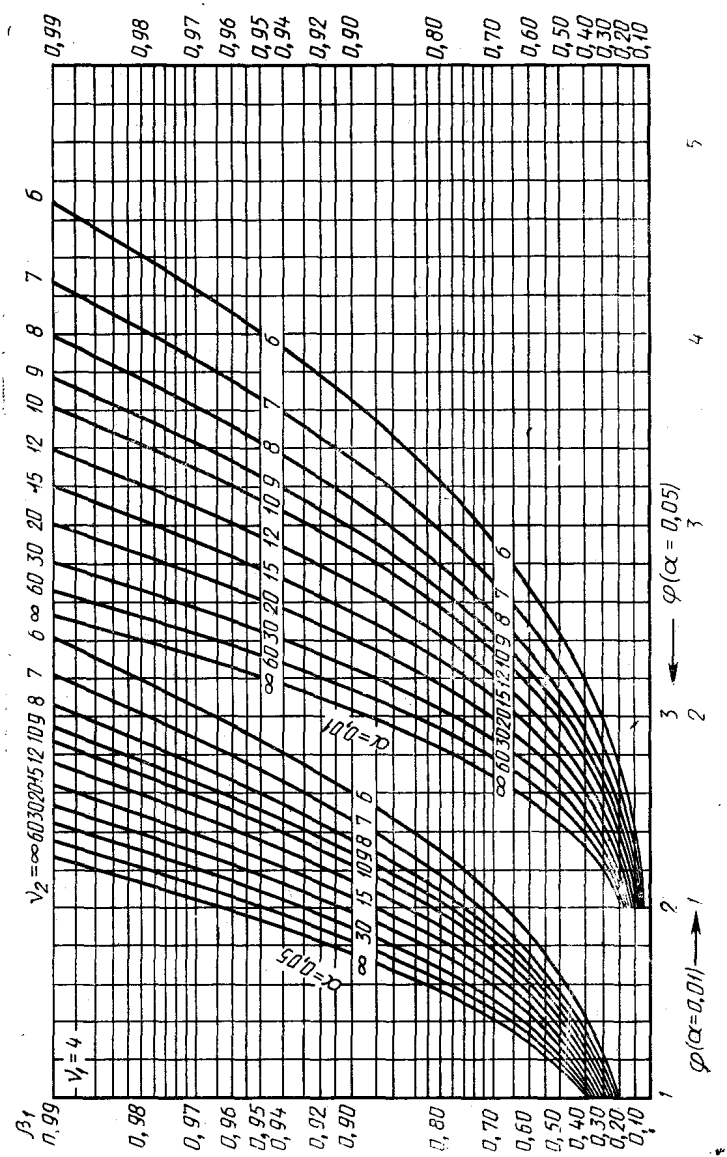
Для степеней свободы $\nu_1 = 3$



Черт. 15

Кривые мощности *F*-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

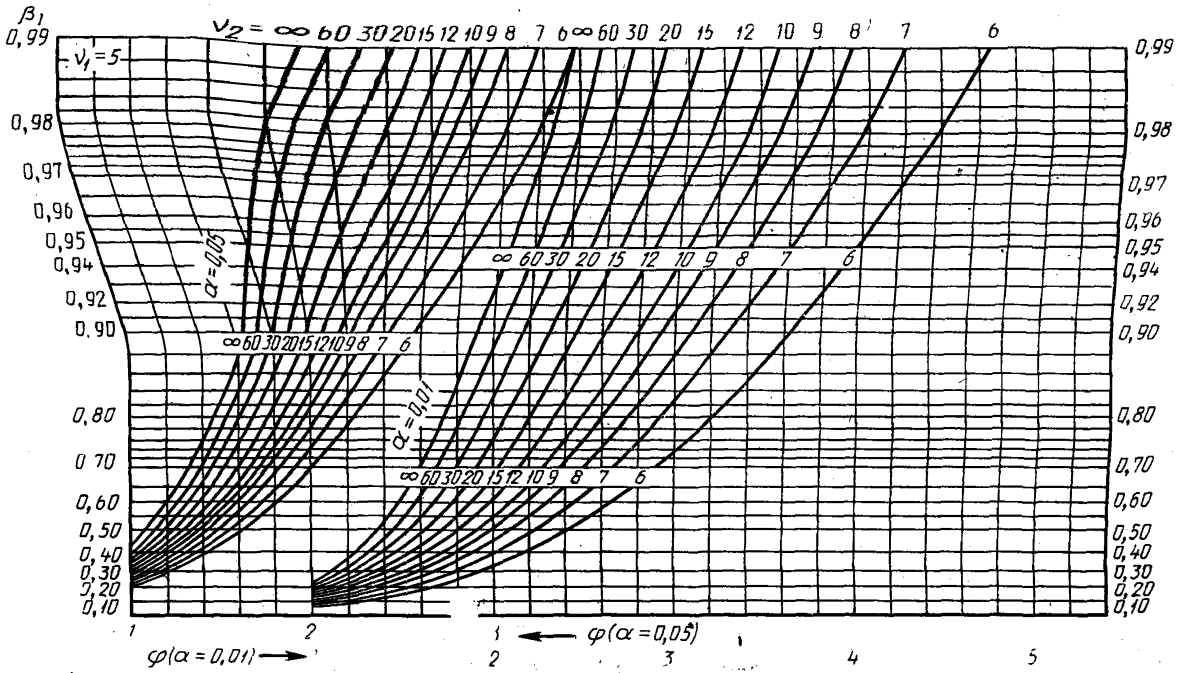
Для степеней свободы $\nu_1 = 4$



Черт. 16

Кривые мощности F-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

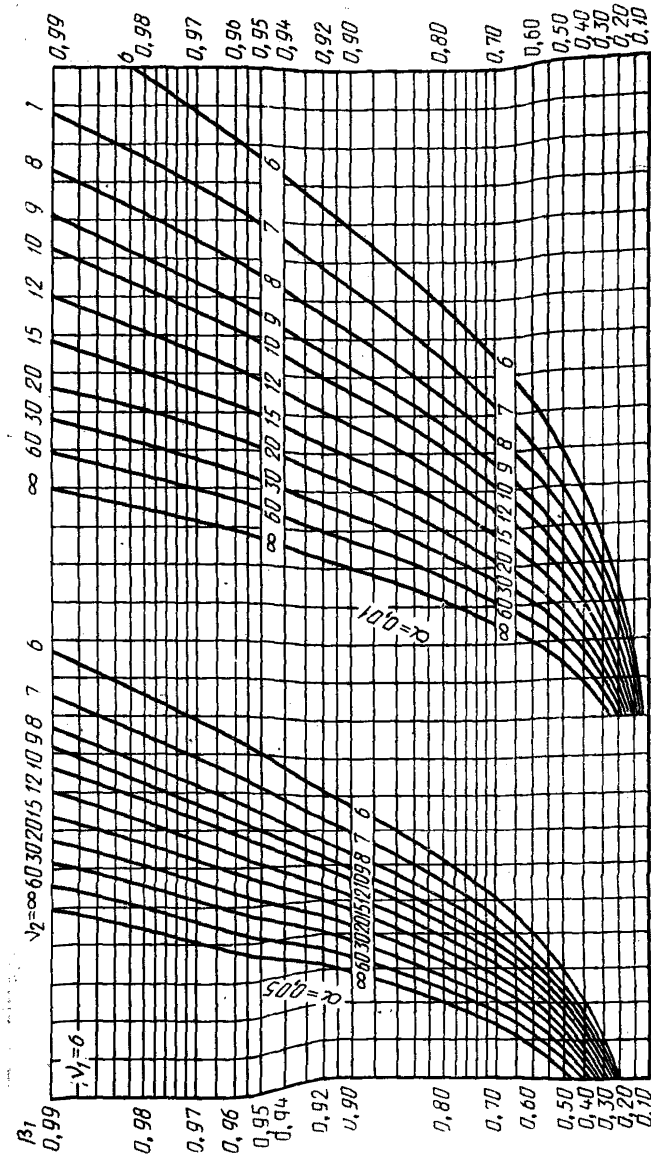
Для степеней свободы $\nu_1=5$



Черт. 17

Кривые мощности F-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

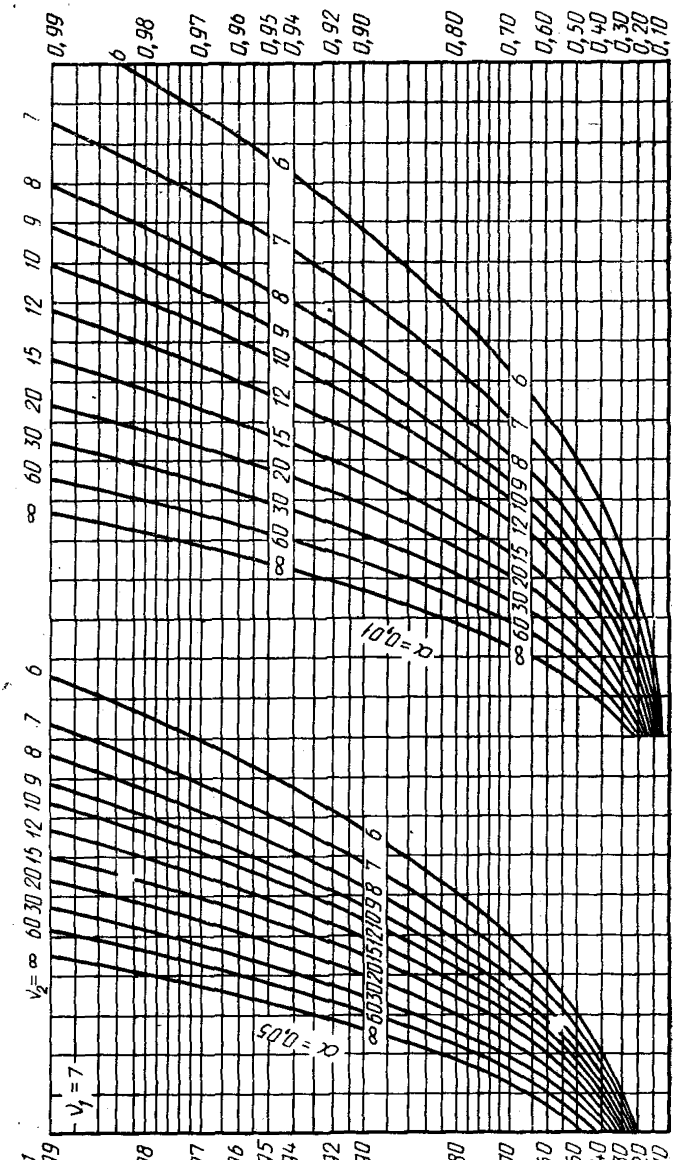
Для степеней свободы $\nu_1 = 6$



Черт. 18

Кривые мощности *F*-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

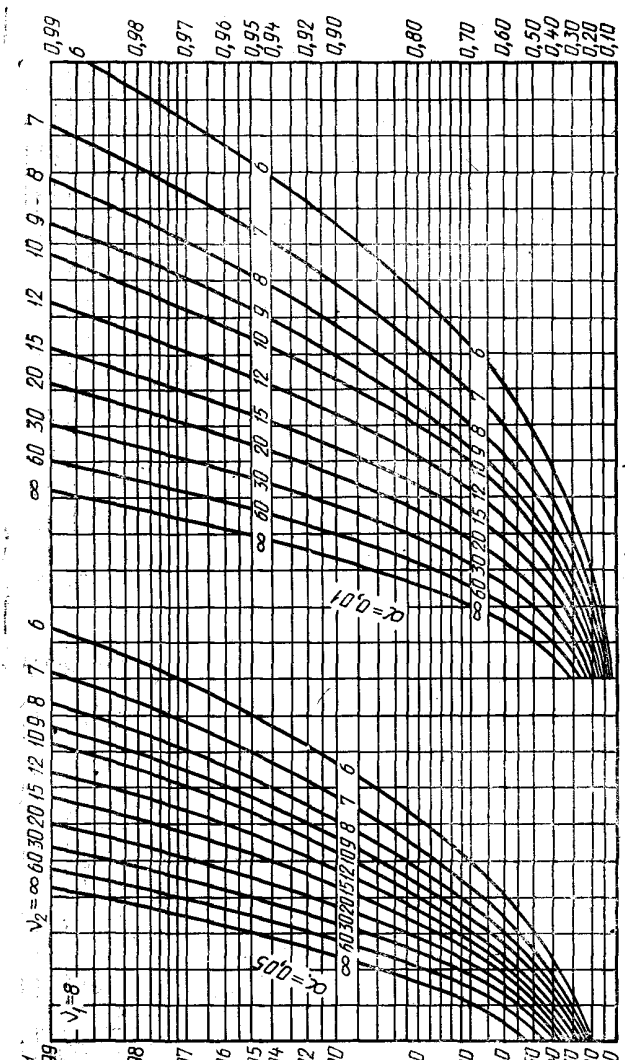
Для степеней свободы $\nu_1 = 7$



Черт. 19

Кривые мощности *F*-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

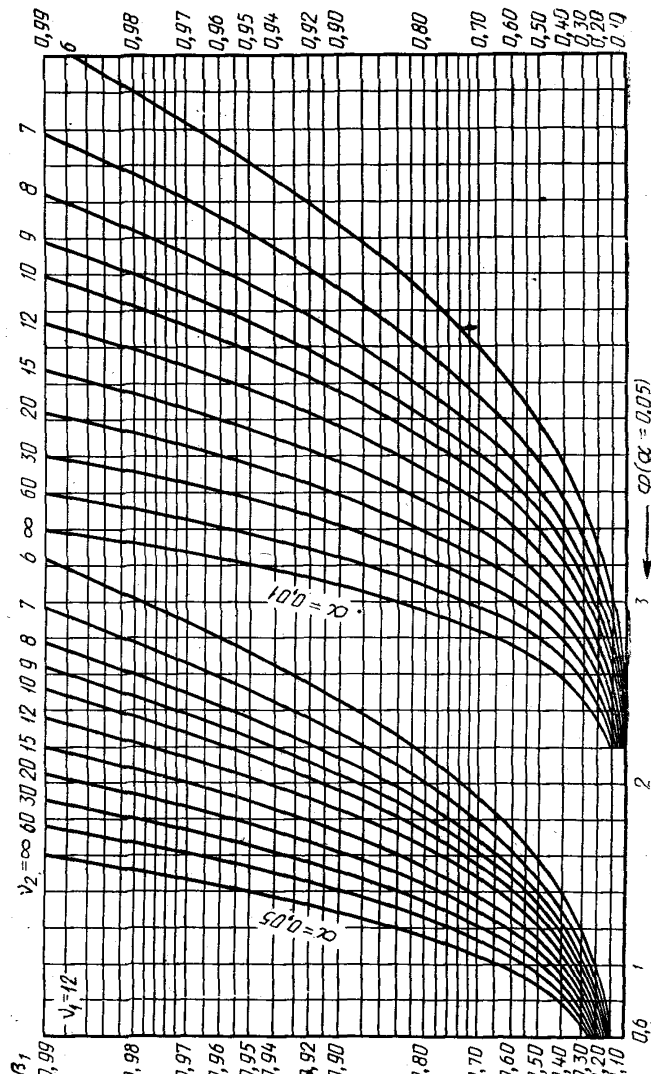
Для степеней свободы $\nu_1 = 8$



Черт. 20

Кривые мощности F-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

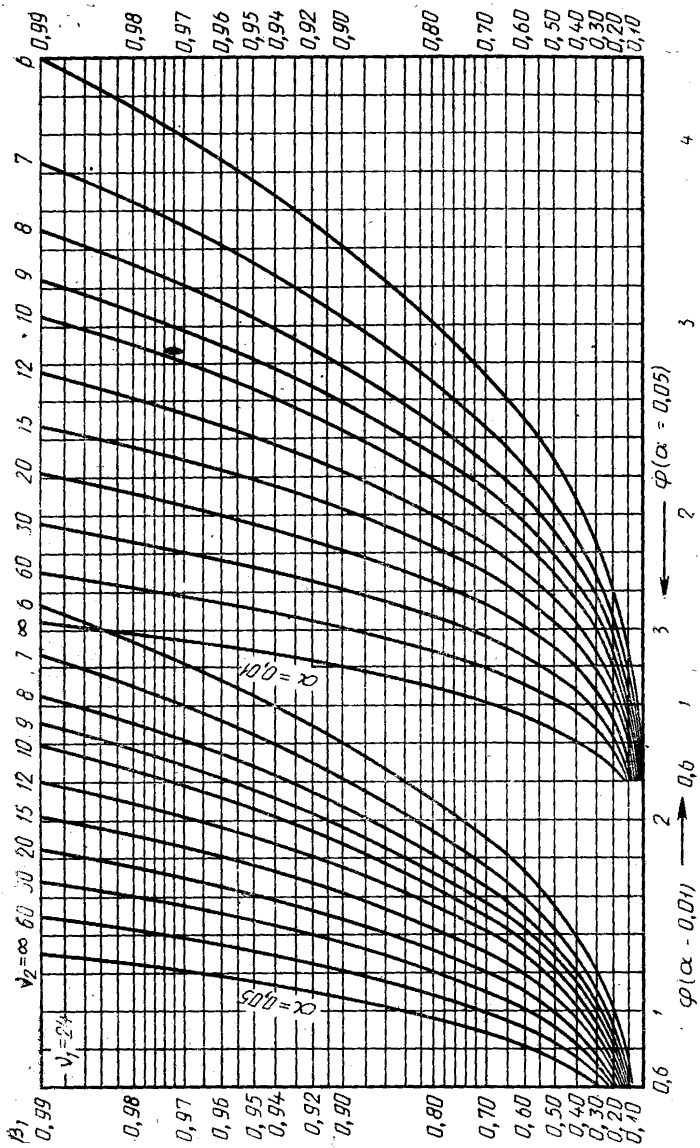
Для степеней свободы $\nu_1 = 12$



Черт. 21

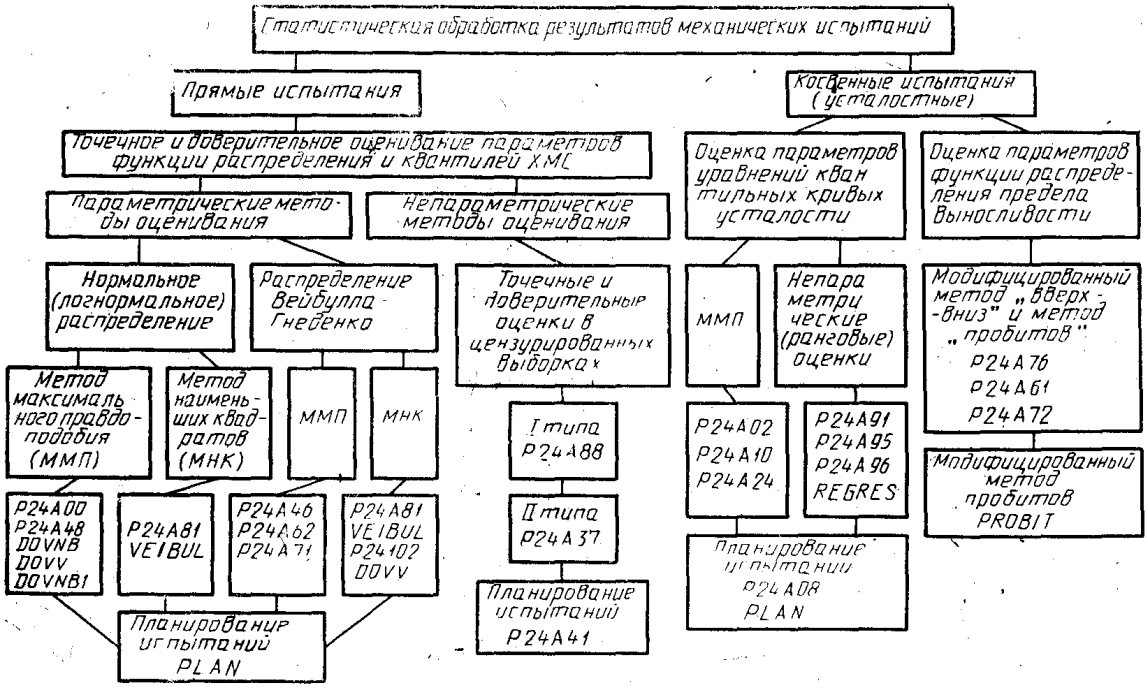
Кривые мощности *F*-критерия в зависимости от числа степеней свободы ν_1, ν_2, параметра нецентральности φ и уровня значимости α

Для степеней свободы $\nu_1=24$



Черт. 22

Структурная схема комплекса статистических программ



Продолжение табл. 19

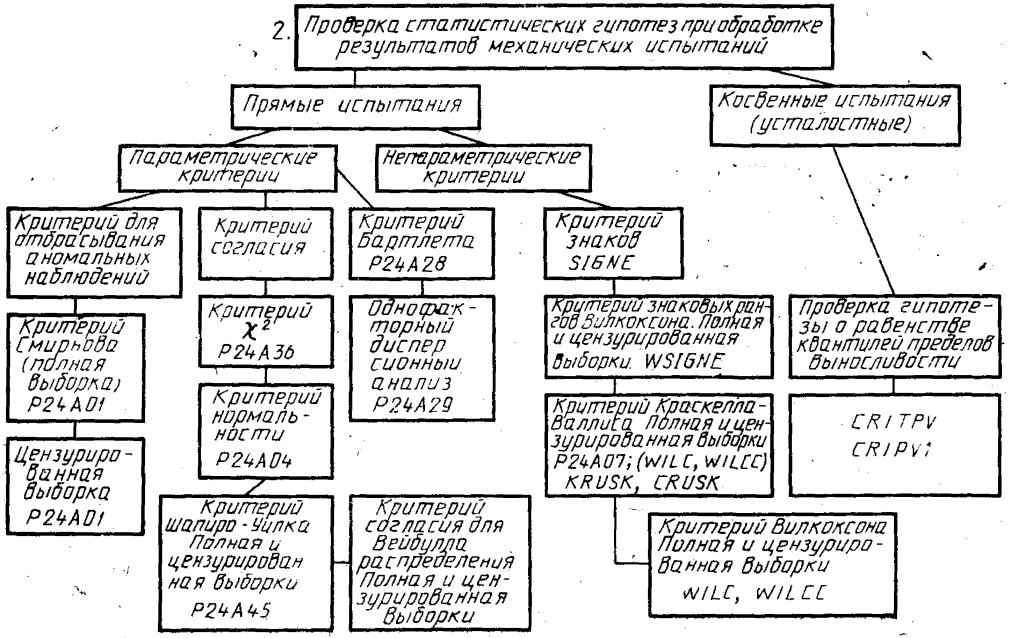


Таблица 20

Функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58137	58706	50095	59484	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67365	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76731	77035	77337	77637	77935	78231	78524
0,8	78815	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84135	84375	84614	84650	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89545	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92546	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	92254	95252	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98679	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99771	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992

Продолжение табл. 20

z	Сотые доли для z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4,0	99997	99998	99999	99999	99999	—	—	—	—	—

Примечание. У всех остальных значений функции Лапласа разряд целых также равен нулю и поэтому в таблице приведены только десятичные знаки.

Пример. Найти $\Phi(z)$, если $z=1{,}75$. На пересечении строки, соответствующей 1,7, и столбца, соответствующего цифре 5, находим $\Phi(1{,}75)=0{,}95994$.

Таблица 21

Значения квантили нормированного нормального распределения z_p-уровня P

P	Тысячные доли для P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	—∞	—3,09	—2,88	—2,75	—2,65	—2,58	—2,51	—2,46	—2,41	—2,37
0,01	—2,33	—2,29	—2,26	—2,23	—2,20	—2,17	—2,14	—2,12	—2,10	—2,07
0,02	—2,05	—2,03	—2,01	—2,00	—1,98	—1,96	—1,94	—1,93	—1,91	—1,90
0,03	—1,88	—1,87	—1,85	—1,84	—1,83	—1,81	—1,80	—1,79	—1,77	—1,76
0,04	—1,75	—1,74	—1,73	—1,72	—1,71	—1,70	—1,68	—1,67	—1,66	—1,65
0,05	—1,64	—1,64	—1,63	—1,62	—1,61	—1,60	—1,59	—1,58	—1,57	—1,56
0,06	—1,55	—1,55	—1,54	—1,53	—1,52	—1,51	—1,51	—1,50	—1,49	—1,48
0,07	—1,48	—1,47	—1,46	—1,45	—1,45	—1,44	—1,43	—1,43	—1,42	—1,41
0,08	—1,41	—1,40	—1,39	—1,39	—1,38	—1,37	—1,37	—1,36	—1,35	—1,35
0,09	—1,34	—1,33	—1,33	—1,32	—1,32	—1,31	—1,30	—1,30	—1,29	—1,29
0,10	—1,28	—1,28	—1,27	—1,26	—1,26	—1,25	—1,25	—1,24	—1,24	—1,23
0,11	—1,23	—1,22	—1,22	—1,21	—1,21	—1,20	—1,20	—1,19	—1,19	—1,18
0,12	—1,17	—1,17	—1,17	—1,16	—1,16	—1,15	—1,15	—1,14	—1,14	—1,13
0,13	—1,13	—1,12	—1,12	—1,11	—1,11	—1,10	—1,10	—1,09	—1,09	—1,08
0,14	—1,08	—1,08	—1,07	—1,07	—1,06	—1,06	—1,05	—1,05	—1,05	—1,04
0,15	—1,04	—1,03	—1,03	—1,02	—1,02	—1,02	—1,01	—1,01	—1,00	—1,00
0,16	—0,99	—0,99	—0,99	—0,98	—0,98	—0,97	—0,97	—0,97	—0,96	—0,96
0,17	—0,95	—0,95	—0,95	—0,94	—0,94	—0,93	—0,93	—0,93	—0,92	—0,92
0,18	—0,92	—0,91	—0,91	—0,90	—0,90	—0,90	—0,89	—0,89	—0,89	—0,88
0,19	—0,88	—0,87	—0,87	—0,87	—0,86	—0,86	—0,86	—0,85	—0,85	—0,85
0,20	—0,84	—0,84	—0,83	—0,83	—0,83	—0,82	—0,82	—0,82	—0,81	—0,81
0,21	—0,81	—0,80	—0,80	—0,80	—0,79	—0,79	—0,79	—0,78	—0,78	—0,78
0,22	—0,77	—0,77	—0,77	—0,76	—0,76	—0,76	—0,75	—0,75	—0,75	—0,74
0,23	—0,74	—0,74	—0,73	—0,73	—0,73	—0,72	—0,72	—0,72	—0,71	—0,71
0,24	—0,71	—0,70	—0,70	—0,70	—0,69	—0,69	—0,69	—0,68	—0,68	—0,68

Продолжение табл. 21

P	Тысячные доли для P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,25	—0,67	—0,67	—0,67	—0,67	—0,66	—0,66	—0,66	—0,65	—0,65	—0,65
0,26	—0,64	—0,64	—0,64	—0,63	—0,63	—0,63	—0,62	—0,62	—0,62	—0,62
0,27	—0,61	—0,61	—0,61	—0,60	—0,60	—0,60	—0,59	—0,59	—0,59	—0,59
0,28	—0,58	—0,58	—0,58	—0,57	—0,57	—0,57	—0,57	—0,56	—0,56	—0,56
0,29	—0,55	—0,55	—0,55	—0,54	—0,54	—0,54	—0,54	—0,53	—0,53	—0,53
0,30	—0,52	—0,52	—0,52	—0,52	—0,51	—0,51	—0,51	—0,50	—0,50	—0,50
0,31	—0,50	—0,49	—0,49	—0,49	—0,48	—0,48	—0,48	—0,48	—0,47	—0,47
0,32	—0,47	—0,46	—0,46	—0,46	—0,46	—0,45	—0,45	—0,45	—0,45	—0,44
0,33	—0,44	—0,44	—0,43	—0,43	—0,43	—0,43	—0,42	—0,42	—0,42	—0,42
0,34	—0,41	—0,41	—0,41	—0,40	—0,40	—0,40	—0,40	—0,39	—0,39	—0,39
0,35	—0,39	—0,38	—0,38	—0,38	—0,37	—0,37	—0,37	—0,37	—0,36	—0,36
0,36	—0,36	—0,36	—0,35	—0,35	—0,35	—0,35	—0,34	—0,34	—0,34	—0,33
0,37	—0,33	—0,33	—0,33	—0,32	—0,32	—0,32	—0,32	—0,31	—0,31	—0,31
0,38	—0,31	—0,30	—0,30	—0,30	—0,29	—0,29	—0,29	—0,29	—0,28	—0,28
0,39	—0,28	—0,27	—0,27	—0,27	—0,27	—0,27	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26
0,40	—0,25	—0,25	—0,25	—0,25	—0,24	—0,24	—0,24	—0,24	—0,23	—0,23
0,41	—0,23	—0,22	—0,22	—0,22	—0,22	—0,21	—0,21	—0,21	—0,21	—0,20
0,42	—0,20	—0,20	—0,20	—0,19	—0,19	—0,19	—0,19	—0,18	—0,18	—0,18
0,43	—0,18	—0,17	—0,17	—0,17	—0,17	—0,16	—0,16	—0,16	—0,16	—0,15
0,44	—0,15	—0,15	—0,15	—0,14	—0,14	—0,14	—0,14	—0,13	—0,13	—0,13
0,45	—0,13	—0,12	—0,12	—0,12	—0,12	—0,11	—0,11	—0,11	—0,11	—0,10
0,46	—0,10	—0,10	—0,10	—0,09	—0,09	—0,09	—0,09	—0,08	—0,08	—0,08
0,47	—0,08	—0,07	—0,07	—0,07	—0,07	—0,06	—0,06	—0,06	—0,06	—0,05
0,48	—0,05	—0,05	—0,05	—0,04	—0,04	—0,04	—0,04	—0,03	—0,03	—0,03
0,49	—0,03	—0,02	—0,02	—0,02	—0,02	—0,01	—0,01	—0,01	—0,01	—0,00
0,50	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,22
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55

Продолжение табл. 21

P	Тысячные доли для P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,08	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,17	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,54
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Пример. Определить квантиль нормированного распределения уровня $P=0{,}321$. На пересечении строки, отвечающей 0,32, и столбца, отвечающего 1, находим $z_p=-0{,}46$.

Таблица 22

Значения P-процентных пределов t_p распределения Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы f

f	Значения t_p при P, равной								
	0,95	0,975	0,9875	0,99	0,995	0,9975	0,9985	0,999	0,9995
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,305	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	5,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	0,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,445	1,960	2,241	2,236	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Таблица 23

Значения верхнего P-процентного предела χ^2_p в зависимости от вероятности P и числа степеней свободы f

f	Значения χ^2_p при P, равной															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,67	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	0,55	0,75	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,8	18,9	20,5
6	0,87	1,13	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	20,7	22,5
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	24,3	26,1
9	2,09	2,53	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,5	37,7
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,0	39,3
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,5	40,8
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,0	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,5	43,8

f	Значения χ^2_p при P, равной															
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	46,0	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,5	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,5	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,0	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,5	54,1
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	53,0	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	55,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	56,0	58,3
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,5	59,7

Пример. Найти критическое значение χ^2 для $P=0{,}05$ и $f=20$. На пересечении столбца, отвечающего 0,05, и строки, отвечающей 20, находим $\chi^2_{0,05}=31{,}4$.

Таблица 24

Необходимый объем выборки f для оценки среднего квадратического отклонения с заданной относительной погрешностью Δ

f	Значения Δ при β равной		f	Значения Δ при β равной	
	0,95	0,9		0,95	0,9
1	70,52	30,26	28	0,70	0,56
2	11,07	6,64	29	0,69	0,55
3	5,58	3,71	30	0,67	0,54
4	3,80	2,54	40	0,558	0,450
5	2,93	2,11	50	0,486	0,393
6	2,42	1,77	60	0,434	0,353
7	2,08	1,55	70	0,396	0,323
8	1,84	1,38	80	0,366	0,299
9	1,65	1,26	90	0,341	0,279
10	1,51	1,16	100	0,321	0,263
11	1,40	1,07	120	0,289	0,238
12	1,30	1,01	140	0,265	0,218
13	1,22	0,95	160	0,240	0,202
14	1,15	0,90	170	0,230	0,190
15	1,10	0,86	200	0,217	0,179
16	1,04	0,82	220	0,206	0,170
17	1,00	0,78	240	0,196	0,162
18	0,96	0,75	260	0,188	0,155
19	0,92	0,73	280	0,181	0,149
20	0,89	0,70	300	0,174	0,144
21	0,86	0,68	400	0,149	0,123
22	0,83	0,66	500	0,132	0,110
23	0,80	0,64	600	0,120	0,100
24	0,78	0,62	700	0,110	0,092
25	0,76	0,61	800	0,103	0,086
26	0,74	0,59	900	0,097	0,081
27	0,72	0,58	1000	0,092	0,076

Минимально необходимый объем испытаний n для оценки квантили уровня P с максимальной относительной ошибкой, не превышающей δ_p при доверительной вероятности β

β	P	Значения объема испытаний n при δ_p, равной									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,5	165	42	19	11	7	5	4	4	3	3
	0,1; 0,9	324	90	42	26	19	14	11	9	8	7
	0,05; 0,95	420	113	55	34	24	18	14	12	10	9
	0,01; 0,99	663	170	86	52	35	26	21	17	14	12
	0,005; 0,995	755	200	92	60	43	28	23	20	16	13
	0,001; 0,999	1100	255	135	73	53	37	29	25	21	17
0,95	0,5	270	68	30	18	12	9	7	6	5	4
	0,1; 0,9	535	140	68	41	29	22	17	14	12	10
	0,05; 0,95	700	182	89	55	37	27	21	18	15	13
	0,01; 0,99	1055	254	135	82	56	41	32	26	22	19
	0,005; 0,995	1250	330	157	94	63	47	36	29	25	21
	0,001; 0,999	1595	421	207	122	83	60	47	37	31	26

Таблица 26

Значение α-процентных пределов критерия u в зависимости от объема выборки

Объем выборки n	Предельное значение u при уровне значимости α			
	0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,44	1,46	1,48
5	1,60	1,64	1,67	1,72
6	1,73	1,77	1,82	1,89
7	1,83	1,88	1,94	2,02
8	1,91	1,96	2,03	2,13
9	1,98	2,04	2,11	2,21
10	2,03	2,10	2,18	2,29
11	2,09	2,14	2,23	2,36
12	2,13	2,20	2,29	2,41
13	2,17	2,24	2,33	2,47
14	2,21	2,28	2,37	2,50
15	2,25	2,32	2,41	2,55
16	2,28	2,35	2,44	2,58
17	2,31	2,38	2,48	2,62
18	2,34	2,41	2,50	2,66
19	2,36	2,44	2,53	2,68
20	2,38	2,46	2,56	2,71

Примечание. При $n \geqslant 25$ можно воспользоваться табл. 27.

Пример. Найти предельное значение критерия u для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ при объеме выборки $n = 15$. На пересечении столбца, отвечающего 0,050, и строки, соответствующей 15, находим $u_{0,05} = 2{,}41$.

Таблица 27

Значение α-процентных пределов критерия t в зависимости от объема выборки

Объем выборки n	Предельные значения t для уровня значимости α			
	0,100	0,050	0,010	0,005
3	1,497	1,738	2,215	2,396
4	1,696	1,941	2,431	2,618
5	1,835	2,080	2,574	2,764
6	1,939	2,184	2,679	2,870
7	2,022	2,267	2,761	2,952
8	2,091	2,334	2,828	3,019
9	2,150	2,392	2,884	3,074
10	2,200	2,441	2,931	3,122
11	2,245	2,484	2,973	3,163
12	2,284	2,523	3,010	3,199
13	2,320	2,557	3,043	3,232
14	2,352	2,589	3,072	3,261
15	2,382	2,617	3,099	3,287
16	2,409	2,644	3,124	3,312
17	2,434	2,668	3,147	3,334
18	2,458	2,691	3,168	3,355
19	2,480	2,712	3,188	3,375
20	2,500	2,732	3,207	3,393
21	2,519	2,750	3,224	3,409
22	2,538	2,768	3,240	3,425
23	2,555	2,784	3,255	3,439
24	2,571	2,800	3,269	3,453
25	2,635	2,870	3,351	3,539
30	2,696	2,928	3,402	3,587
40	2,792	3,015	3,480	3,662
50	2,860	3,082	3,541	3,716
100	3,076	3,285	3,723	3,892
250	3,339	3,534	3,946	4,108
500	3,528	3,703	4,108	4,263

Пример. Найти предельное значение критерия t для уровня значимости $\alpha=0{,}05$ при объеме выборки $n=15$. На пересечении столбца, отвечающего 0,050, и строки, соответствующей 15, находим $t_{0,05}=2{,}617$.

Значение пяти- и однопроцентных верхних пределов величины F

$F_{0,95}$ — верхние строки, однопроцентные — нижние строки

f_2	Значения величины F при f_1 —степени											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5889	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082	244 6106
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,34	19,37 99,36	19,38 99,38	19,39 99,40	19,40 99,41	19,41 99,42
3	10,13 34,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,88 27,67	8,84 27,49	8,81 27,34	8,78 27,23	8,76 27,13	8,74 27,05
4	7,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,21	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,96 14,54	5,93 14,45	5,91 14,37
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,45	4,82 10,27	4,78 10,15	4,74 10,05	4,70 9,96	4,68 9,89
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,78	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,21 8,26	4,15 8,10	4,10 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	4,00 7,72
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97 7,46	3,87 7,19	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,60 6,54	3,57 6,47
8	5,32 11,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,19	3,44 6,03	3,39 5,91	3,34 5,82	3,28 5,74	3,28 5,67
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,26	3,10 5,18	3,07 5,11
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,94 4,78	2,91 4,71
11	4,84 9,85	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,01 4,88	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,79 4,40
12	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,41	3,11 5,06	3,00 4,82	2,92 4,65	2,85 4,50	2,80 4,39	2,76 4,30	2,72 4,22	2,69 4,16
13	4,67 9,07	3,80 6,70	3,41 5,74	3,18 5,20	3,02 4,86	2,92 4,62	2,84 4,44	2,77 4,30	2,72 4,19	2,67 4,10	2,63 4,02	2,60 3,96
14	4,60 8,86	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,03	2,96 4,69	2,85 4,46	2,77 4,28	2,70 4,14	2,65 4,03	2,60 3,94	2,56 3,86	2,53 3,80
15	4,54 8,68	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,90 4,56	2,79 4,32	2,70 4,14	2,64 4,00	2,59 3,89	2,55 3,80	2,51 3,73	2,48 3,67
16	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,01 4,77	2,85 4,44	2,74 4,20	2,66 4,03	2,59 3,89	2,54 3,78	2,49 3,69	2,45 3,61	2,42 3,55

Таблица 28

в зависимости от степеней свободы f_1 и f_2; пятипроцентные пределы

свободы для большей дисперсии, равной												
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	251 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352	254 6361	254 6366	1
19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,45	19,45 99,46	19,46 99,47	19,47 99,48	19,47 99,49	19,48 99,49	19,49 99,49	19,49 99,49	19,50 99,50	19,50 99,50	2
8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,60 26,41	8,58 26,35	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,18	8,54 26,14	8,53 26,12	3
5,87 14,24	5,84 14,15	5,80 14,02	5,77 13,93	5,74 13,83	5,71 13,74	5,70 13,69	5,68 13,61	5,66 13,57	5,65 13,52	5,64 13,48	5,63 13,46	4
4,64 9,77	4,60 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,38	4,46 9,29	4,44 9,24	4,42 9,17	4,40 9,13	4,38 9,07	4,37 9,04	4,36 9,02	5
3,96 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94	3,68 6,90	3,67 6,88	6
3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,70	3,24 5,67	3,23 5,65	7
3,23 5,56	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,05 5,11	3,03 5,06	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,91	2,94 4,88	2,93 4,86	8
3,03 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,80 4,51	2,77 4,45	2,76 4,41	2,73 4,36	2,72 4,33	2,71 4,31	9
2,82 4,60	2,77 4,52	2,74 4,41	2,70 4,33	2,67 4,25	2,64 4,17	2,61 4,12	2,59 4,05	2,56 4,01	2,55 3,96	2,54 3,83	2,54 3,91	10
2,74 4,29	2,70 4,20	2,65 4,11	2,61 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,50 3,80	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66	2,41 3,62	2,40 3,60	11
2,64 4,05	2,60 3,98	2,54 3,86	2,50 3,78	2,46 3,70	2,42 3,61	2,40 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 3,41	2,31 3,38	2,30 3,36	12
2,55 3,85	2,51 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,21	2,22 3,18	2,21 3,16	13
2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,51	2,25 3,43	2,31 3,34	2,27 3,26	2,24 3,21	2,21 3,14	2,19 3,11	2,16 3,06	2,14 3,02	2,13 3,00	14
2,43 3,56	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,21 3,12	2,18 3,07	2,15 3,00	2,12 2,97	2,10 2,92	2,08 2,89	2,07 2,87	15
2,37 3,45	2,33 3,37	2,28 3,25	2,24 3,18	2,20 3,10	2,16 3,01	2,13 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,80	2,02 2,77	2,01 2,75	16

f_2	Значения величины F при f_1 — степени											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	4,45 8,40	3,59 6,11	3,20 5,18	2,96 4,67	2,81 4,34	2,70 4,10	2,62 3,93	2,55 3,79	2,50 3,68	2,45 3,59	2,41 3,52	2,38 3,45
18	4,41 8,28	3,55 6,01	3,16 5,09	2,93 4,58	2,77 4,25	2,66 4,01	2,58 3,85	2,51 3,71	2,46 3,60	2,41 3,51	2,37 3,44	2,34 3,37
19	4,38 8,18	3,52 5,93	3,13 5,01	2,90 4,50	2,74 4,17	2,63 3,94	2,55 3,77	2,48 3,63	2,43 3,52	2,38 3,43	2,34 3,36	2,31 3,30
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,52 3,71	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,31 3,30	2,28 3,23
21	4,32 8,02	3,47 5,78	3,07 4,87	2,84 4,37	2,68 4,04	2,57 3,81	2,49 3,65	2,42 3,51	2,37 3,40	2,32 3,31	2,28 3,24	2,25 3,17
22	4,30 7,94	3,44 5,72	3,05 4,82	2,82 4,31	2,66 3,99	2,55 3,76	2,47 3,59	2,40 3,45	2,35 3,35	2,30 3,26	2,26 3,18	2,23 3,12
23	4,28 7,88	3,42 5,66	3,03 4,76	2,80 4,26	2,64 3,94	2,53 3,71	2,45 3,54	2,38 3,41	2,32 3,30	2,28 3,31	2,24 3,14	2,20 3,07
24	4,26 7,82	3,40 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,62 3,90	2,51 3,67	2,43 3,50	2,36 3,36	2,30 3,25	2,26 3,17	2,22 3,09	2,18 3,03
25	4,24 7,77	3,38 5,57	2,99 4,68	2,76 4,18	2,60 3,86	2,49 3,63	2,41 3,46	2,34 3,32	2,28 3,21	2,24 3,13	2,20 3,05	2,16 2,99
26	7,72 7,72	5,53 5,53	4,64 4,64	4,14 4,14	3,82 3,82	3,59 3,59	3,42 3,42	3,29 3,29	3,17 3,17	3,09 3,09	3,02 3,02	2,96 2,96
27	4,21 7,68	3,35 5,49	2,96 4,60	2,73 4,11	2,57 3,79	2,46 3,56	2,37 3,39	2,30 3,26	2,25 3,14	2,20 3,06	2,16 2,98	2,13 2,93
28	4,20 7,64	3,34 5,45	2,95 4,57	2,71 4,07	2,56 3,76	2,44 3,53	2,36 3,36	2,29 3,23	2,24 3,11	2,19 3,03	2,15 2,95	2,12 2,90
29	4,18 7,60	3,33 5,42	2,93 4,54	2,70 4,04	2,54 3,73	2,43 3,50	2,35 3,33	2,28 3,20	2,22 3,08	2,18 3,00	2,14 2,92	2,10 2,87
30	4,17 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,34 3,30	2,27 3,17	2,21 3,06	2,16 2,98	2,12 2,90	2,09 2,84
32	4,15 7,50	3,30 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,51 3,66	2,40 3,42	2,32 3,25	2,25 3,12	2,19 3,01	2,14 2,94	2,10 2,76	2,07 2,80
34	4,13 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,61	2,38 3,38	2,30 3,21	2,23 3,08	2,17 2,97	2,12 2,79	2,08 2,82	2,05 2,76
36	4,11 7,39	3,26 5,25	2,96 4,38	2,63 3,89	2,48 3,58	2,36 3,35	2,28 3,18	2,21 3,04	2,15 2,94	2,10 2,86	2,06 2,78	2,03 2,72

Продолжение табл. 28

свободы для большей дисперсии, равной												f_2
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
2,33 3,35	2,29 3,27	2,23 3,16	2,19 3,08	2,15 3,00	2,11 2,92	2,08 2,86	2,04 2,79	2,02 2,76	1,99 2,70	1,87 2,67	1,96 2,65	17
2,29 3,27	2,25 3,19	2,19 3,07	2,15 3,00	2,11 2,91	2,07 2,83	2,04 2,78	2,00 2,71	1,98 2,68	1,95 2,62	1,93 2,59	1,92 2,57	18
3,26 3,19	2,21 3,12	2,15 3,00	2,11 2,92	2,07 2,84	2,02 2,76	2,00 2,70	1,96 2,63	1,94 2,60	1,91 2,54	1,90 2,51	1,88 2,49	19
2,23 3,13	2,18 3,05	2,12 2,94	2,08 2,86	2,04 2,77	1,99 2,69	1,96 2,63	1,92 2,56	1,90 2,53	1,87 2,47	1,85 2,44	1,84 2,42	20
2,20 3,07	2,15 2,99	2,09 2,88	2,05 2,80	2,00 2,72	1,96 2,63	1,93 2,58	1,89 2,51	1,87 2,47	1,84 2,42	1,82 2,38	1,81 2,36	21
2,18 3,02	2,13 2,94	2,07 2,83	2,03 2,75	1,98 2,67	1,93 2,58	1,91 2,53	1,87 2,46	1,84 2,42	1,81 2,37	1,80 2,33	1,78 2,31	22
2,14 2,97	2,10 2,89	2,04 2,78	2,00 2,70	1,96 2,62	1,91 2,53	1,88 2,48	1,84 2,41	1,82 2,37	1,79 2,32	1,77 2,28	1,76 2,26	23
2,13 2,93	2,09 2,85	2,02 2,74	1,98 2,66	1,94 2,58	1,89 2,49	1,86 2,44	1,82 2,36	1,80 2,33	1,76 2,27	1,74 2,23	1,73 2,21	24
2,11 2,89	2,06 2,81	2,00 2,70	1,96 2,62	1,92 2,54	1,87 2,45	1,84 2,40	1,80 2,32	1,77 2,29	1,74 2,23	1,72 2,19	1,71 2,17	25
2,10 2,86	2,05 2,77	1,99 2,66	1,95 2,58	1,90 2,50	1,85 2,41	1,82 2,36	1,78 2,28	1,76 2,25	1,72 2,19	1,70 2,15	1,69 2,13	26
2,08 2,83	2,03 2,74	1,97 2,63	1,93 2,55	1,88 2,47	1,84 2,38	1,80 2,33	1,76 2,25	1,74 2,21	1,71 2,16	1,68 2,12	1,67 2,10	27
2,06 2,80	2,02 2,71	1,96 2,60	1,91 2,52	1,87 2,44	1,81 2,35	1,78 2,30	1,75 2,22	1,72 2,18	1,69 2,13	1,67 2,09	1,65 2,06	28
2,05 2,77	2,00 2,68	1,94 2,57	1,90 2,49	1,85 2,41	1,80 2,32	1,77 2,27	1,73 2,19	1,71 2,15	1,68 2,10	1,65 2,06	1,64 2,03	29
2,04 2,74	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,38	1,79 2,29	1,76 2,24	1,72 2,16	1,69 2,13	1,66 2,07	1,64 2,03	1,62 2,01	30
2,02 2,70	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,34	1,76 2,25	1,74 2,20	1,69 2,12	1,67 2,08	1,64 2,02	1,61 1,98	1,59 1,96	32
2,00 2,66	1,95 2,58	1,89 2,47	1,84 2,38	1,80 2,30	1,74 2,21	1,71 2,15	1,67 2,08	1,64 2,04	1,61 1,98	1,59 1,94	1,57 1,91	34
1,98 2,62	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,35	1,78 2,26	1,72 2,17	1,69 2,12	1,65 2,04	1,62 2,00	1,59 1,94	1,56 1,90	1,55 1,87	36

f_2	Значения величины F при f_1 — степени											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
38	4,10 7,35	3,25 5,21	2,85 4,34	2,65 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,15	2,19 3,02	2,14 2,91	2,09 2,82	2,05 2,75	2,02 2,69
40	4,08 7,31	3,23 5,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73	2,00 2,26
42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,10	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,02 2,70	1,99 2,64
44	7,24 4,06	5,12 3,21	4,26 2,82	3,78 2,58	3,46 2,43	3,24 2,31	3,07 2,23	2,94 2,16	2,84 2,10	2,75 2,05	2,68 2,01	2,62 1,98
46	4,05 7,21	3,20 5,10	2,81 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,14 2,92	2,09 2,82	2,04 2,73	2,00 2,66	1,97 2,60
48	4,04 7,19	3,19 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,41 3,42	2,30 3,20	2,21 3,04	2,14 2,90	2,08 2,80	2,03 2,71	1,99 2,64	1,96 2,58
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,29 3,18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,98 2,62	1,95 2,56
55	4,02 7,12	3,17 5,01	2,78 4,16	2,54 3,68	2,38 3,37	2,27 3,15	2,18 2,98	2,11 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	1,97 2,59	1,93 2,53
60	4,00 7,08	3,15 4,98	2,76 4,13	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3,12	2,17 2,95	2,10 2,82	2,04 2,72	1,99 2,63	1,95 2,56	1,92 2,50
65	3,99 7,04	3,14 4,95	2,75 4,10	2,51 3,62	2,36 3,31	2,24 3,09	2,15 2,93	2,08 2,79	2,02 2,70	1,98 2,61	1,84 2,54	1,90 2,47
70	3,98 7,01	3,13 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2,23 3,07	2,14 2,91	2,07 2,77	2,01 2,67	1,97 2,59	1,93 2,51	1,89 2,45
80	3,96 6,96	3,11 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,21 3,04	2,12 2,87	2,05 2,74	1,99 2,64	1,95 2,55	1,91 2,48	1,89 2,41
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,30 3,20	2,19 2,99	2,10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,88 2,43	1,85 2,36
125	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,94	2,44 3,47	2,29 3,17	2,17 2,95	2,08 2,79	2,01 2,65	1,95 2,56	1,86 2,47	1,83 2,40	1,83 2,33
150	3,91 6,81	3,06 4,75	2,67 3,91	2,43 3,44	2,27 3,14	2,16 2,92	2,07 2,76	2,00 2,62	1,94 2,53	1,89 2,44	1,85 2,37	1,82 2,30
200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,88	2,41 3,41	2,26 3,11	2,14 2,90	2,05 2,73	1,98 2,60	1,92 2,50	1,87 2,41	1,83 2,34	1,80 2,28
400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 3,83	2,39 3,36	2,23 3,06	2,12 2,85	2,03 2,69	1,96 2,55	1,90 2,46	1,85 2,37	1,81 2,29	1,78 2,23
1000	3,85 6,66	3,00 4,62	2,61 3,80	2,38 3,34	2,22 3,04	2,10 2,82	2,02 2,66	1,95 2,53	1,89 2,43	1,84 2,34	1,80 2,26	1,76 2,20
	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,09 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,79 2,24	1,75 2,18

Пример. Определить критическое значение $F_{0,95}$ для $f_1=30$ и $f_2=20$. Находим $F_{0,95}=2,04$.

Продолжение табл. 28

свободы для большей дисперсии, равной

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_1
1,96	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,53	38
2,59	2,51	2,40	2,32	2,22	2,14	2,08	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84	
1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51	40
2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81	
1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,49	42
2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78	
1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52	1,50	1,48	44
2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,06	2,00	1,92	1,88	1,82	1,78	1,75	
1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46	46
2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,80	1,76	1,72	
1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50	1,47	1,45	48
2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78	1,73	1,70	
1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44	50
2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68	
1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41	55
2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71	1,66	1,64	
1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39	60
2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68	1,63	1,60	
1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37	65
2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64	1,60	1,56	
1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35	70
2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,53	
1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32	80
2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49	
1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28	100
2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43	
1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25	125
2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,68	1,59	1,54	1,46	1,40	1,37	
1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22	150
2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33	
1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19	200
2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28	
1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13	400
2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19	
1,70	1,65	1,58	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08	1,08	1000
2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11	
1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00	
2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,09	

пересечении столбца, соответствующего 30, и верхней строки, отвечающей 20,

Таблица 29

Значения фактора l для определения параметра нецентральности Δ нецентрального t-распределения в зависимости от числа степеней свободы f и мощности β_1 двустороннего t-критерия значимости

$\beta_1 = 0{,}95$

y	Значения фактора l при f, равном										
	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
—1,0	1,4616	1,5039	1,5277	1,5431	1,5542	1,5625	1,5691	1,5744	1,5952	1,6141	1,6307
—0,9	1,4625	1,5030	1,5260	1,5411	1,5519	1,5601	1,5666	1,5719	1,5927	1,6120	1,6294
—0,8	1,4691	1,5070	1,5287	1,5430	1,5533	1,5611	1,5673	1,5724	1,5926	1,6115	1,6290
—0,7	1,4815	1,5157	1,5354	1,5486	1,5580	1,5653	1,5711	1,5758	1,5946	1,6125	1,6293
—0,6	1,4990	1,5285	1,5458	1,5574	1,5658	1,5722	1,5774	1,5816	1,5986	1,6148	1,6303
—0,5	1,5204	1,5447	1,5591	1,5689	1,5760	1,5815	1,5859	1,5895	1,6041	1,6183	1,6319
—0,4	1,5445	1,5633	1,5746	1,5824	1,5881	1,5925	1,5961	1,5990	1,6109	1,6226	1,6339
—0,3	1,5700	1,5834	1,5917	1,5974	1,6016	1,6049	1,6075	1,6097	1,6187	1,6276	1,6363
—0,2	1,5958	1,6042	1,6095	1,6132	1,6159	1,6181	1,6198	1,6212	1,6272	1,6331	1,6390
—0,1	1,6211	1,6249	1,6274	1,6292	1,6305	1,6315	1,6324	1,6331	1,6360	1,6390	1,6419
0,0	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449
0,1	1,6663	1,6632	1,6612	1,6596	1,6585	1,6575	1,6568	1,6561	1,6534	1,6506	1,6478
0,2	1,6845	1,6794	1,6757	1,6730	1,6709	1,6691	1,6677	1,6665	1,6614	1,6561	1,6505
0,3	1,6986	1,6925	1,6878	1,6843	1,6815	1,6792	1,6773	1,6756	1,6686	1,6610	1,6531
0,4	1,7075	1,7018	1,6969	1,6930	1,6898	1,6871	1,6849	1,6830	1,6745	1,6652	1,6553
0,5	1,7100	1,7063	1,7021	1,6983	1,6952	1,6925	1,6901	1,6881	1,6789	1,6685	1,6571
0,6	1,7045	1,7049	1,7025	1,6997	1,6970	1,6946	1,6925	1,6906	1,6815	1,6707	1,6584
0,7	1,6889	1,6961	1,6971	1,6962	1,6947	1,6930	1,6914	1,6899	1,6819	1,6714	1,6590
0,75	1,6763	1,6885	1,6918	1,6923	1,6916	1,6906	1,6894	1,6881	1,6811	1,6772	1,6590
0,80	1,6599	1,6783	1,6847	1,6868	1,6872	1,6869	1,6862	1,6854	1,6797	1,6706	1,6589
0,85	1,6389	1,6652	1,6754	1,6797	1,6814	1,6820	1,6820	1,6816	1,6775	1,6696	1,6585
0,90	1,6124	1,6490	1,6639	1,6708	1,6741	1,6758	1,6765	1,6768	1,6746	1,6680	1,6579
0,95	1,5797	1,6300	1,6505	1,6603	1,6654	1,6683	1,6699	1,6708	1,6709	1,6660	1,6571
1,00	1,5470	1,6106	1,6362	1,6487	1,6556	1,6597	1,6622	1,6638	1,6664	1,6635	1,6560

Продолжение табл. 29

$\beta_1 = 0{,}975$

y	Значения фактора t при f, равном										
	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
—1,0	1,8413	1,8745	1,8924	1,9038	1,9116	1,9174	1,9219	1,9255	1,9386	1,9490	1,9563
—0,9	1,8267	1,8601	1,8786	1,8905	1,8988	1,9051	1,9100	1,9139	1,9288	1,9417	1,9522
—0,8	1,8195	1,8523	1,8707	1,8826	1,8911	1,8976	1,9026	1,9067	1,9227	1,9370	1,9495
—0,7	1,8201	1,8510	1,8686	1,8801	1,8884	1,8947	1,8997	1,9038	1,9198	1,9346	1,9481
—0,6	1,8281	1,8559	1,8720	1,8827	1,8904	1,8963	1,9009	1,9048	1,9200	1,9343	1,9477
—0,5	1,8427	1,8664	1,8803	1,8896	1,8964	1,9016	1,9057	1,9091	1,9228	1,9359	1,9483
—0,4	1,8625	1,8813	1,8925	1,9001	1,9057	1,9100	1,9135	1,9163	1,9278	1,9390	1,9497
—0,3	1,8858	1,8994	1,9077	1,9134	1,9176	1,9209	1,9235	1,9257	1,9345	1,9432	1,9517
—0,2	1,9108	1,9194	1,9247	1,9284	1,9312	1,9333	1,9351	1,9365	1,9425	1,9484	1,9542
—0,1	1,9361	1,9400	1,9425	1,9443	1,9456	1,9466	1,9475	1,9482	1,9511	1,9541	1,9570
0,0	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600	1,9600
0,1	1,9811	1,9781	1,9761	1,9746	1,9735	1,9725	1,9718	1,9712	1,9685	1,9657	1,9629
0,2	1,9980	1,9933	1,9898	1,9873	1,9852	1,9836	1,9822	1,9811	1,9762	1,9710	1,9656
0,3	2,0093	2,0042	2,0001	1,9970	1,9944	1,9923	1,9906	1,9891	1,9825	1,9754	1,9679
0,4	2,0132	2,0095	2,0059	2,0027	2,0001	1,9979	1,9960	1,9944	1,9870	1,9787	1,9697
0,5	2,0079	2,0077	2,0057	2,0035	2,0014	1,9995	1,9978	1,9963	1,9891	1,9805	1,9707
0,55	2,0011	2,0037	2,0030	2,0016	2,0000	1,9984	1,9970	1,9957	1,9890	1,9807	1,9710
0,60	1,9910	1,9970	1,9983	1,9979	1,9970	1,9960	1,9949	1,9939	1,9882	1,9804	1,9709
0,65	1,9771	1,9876	1,9912	1,9923	1,9924	1,9920	1,9914	1,9907	1,9864	1,9796	1,9706
0,70	1,9589	1,9749	1,9815	1,9844	1,9857	1,9862	1,9863	1,9862	1,9936	1,8781	1,9701
0,75	1,9355	1,9585	1,9688	1,9741	1,9769	1,9785	1,9795	1,9800	1,9797	1,9759	1,9692
0,80	1,9059	1,9376	1,9527	1,9609	1,9657	1,9687	1,9707	1,9720	1,9749	1,9730	1,9679
0,85	1,8686	1,9116	1,9327	1,9445	1,9518	1,9565	1,9597	1,9621	1,9682	1,9693	1,9664
0,90	1,8211	1,8791	1,9081	1,9249	1,9348	1,9416	1,9464	1,9500	1,9603	1,9648	1,9644
0,95	1,7593	1,8390	1,8784	1,9006	1,9145	1,9239	1,9306	1,9355	1,9510	1,9593	1,9620
1,00	1,6818	1,7925	1,8441	1,8729	1,8910	1,9032	1,9121	1,9187	1,9400	1,9529	1,9592

Продолжение табл. 29

$\beta_1 = 0{,}99$

y	Значения фактора l при f, равном										
	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
—1,0	2,2919	2,3139	2,3246	2,3307	2,3345	2,3370	2,3388	2,3401	2,3431	2,3424	2,3371
—0,9	2,2583	2,2826	2,2953	2,3030	2,3081	2,3118	2,3146	2,3167	2,3239	2,3282	2,3292
—0,8	2,2339	2,2597	2,2737	2,2825	2,2886	2,2931	2,2966	2,2994	2,3096	2,3177	2,3234
—0,7	2,2193	2,2455	2,2600	2,2694	2,2760	2,2810	2,2849	2,2881	2,3001	2,3107	2,3195
—0,6	2,2148	2,2399	2,2541	2,2635	2,2701	2,2752	2,2792	2,2824	2,2952	2,3068	2,3173
—0,5	2,2201	2,2426	2,2555	2,2641	2,2703	2,2751	2,2789	2,2819	2,2942	2,3058	2,3165
—0,4	2,2337	2,2522	2,2631	2,2704	2,2758	2,2799	2,2832	2,2859	2,2967	2,3071	2,3170
—0,3	2,2536	2,2673	2,2756	2,2812	2,2854	2,2886	2,2912	2,2933	2,3019	2,3103	2,3185
—0,2	2,2773	2,2860	2,2914	2,2951	2,2979	2,3000	2,3018	2,3032	2,3091	2,3150	2,3207
—0,1	2,3023	2,3063	2,3088	2,3106	2,3120	2,3130	2,3139	2,3146	2,3175	2,3205	2,3234
0,0	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263
0,1	2,3471	2,3442	2,3423	2,3408	2,3397	2,3388	2,3380	2,3374	2,3348	2,3320	2,3292
0,2	2,3623	2,3581	2,3550	2,3526	2,3507	2,3491	2,3479	2,3468	2,3421	2,3371	2,3318
0,3	2,3699	2,3661	2,3629	2,3602	2,3580	2,3562	2,3546	2,3537	2,3474	2,3409	2,3338
0,4	2,3675	2,3663	2,3642	2,3621	2,3602	2,3586	2,3572	2,3559	2,3499	2,3429	2,3350
0,5	2,3522	2,3564	2,3571	2,3567	2,3559	2,3550	2,3542	2,3533	2,3488	2,3427	2,3351
0,55	2,3387	2,3468	2,3496	2,3506	2,3507	2,3505	2,3502	2,3497	2,3466	2,3415	2,3347
0,60	2,3206	2,3335	2,3391	2,3418	2,3432	2,3439	2,3442	2,3442	2,3431	2,3395	2,3338
0,65	2,2972	2,3161	2,3251	2,3301	2,3330	2,3348	2,3360	2,3368	2,3381	2,3366	2,3326
0,70	2,2675	2,2938	2,3071	2,3149	2,3197	2,3230	2,3253	2,3270	2,3316	2,3328	2,3309
0,75	2,2302	2,2657	2,2845	2,2957	2,3030	2,3081	2,3118	2,3146	2,3233	2,3279	2,3287
0,80	2,1838	2,2308	2,2563	2,2719	2,2823	2,2897	2,2951	2,2993	2,3131	2,3218	2,3260
0,85	2,1256	2,1872	2,2215	2,2427	2,2570	2,2672	2,2747	2,2806	2,3006	2,3144	2,3227
0,90	2,0508	2,1324	2,1783	2,2069	2,2261	2,2398	2,2501	2,2581	2,2857	2,3056	2,3188
0,95	1,9503	2,0620	2,1244	2,1629	2,1886	2,2069	2,2206	2,2311	2,2681	2,2953	2,3142
1,00	1,7995	1,9703	2,0576	2,1094	1,1434	2,1675	2,1853	2,1992	2,2474	2,2832	2,3089

$\beta_1 = 0{,}995$

y	Значения фактора t при f, равном										
	2	3	4	5	6	7	8	9	16	36	144
—1,0	2,6036	2,6177	2,6232	2,6256	2,6265	2,6267	2,6265	2,6260	2,6217	2,6126	2,5977
—0,9	2,5565	2,5743	2,5827	2,5874	2,5902	2,5920	2,5931	2,5939	2,5953	2,5931	2,5869
—0,8	2,5197	2,5404	2,5511	2,5576	2,5620	2,5650	2,5673	2,5691	2,5749	2,5783	2,5787
—0,7	2,4942	2,5167	2,5289	2,5366	2,5420	2,5459	2,5490	2,5514	2,5604	2,5677	2,5729
—0,6	2,4806	2,5033	2,5160	2,5243	2,5301	2,5345	2,5380	2,5308	2,5515	2,5611	2,5692
—0,5	2,4787	2,4999	2,5121	2,5201	2,5259	2,5302	2,5337	2,5365	2,5477	2,5580	2,5674
—0,4	2,4874	2,5055	2,5160	2,5231	2,5282	2,5322	2,5353	2,5379	2,5482	2,5580	2,5672
—0,3	2,5044	2,5181	2,5263	2,5319	2,5360	2,5392	2,5417	2,5438	2,5522	2,5604	2,5683
—0,2	2,5269	2,5357	2,5411	2,5448	2,5476	2,5498	2,5515	2,5529	2,5588	2,5646	2,5703
—0,1	2,5517	2,5558	2,5583	2,5601	2,5615	2,5625	2,5634	2,5641	2,5670	2,5700	2,5729
0,0	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758	2,5758
0,1	2,5963	2,5935	2,5916	2,5901	2,5890	2,5882	2,5874	2,5868	2,5842	2,5815	2,5787
0,2	2,6103	2,6065	2,6035	2,6013	2,5995	2,5980	2,5968	2,5957	2,5912	2,5863	2,5812
0,3	2,6153	2,6124	2,6096	2,6073	2,6054	2,6037	2,6023	2,6011	2,5957	2,5896	2,5830
0,4	2,6081	2,6087	2,6077	2,6063	2,6050	2,6038	2,6026	2,6016	2,5967	2,5907	2,5837
0,5	2,5856	2,5927	2,5953	2,5962	2,5964	2,5963	2,5960	2,5957	2,5931	2,5889	2,5830
0,55	2,5672	2,5790	2,5843	2,5869	2,5884	2,5891	2,5896	2,5898	2,5892	2,5866	2,5821
0,60	2,5432	2,5608	2,5694	2,5743	2,5773	2,5792	2,5806	2,5815	2,5837	2,5833	2,5806
0,65	2,5128	2,5374	2,5502	2,5579	2,5629	2,5669	2,5688	2,5706	2,5763	2,5789	2,5786
0,70	2,4747	2,5079	2,5260	2,5371	2,5446	2,5499	2,5538	2,5568	2,5669	2,5732	2,5761
0,75	2,4274	2,4712	2,4957	2,5112	2,5217	2,5294	2,5351	2,5396	2,5551	2,5661	2,5729
0,80	2,3688	2,4257	2,4583	2,4793	2,4937	2,5042	2,5122	2,5185	2,5408	2,5575	2,5690
0,85	2,2953	2,3690	2,4121	2,4400	2,4594	2,4736	2,4844	2,4929	2,5236	2,5472	2,5644
0,90	2,2007	2,2973	2,3544	2,3916	2,4174	2,4362	2,4507	2,4620	2,5031	2,5351	2,5589
0,95	2,0717	2,2031	2,2810	2,3311	2,3656	2,3907	2,4098	2,4248	2,4787	2,5208	2,5526
1,00	1,8584	2,0707	2,1850	2,2548	2,3016	2,3351	2,3602	2,3799	2,4499	2,5042	2,5453

$t_{\frac{\alpha}{2}}$ — критическое значение t-критерия.

Пяти- и однопроцентные пределы G_α, f_1, f_2

Пятипроцентные пределы — верхние строки, однопроцентные — нижние

f_1	Значения G_α при f_2, равном													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985 0,999	0,9750 0,9950	0,9392 0,9794	0,9057 0,9586	0,8772 0,9373	0,8534 0,9172	0,8332 0,8988	0,8159 0,8823	0,8010 0,8674	0,7880 0,8539	0,7341 0,7949	0,6602 0,7067	0,5813 0,6062	0,5000 0,6000
3	0,9669 0,9933	0,8709 0,9423	0,7977 0,8831	0,7457 0,8335	0,7071 0,7933	0,6771 0,7606	0,6530 0,7335	0,6333 0,7107	0,6167 0,6912	0,6025 0,6743	0,5466 0,6059	0,4748 0,5153	0,4031 0,4230	0,3333 0,3333
4	0,9065 0,9676	0,7679 0,8643	0,6841 0,7814	0,6287 0,7212	0,5895 0,6761	0,5598 0,6410	0,5365 0,6129	0,5175 0,5897	0,5017 0,5702	0,4884 0,5536	0,4366 0,4884	0,3720 0,4067	0,3093 0,3251	0,2500 0,2500
5	0,8412 0,9279	0,6838 0,7885	0,5981 0,6957	0,5441 0,6329	0,5065 0,5875	0,4783 0,5531	0,4564 0,5259	0,4387 0,6037	0,4241 0,4854	0,4118 0,4697	0,3645 0,4094	0,3066 0,3351	0,2513 0,2644	0,2000 0,2000
6	0,7808 0,8828	0,6161 0,7218	0,5321 0,6258	0,4803 0,5635	0,4447 0,5195	0,4184 0,4866	0,3980 0,4608	0,3817 0,4401	0,3682 0,4229	0,3568 0,4084	0,3135 0,3529	0,2612 0,2858	0,2119 0,2229	0,1667 0,1667
7	0,7271 0,8376	0,5612 0,6644	0,4800 0,5685	0,4307 0,5080	0,3974 0,4659	0,3726 0,4347	0,3535 0,4105	0,3384 0,3911	0,3259 0,3751	0,3154 0,3616	0,2756 0,3105	0,2278 0,2494	0,1833 0,1929	0,1429 0,1429
8	0,6798 0,7945	0,5157 0,6152	0,4377 0,5209	0,3910 0,4627	0,3595 0,4226	0,3362 0,3932	0,3185 0,3704	0,3043 0,3522	0,2926 0,3373	0,2829 0,3248	0,2462 0,2779	0,2022 0,2214	0,1616 0,1700	0,1250 0,1250
9	0,6385 0,7544	0,4775 0,5227	0,4027 0,4810	0,3584 0,4251	0,3286 0,3870	0,3067 0,3592	0,2901 0,3378	0,2768 0,3207	0,2699 0,3067	0,2568 0,2950	0,2226 0,2514	0,1820 0,1992	0,1446 0,1521	0,1111 0,1111
10	0,6020 0,7175	0,4450 0,5358	0,3733 0,4469	0,3312 0,3934	0,3029 0,3572	0,2823 0,3308	0,2666 0,3106	0,2541 0,2945	0,2439 0,2813	0,2353 0,2704	0,2032 0,2297	0,1655 0,1811	0,1308 0,1376	0,1000 0,1000
12	0,5410 0,6528	0,3924 0,4751	0,3264 0,3919	0,2880 0,3328	0,2624 0,3099	0,2439 0,2861	0,2299 0,2680	0,2187 0,2535	0,2098 0,2419	0,2020 0,2320	0,1737 0,1961	0,1403 0,1535	0,1100 0,1157	0,0833 0,0833
15	0,4709 0,5747	0,3346 0,4069	0,2758 0,3319	0,2419 0,2882	0,2195 0,2593	0,2034 0,2386	0,1911 0,2228	0,1815 0,2101	0,1736 0,2002	0,1671 0,1918	0,1429 0,1612	0,1144 0,1251	0,0889 0,0934	0,0667 0,0667

f_1	Значения G_α при f_2, равном													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
	0,4799	0,3297	0,2654	0,2288	0,2048	0,1877	0,1748	0,1646	0,1567	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
	0,3632	0,2412	0,1913	0,1635	0,1454	0,1327	0,1232	0,1157	0,1100	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0205
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
	0,1225	0,0759	0,0585	0,0489	0,0429	0,0387	0,0357	0,0334	0,0316	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083

Пример. Найти критическое значение G_α для $\alpha = 0{,}05$ при $f_1 = m = 7$ и $n = 10$. На пересечении столбца, отвечающего $n-1 = 9$, и верхней строки, соответствующей 7, находим $G_{0,05} = 0{,}3259$.

РД 50—705—81 С. 149

Таблица 31

Коэффициенты a_{n-i+1}, используемые при проверке на нормальность с помощью критерия W, $n=3 \div 50$

i	Значения a_{n-i+1} при n, равном											
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251
2		0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318
3				0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460
4						0,0561	0,0947	0,1224	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802
5								0,399	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240
6										0,0303	0,0539	0,0727
7												0,0240
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												

i	Значения a_{n-i+1} при n, равном											
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	0,5150	0,5056	0,4968	0,5886	0,4808	0,4734	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407
2	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,2043
3	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533
4	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151
5	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836
6	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563
7	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316
8		0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089
9				0,0163	0,0303	0,0422	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876
10						0,0140	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672
11								0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476
12										0,0107	0,0200	0,0284
13												0,0094
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												

i	Значения a_{n-i+1} при n, равном											
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
1	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4096	0,4068	0,4040	0,4015
2	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944	0,2921	0,2898	0,2876	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774
3	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487	0,2475	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391
4	0,2151	0,2151	0,2150	0,2148	0,2145	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110
5	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881
6	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686
7	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513
8	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356
9	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036	0,1066	0,1093	0,2118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211
10	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075
11	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947
12	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824
13	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706
14		0,0084	0,0159	0,0227	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592
15				0,0076	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481
16						0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372
17								0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264
18										0,0057	0,0110	0,0158
19												0,0053
20												
21												
22												
23												
24												
25												

i	Значения a_{n-i+1} при n, равном											
	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3989	0,3964	0,3940	0,3917	0,3895	0,3872	0,0385	0,3830	0,3808	0,3787	0,3770	0,3751
2	0,2755	0,2737	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2380	0,2368	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2323	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2104	0,2098	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1880	0,1878	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1865	0,1862	0,1859	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1689	0,1691	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1520	0,1526	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1366	0,1376	0,1384	0,1392	0,1389	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1225	0,1237	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1092	0,1108	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,0967	0,0986	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0848	0,0870	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0733	0,0759	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0622	0,0651	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0515	0,0546	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0409	0,0444	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0305	0,0343	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0203	0,0244	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0101	0,0146	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20		0,0049	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21				0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0259	0,0288	0,0314
22						0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23								0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24										0,0037	0,0071	0,0104
25												0,0035

Пример. Определить значение коэффициента a_{n-i+1} для $n=20$ и $i=4$.
На пересечении столбца, отвечающего 20, и строки, соответствующей 4, находим $a_{17}=0{,}2085$.

Таблица 32

Значение α-процентных пределов критерия W для $n=3\div50$

n	Значения W при α %, равном				
	1	2	5	10	50
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960
22	0.878	0,982	0,911	0.926	0,961
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965
28	0,896	0,907	0,924	0,936	0,966
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,967
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973

Продолжение табл. 32

n	Значения W при α %, равном				
	1	2	5	10	50
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974
49	0,929	0,937	0,947	0,955	0,974
50	0,930	0,938	0,947	0,955	0,974

Пример. Найти критическое значение критерия W для $\alpha = 0,05$ и $n = 30$. На пересечении столбца, отвечающего 5, и строки, соответствующей 30, находим $W_{0,05} = 0,927$.

Таблица 33

Процентили распределения *s*-статистики для критерия согласия в случае двухпараметрического распределения Вейбулла

Процентили распределения *s*-статистики и ожидаемых значений $M_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
3	1	1,216395	—	—	—	—	—	—
	2	0,863046	—	—	—	—	—	—
	3	—	0,75	0,79	0,84	0,90	0,95	0,99
4	1	1,150727	—	—	—	—	—	—
	2	0,706698	—	—	—	—	—	—
	3	0,679596	0,74	0,79	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	—	0,50	0,55	0,60	0,67	0,76	0,89
5	1	1,115718	—	—	—	—	—	—
	2	0,645384	—	—	—	—	—	—
	3	0,532445	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,583273	0,50	0,56	0,61	0,68	0,77	0,89
	5	—	0,67	0,71	0,75	0,79	0,86	0,94

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
6	1	1,093929	—	—	—	—	—	—
	2	0,612330	—	—	—	—	—	—
	3	0,474330	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,442920	0,50	0,55	0,61	0,68	0,76	0,89
	5	0,522759	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,93
	6	—	0,54	0,57	0,61	0,66	0,73	0,84
7	1	1,079055	—	—	—	—	—	—
	2	0,591587	—	—	—	—	—	—
	3	0,442789	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,387289	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,89
	5	0,387714	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,480648	0,54	0,58	0,62	0,67	0,74	0,85
	7	—	0,64	0,67	0,70	0,74	0,80	0,88
8	1	1,068252	—	—	—	—	—	—
	2	0,577339	—	—	—	—	—	—
	3	0,422889	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,356967	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,334089	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,349907	0,54	0,58	0,62	0,67	0,74	0,85
	7	0,449338	0,64	0,67	0,70	0,74	0,80	0,89
		—	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,81
9	1	1,060046	—	—	—	—	—	—
	2	0,566942	—	—	—	—	—	—
	3	0,409157	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,337763	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,89
	5	0,304777	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,297949	0,54	0,58	0,62	0,67	0,75	0,86
	7	0,322189	0,63	0,67	0,70	0,74	0,80	0,89
	8	0,424958	0,55	0,58	0,61	0,66	0,72	0,82
	9	—	0,62	0,64	0,67	0,71	0,76	0,85
10	1	1,053606	—	—	—	—	—	—
	2	0,559013	—	—	—	—	—	—
	3	0,399100	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,324470	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,286163	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,269493	0,54	0,58	0,62	0,68	0,75	0,85
	7	0,271645	0,63	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,300869	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,81
	9	0,405316	0,62	0,65	0,68	0,71	0,76	0,85
	10	—	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,79

Продолжение табл. 33

n	i	M_i^-	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
11	1	1,048411	—	—	—	—	—	—
	2	0,552769	—	—	—	—	—	—
	3	0,391410	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,314705	0,49	0,55	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,273245	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,251386	0,54	0,58	0,63	0,68	0,75	0,86
	7	0,243928	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,251548	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,283879	0,62	0,64	0,68	0,71	0,77	0,85
	10	0,389071	0,55	0,58	0,61	0,64	0,70	0,79
	11	—	0,60	0,63	0,65	0,69	0,74	0,82
12	1	1,044137	—	—	—	—	—	—
	2	0,547721	—	—	—	—	—	—
	3	0,385338	0,75	0,79	0,84	0,90	0,95	0,99
	4	0,307221	0,50	0,55	0,61	0,68	0,78	0,89
	5	0,263737	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,238797	0,54	0,58	0,62	0,67	0,74	0,85
	7	0,226264	0,64	0,67	0,70	0,75	0,81	0,89
	8	0,224477	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,235630	0,62	0,64	0,68	0,71	0,77	0,85
	10	0,269966	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,79
	11	0,375356	0,60	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	—	0,55	0,57	0,60	0,63	0,68	0,76
13	1	1,040555	—	—	—	—	—	—
	2	0,543556	—	—	—	—	—	—
	3	0,380417	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,301300	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,89
	5	0,256437	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,229515	0,54	0,58	0,63	0,68	0,75	0,86
	7	0,213966	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,90
	8	0,207205	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,209131	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,222667	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,79
	11	0,258323	0,60	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,363582	0,55	0,57	0,60	0,64	0,68	0,76
	13	—	0,59	0,61	0,64	0,67	0,72	0,79

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
14	1	1,037513	—	—	—	—	—	—
	2	0,540059	—	—	—	—	—	—
	3	0,376352	0,75	0,79	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,296496	0,49	0,54	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,250650	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,222377	0,54	0,58	0,62	0,68	0,74	0,86
	7	0,204885	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,195165	0,55	0,58	0,62	0,66	0,73	0,82
	9	0,192209	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,196679	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,79
	11	0,211875	0,60	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,248409	0,55	0,57	0,60	0,64	0,68	0,77
	13	0,353334	0,59	0,61	0,64	0,57	0,72	0,79
	14	—	0,55	0,57	0,59	0,62	0,67	0,75
15	1	1,034894	—	—	—	—	—	—
	2	0,537085	—	—	—	—	—	—
	3	0,372934	0,75	0,80	0,84	0,90	0,95	0,99
	4	0,292518	0,51	0,56	0,62	0,69	0,78	0,90
	5	0,245947	0,68	0,71	0,76	0,80	0,86	0,94
	6	0,216712	0,54	0,58	0,62	0,67	0,75	0,86
	7	0,197893	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,186266	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,180402	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,180072	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,79
	11	0,186347	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,202727	0,55	0,57	0,60	0,64	0,68	0,77
	13	0,239842	0,59	0,62	0,64	0,67	0,72	0,79
	14	0,344309	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,75
	15	—	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,77
16	1	1,032617	—	—	—	—	—	—
	2	0,534521	—	—	—	—	—	—
	3	0,370021	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,289169	0,51	0,56	0,62	0,69	0,78	0,89
	5	0,242049	0,68	0,72	0,76	0,80	0,86	0,94
	6	0,212103	0,54	0,58	0,63	0,68	0,75	0,86
	7	0,192338	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,179407	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,171667	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,168476	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,79
	11	0,170026	0,60	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,177619	0,55	0,58	0,60	0,64	0,69	0,77
	13	0,194859	0,60	0,62	0,64	0,68	0,72	0,80
	14	0,232350	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,75
	15	0,336283	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,77
	16	—	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
17	1	1,030618	—	—	—	—	—	—
	2	0,532290	—	—	—	—	—	—
	3	0,367507	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,286312	0,50	0,55	0,61	0,69	0,78	0,90
	5	0,238765	0,67	0,71	0,75	0,80	0,87	0,94
	6	0,208278	0,54	0,58	0,62	0,68	0,74	0,85
	7	0,187813	0,64	0,67	0,71	0,75	0,80	0,89
	8	0,173951	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,81
	9	0,164928	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,159891	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,79
	11	0,158624	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,161559	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,77
	13	0,170132	0,59	0,62	0,64	0,67	0,72	0,80
	14	0,188005	0,55	0,57	0,60	0,63	0,68	0,75
	15	0,225729	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,77
	16	0,329085	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,74
	17	0,329085	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,75
18	1	1,028850	—	—	—	—	—	—
	2	0,530332	—	—	—	—	—	—
	3	0,365314	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,283846	0,49	0,55	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,235958	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,205051	0,54	0,58	0,62	0,67	0,75	0,86
	7	0,184055	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,169504	0,55	0,58	0,62	0,66	0,73	0,82
	9	0,159564	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,153263	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,80
	11	0,150176	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,150333	0,55	0,68	0,61	0,64	0,69	0,77
	13	0,154313	0,60	0,62	0,64	0,68	0,72	0,80
	14	0,163630	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,76
	15	0,181971	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,78
	16	0,219885	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,74
	17	0,322580	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	—	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
19	1	1,027277	—	—	—	—	—	—
	2	0,528594	—	—	—	—	—	—
	3	0,363389	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,281692	0,50	0,55	0,61	0,69	0,78	0,90
	5	0,233535	0,67	0,71	0,76	0,81	0,86	0,94
	6	0,202291	0,54	0,58	0,62	0,68	0,75	0,86
	7	0,180882	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,165807	0,55	0,58	0,62	0,67	0,72	0,82
	9	0,155189	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,147984	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,80
	11	0,143650	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,142012	0,55	0,58	0,60	0,64	0,69	0,77
	13	0,143250	0,60	0,62	0,64	0,68	0,72	0,80
	14	0,148031	0,55	0,58	0,60	0,63	0,68	0,76
	15	0,157921	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,78
	16	0,176611	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,74
	17	0,214520	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,316666	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72
	19	—	0,57	0,59	0,61	0,64	0,67	0,74
20	1	1,025866	—	—	—	—	—	—
	2	0,527046	—	—	—	—	—	—
	3	0,361682	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,279798	0,50	0,55	0,61	0,68	0,78	0,90
	5	0,231417	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,199905	0,54	0,58	0,62	0,67	0,75	0,86
	7	0,178167	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,162684	0,55	0,58	0,62	0,66	0,73	0,82
	9	0,151549	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,143674	0,55	0,58	0,61	0,65	0,71	0,80
	11	0,138448	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,83
	12	0,135580	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,77
	13	0,135306	0,60	0,62	0,65	0,68	0,72	0,80
	14	0,137120	0,55	0,57	0,60	0,63	0,68	0,76
	15	0,142527	0,59	0,61	0,63	0,66	0,71	0,78
	16	0,152861	0,55	0,57	0,59	0,62	0,67	0,74
	17	0,171810	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,209721	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,72
	19	0,311257	0,58	0,59	0,61	0,64	0,68	0,74
	20	—	0,55	0,56	0,58	0,61	0,65	0,71

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
21	1	1,024594	—	—	—	—	—	—
	2	0,525657	—	—	—	—	—	—
	3	0,360159	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,278117	0,50	0,56	0,62	0,69	0,78	0,90
	5	0,229551	0,68	0,71	0,76	0,80	0,86	0,94
	6	0,197821	0,54	0,58	0,62	0,67	0,74	0,85
	7	0,175815	0,64	0,67	0,71	0,75	0,80	0,89
	8	0,160009	0,55	0,58	0,62	0,66	0,73	0,82
	9	0,148471	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,140087	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,80
	11	0,134200	0,60	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,130451	0,55	0,58	0,60	0,64	0,69	0,77
	13	0,128702	0,59	0,62	0,64	0,68	0,72	0,79
	14	0,129025	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,75
	15	0,131756	0,59	0,61	0,63	0,66	0,70	0,78
	16	0,137659	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,74
	17	0,148341	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,167481	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73
	19	0,205352	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,75
	20	0,306285	0,55	0,56	0,58	0,61	0,65	0,72
	21	—	0,57	0,59	0,61	0,63	0,67	0,73
22	1	1,023439	—	—	—	—	—	—
	2	0,524405	—	—	—	—	—	—
	3	0,358790	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,276618	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,90
	5	0,227895	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,195983	0,54	0,58	0,63	0,68	0,75	0,85
	7	0,173760	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,157692	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,145834	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,137052	0,55	0,58	0,61	0,65	0,70	0,80
	11	0,130662	0,61	0,63	0,66	0,69	0,74	0,82
	12	0,126260	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,78
	13	0,123640	0,60	0,62	0,65	0,68	0,72	0,80
	14	0,122763	0,55	0,58	0,60	0,63	0,68	0,75
	15	0,123763	0,59	0,61	0,63	0,67	0,71	0,78
	16	0,127019	0,55	0,57	0,60	0,62	0,67	0,74
	17	0,133316	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,144273	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73
	19	0,163552	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,75
	20	0,201355	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72
	21	0,301693	0,57	0,59	0,61	0,64	0,67	0,73
	22	—	0,54	0,56	0,58	0,61	0,64	0,70

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
23	1	1,022389	—	—	—	—	—	—
	2	0,523269	—	—	—	—	—	—
	3	0,357557	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,275268	0,50	0,55	0,61	0,68	0,77	0,89
	5	0,226417	0,67	0,71	0,75	0,80	0,86	0,94
	6	0,194351	0,55	0,59	0,63	0,68	0,76	0,86
	7	0,171948	0,64	0,68	0,71	0,76	0,82	0,89
	8	0,155666	0,56	0,59	0,63	0,67	0,73	0,83
	9	0,143549	0,62	0,65	0,68	0,72	0,78	0,86
	10	0,134451	0,56	0,59	0,62	0,66	0,71	0,80
	11	0,127667	0,61	0,63	0,66	0,70	0,75	0,82
	12	0,122768	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,78
	13	0,119503	0,60	0,62	0,65	0,68	0,73	0,80
	14	0,117764	0,55	0,57	0,60	0,63	0,68	0,76
	15	0,117577	0,59	0,61	0,63	0,67	0,71	0,78
	16	0,119120	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,75
	17	0,122799	0,58	0,60	0,63	0,65	0,69	0,77
	18	0,129416	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73
	19	0,140590	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,75
	20	0,159966	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72
	21	0,197679	0,57	0,59	0,61	0,63	0,67	0,73
	22	0,297435	0,55	0,56	0,58	0,60	0,64	0,70
	23	—	0,57	0,58	0,60	0,63	0,66	0,72
24	1	1,021431	—	—	—	—	—	—
	2	0,522233	—	—	—	—	—	—
	3	0,356436	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,274051	0,50	0,56	0,62	0,69	0,78	0,90
	5	0,225086	0,67	0,71	0,76	0,81	0,86	0,94
	6	0,192892	0,54	0,58	0,62	0,68	0,75	0,85
	7	0,170338	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,153877	0,55	0,58	0,62	0,67	0,73	0,83
	9	0,141549	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,86
	10	0,132195	0,56	0,58	0,61	0,66	0,71	0,80
	11	0,125099	0,61	0,63	0,66	0,70	0,75	0,83
	12	0,119811	0,55	0,58	0,61	0,64	0,70	0,78
	13	0,116054	0,60	0,62	0,65	0,68	0,73	0,80
	14	0,113677	0,55	0,58	0,60	0,64	0,68	0,76
	15	0,112638	0,59	0,61	0,64	0,67	0,71	0,78
	16	0,113007	0,55	0,57	0,60	0,63	0,67	0,74
	17	0,114990	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,119014	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73
	19	0,125889	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,75
	20	0,137235	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72
	21	0,156679	0,57	0,59	0,61	0,64	0,67	0,73
	22	0,194285	0,55	0,56	0,58	0,61	0,64	0,71
	23	0,293473	0,57	0,59	0,60	0,63	0,66	0,72
	24	—	0,54	0,56	0,58	0,60	0,64	0,69

Продолжение табл. 33

n	i	M_i	Процентили распределения статистики $s_{\alpha,n,i}$ при вероятности $P=1-\alpha$, равной					
			0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
25	1	1,020551	—	—	—	—	—	—
	2	0,521285	—	—	—	—	—	—
	3	0,355415	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
	4	0,272945	0,50	0,56	0,61	0,69	0,78	0,91
	5	0,223885	0,67	0,71	0,76	0,81	0,87	0,94
	6	0,191578	0,54	0,58	0,62	0,68	0,75	0,86
	7	0,168899	0,64	0,67	0,71	0,75	0,81	0,89
	8	0,152286	0,55	0,58	0,62	0,66	0,72	0,82
	9	0,139783	0,62	0,65	0,68	0,72	0,77	0,85
	10	0,130219	0,56	0,58	0,61	0,65	0,70	0,80
	11	0,122871	0,61	0,63	0,66	0,70	0,75	0,82
	12	0,117274	0,55	0,58	0,61	0,64	0,69	0,78
	13	0,113132	0,60	0,62	0,65	0,68	0,73	0,81
	14	0,110268	0,55	0,58	0,60	0,63	0,68	0,76
	15	0,108598	0,59	0,61	0,64	0,66	0,71	0,78
	16	0,108124	0,55	0,67	0,60	0,63	0,67	0,74
	17	0,108944	0,58	0,60	0,62	0,65	0,69	0,76
	18	0,111289	0,55	0,57	0,59	0,62	0,66	0,73
	19	0,115596	0,58	0,60	0,62	0,64	0,68	0,75
	20	0,122683	0,55	0,57	0,59	0,61	0,65	0,72
	21	0,134165	0,57	0,59	0,61	0,63	0,67	0,74
	22	0,153650	0,55	0,56	0,58	0,61	0,64	0,71
	23	0,191137	0,57	0,58	0,60	0,63	0,66	0,72
	24	0,289773	0,54	0,56	0,58	0,60	0,63	0,70
	25	—	0,56	0,58	0,60	0,62	0,65	0,71

Таблица 34

Значения параметра нецентральности Δ нецентрального χ^2 распределения для числа степеней свободы f и мощности β_1 критерия χ^2

$\alpha = 0{,}05$

f	Значения параметра Δ при β_1, равном										
	0,25	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97	0,99
1	1,647	3,841	4,899	6,172	6,940	7,849	8,978	10,507	12,995	14,751	18,372
2	2,256	4,957	6,213	7,702	8,591	9,635	10,923	12,654	15,443	17,398	21,396
3	2,705	5,760	7,154	8,792	9,765	10,903	12,301	14,171	17,170	19,262	23,521
4	3,078	6,419	7,924	9,682	10,722	11,935	13,422	15,405	18,572	20,774	25,243
5	3,403	6,991	8,591	10,453	11,550	12,828	14,391	16,469	19,780	22,076	26,726
6	3,696	7,503	9,187	11,141	12,289	13,624	15,255	17,419	20,857	23,237	28,046
7	3,965	7,971	9,732	11,768	12,963	14,351	16,042	18,284	21,838	24,294	29,247
8	4,214	8,405	10,236	12,349	13,587	15,022	16,770	19,083	22,744	25,270	30,356
9	4,448	8,810	10,708	12,892	14,170	15,650	17,450	19,829	23,589	26,180	31,391
10	4,669	9,193	11,153	13,404	14,720	16,241	18,090	20,532	24,386	27,037	32,365
11	4,878	9,556	11,575	13,890	15,240	16,802	18,697	21,198	25,140	27,849	33,286
12	5,080	9,903	11,977	14,353	15,737	17,336	19,276	21,833	25,858	28,623	34,164
13	5,273	10,235	12,363	14,796	16,212	17,847	19,829	22,439	26,545	29,362	35,003
14	5,458	10,554	12,733	15,221	16,669	18,338	20,361	23,022	27,204	30,071	35,808
15	5,637	10,861	13,090	15,631	17,108	18,811	20,873	23,583	27,839	30,754	36,583
16	5,809	11,159	13,434	16,027	17,533	19,268	21,367	24,125	28,452	31,414	37,331
17	5,977	11,466	13,768	16,411	17,944	19,710	21,845	24,650	29,045	32,052	38,054
18	6,139	11,726	14,092	16,783	18,343	20,139	22,309	25,158	29,620	32,670	38,755
19	6,297	11,997	14,407	17,144	18,731	20,555	22,760	25,652	30,178	33,270	39,436
20	6,451	12,262	14,713	17,496	19,108	20,961	23,199	26,132	30,721	33,855	40,098
21	6,601	12,519	15,012	17,839	19,475	21,356	23,626	26,600	31,250	34,424	40,743
22	6,748	12,771	15,304	18,174	19,834	21,741	24,043	27,057	31,767	34,979	41,372
23	6,892	13,017	15,588	18,501	20,184	22,118	29,450	27,503	32,271	35,521	41,986
24	7,032	13,257	15,867	18,820	20,527	22,486	24,848	27,939	32,763	36,050	42,586

$\alpha = 0{,}05$

f	Значения параметра Δ при β_1, равном										
	0,25	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97	0,99
25	7,170	13,493	16,140	19,133	20,862	22,847	25,238	28,366	33,246	36,569	43,173
26	7,304	13,723	16,407	19,440	21,191	23,200	25,620	28,784	33,718	37,076	43,748
27	7,437	13,950	16,669	19,741	21,513	23,546	25,994	29,194	34,181	37,574	44,312
28	7,566	14,172	16,926	20,036	21,829	23,885	26,361	29,596	34,635	38,062	44,865
29	7,694	14,390	17,179	20,325	22,139	24,219	26,722	29,991	35,081	38,541	45,407
30	7,819	14,604	17,427	20,610	22,444	24,547	27,076	30,379	35,519	39,012	45,940
32	8,063	15,023	17,911	21,165	23,039	25,186	27,767	31,135	36,372	39,930	46,979
34	8,300	15,428	18,381	21,703	23,615	25,804	28,436	31,867	37,199	40,818	47,985
36	8,531	15,821	18,836	22,225	24,174	26,405	29,085	32,578	38,001	41,680	48,960
38	8,755	16,204	19,279	22,733	24,718	26,989	29,716	33,268	38,780	42,517	49,908
40	8,973	16,576	19,710	23,227	25,247	27,557	30,330	33,940	39,539	43,332	50,830
42	9,186	16,939	20,130	23,709	25,763	28,111	30,929	34,595	40,278	44,126	51,729
44	9,394	17,294	20,540	24,179	26,267	28,032	31,513	35,235	41,000	44,901	52,605
46	9,597	17,641	20,941	24,639	26,759	29,181	32,084	35,860	41,704	45,658	53,462
48	9,796	17,980	21,334	25,088	27,240	29,698	32,642	26,470	42,394	46,398	54,299
50	9,991	18,312	21,718	25,528	27,712	30,204	33,189	37,069	43,068	47,123	55,119
55	10,462	19,115	22,646	26,591	28,850	31,426	24,509	38,513	44,697	48,872	57,097
60	10,911	19,881	23,533	27,607	29,937	32,593	35,770	39,891	46,251	50,542	58,984
65	11,344	20,617	24,383	28,580	30,979	33,711	36,978	41,213	47,741	52,142	60,793
70	11,759	21,324	25,201	29,517	31,981	34,787	38,140	42,483	49,174	53,680	62,531
75	12,160	22,006	25,990	30,420	32,948	35,825	39,261	43,709	50,555	55,163	64,207
80	12,547	22,666	26,753	31,294	33,883	36,829	40,345	44,893	51,890	56,596	65,827
85	12,924	23,306	27,492	32,140	34,789	37,801	41,394	46,041	53,184	57,984	67,395
90	13,289	23,927	28,210	32,962	35,669	38,745	42,414	47,155	54,439	59,332	68,918
95	13,644	24,532	29,908	33,761	36,524	39,663	43,404	48,238	55,659	60,642	70,397
100	13,990	25,120	29,588	34,539	37,357	40,556	44,369	49,293	56,848	61,917	71,838

$\alpha = 0{,}01$

f	Значения параметра Δ при β_1, равном										
	0,25	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97	0,99
1	3,615	6,635	8,004	9,611	10,565	11,679	13,048	14,879	17,814	19,861	24,031
2	4,699	8,190	9,752	11,567	12,636	13,881	15,403	17,427	20,650	22,886	27,415
3	5,437	9,310	11,008	12,970	14,121	15,458	17,087	19,247	22,674	25,043	29,826
4	6,072	10,232	12,040	14,121	15,339	16,749	18,466	20,737	24,329	26,806	31,794
5	6,625	11,033	12,935	15,119	16,395	17,869	19,661	22,028	25,762	28,333	33,498
6	7,123	11,751	13,738	16,014	17,340	18,872	20,731	23,182	27,043	29,697	35,020
7	7,578	12,408	14,472	16,831	18,204	19,787	21,707	24,235	28,212	30,941	36,408
8	8,002	13,017	15,153	17,588	19,003	20,635	22,611	25,211	29,294	32,092	37,692
9	8,399	13,588	15,790	18,297	19,752	21,429	23,457	26,123	30,305	33,168	38,898
10	8,775	14,126	16,390	18,965	20,458	22,177	24,254	26,982	31,258	34,182	40,021
11	9,132	14,638	16,961	19,599	21,128	22,886	25,011	27,798	32,161	35,143	41,092
12	9,473	15,126	17,505	20,204	21,767	23,563	25,732	28,575	33,022	36,059	42,112
13	9,799	15,593	18,027	20,784	22,378	24,211	26,422	29,319	33,846	36,936	43,088
14	10,114	16,043	18,528	21,341	22,966	24,833	27,085	30,033	34,638	37,777	44,026
15	10,417	16,476	19,011	21,877	23,533	25,433	27,724	30,722	35,400	38,588	44,928
16	10,711	16,985	19,478	22,396	24,080	26,013	28,341	31,387	36,136	39,371	45,800
17	10,995	17,301	19,930	22,898	24,610	26,574	28,939	32,031	36,849	40,128	46,643
18	11,271	17,695	20,369	23,385	25,124	27,118	29,519	32,655	37,540	40,863	47,460
19	11,540	18,078	20,795	23,859	25,624	27,647	30,082	33,262	38,211	41,577	48,255
20	11,801	18,451	21,211	24,320	26,110	28,162	30,631	33,852	38,865	42,271	49,027
21	12,056	18,814	21,616	24,769	26,585	28,664	31,165	34,427	39,501	42,948	49,780
22	12,305	19,169	22,011	25,208	27,047	29,154	31,686	34,982	40,122	43,608	50,514
23	12,549	19,516	22,397	25,636	27,500	29,632	32,195	35,537	40,729	44,253	51,231
24	12,788	19,856	22,775	26,055	27,942	30,100	32,693	36,073	41,322	44,883	51,932
25	13,021	20,188	23,145	26,466	28,375	30,558	33,181	36,598	41,903	45,500	52,619
26	13,250	20,514	23,507	26,868	28,799	31,007	33,659	37,113	42,471	46,104	53,290
27	13,474	20,833	23,863	27,262	29,215	31,447	34,127	37,617	43,029	46,697	53,949
28	13,695	21,146	24,211	27,649	29,623	31,879	34,587	38,111	43,576	47,278	54,595
29	13,912	21,454	24,554	28,029	30,024	32,303	35,038	38,597	44,113	47,848	55,230

$\alpha = 0{,}01$

f	Значения параметра Δ при β_1, равном										
	0,25	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97	0,99
30	14,124	21,757	24,891	28,403	30,418	32,720	35,482	39,074	44,641	48,409	55,853
32	14,540	22,347	25,548	29,131	31,186	33,533	36,346	40,005	45,669	49,502	57,067
34	14,943	22,920	26,184	29,837	31,930	34,320	37,184	40,906	46,666	50,560	58,243
36	15,335	23,475	26,802	30,522	32,653	35,084	37,997	41,781	47,632	51,587	59,384
38	15,715	24,015	27,403	31,188	33,355	35,827	38,787	42,631	48,572	52,585	60,493
40	16,086	24,542	27,988	31,837	34,039	36,550	39,557	43,459	49,486	53,556	61,572
42	16,448	25,055	28,559	32,469	34,706	37,256	40,307	44,266	50,378	54,502	62,623
44	16,801	25,556	29,116	33,086	35,356	37,944	41,039	45,053	51,248	55,426	63,649
46	17,146	26,045	29,660	33,690	35,993	38,617	41,754	45,822	52,098	56,329	64,652
48	17,484	26,525	30,193	34,280	36,615	39,275	42,454	46,575	52,929	57,211	65,632
50	17,816	26,994	30,715	34,858	37,224	39,919	43,139	47,312	53,743	58,075	66,591
55	18,616	28,128	31,975	36,254	38,696	41,475	44,794	49,091	55,707	60,161	68,907
60	19,381	29,211	33,178	37,587	40,101	42,960	46,374	50,790	57,583	62,152	71,118
65	20,115	30,250	34,333	38,866	41,448	44,385	47,888	52,418	59,381	64,061	73,236
70	20,821	31,249	35,443	40,096	42,745	45,755	49,345	54,984	61,109	65,895	75,272
75	21,502	32,214	36,515	41,282	43,995	47,077	50,750	55,494	62,776	67,664	77,235
80	22,162	33,147	37,551	42,430	45,204	48,355	52,109	56,954	64,388	69,375	79,132
85	22,802	34,051	38,556	43,542	46,376	49,593	53,425	58,369	65,949	71,031	80,970
90	23,423	34,929	39,531	44,621	47,513	50,796	54,703	59,742	67,467	72,639	82,753
95	24,026	35,782	40,479	45,671	48,620	51,956	55,945	61,078	68,937	74,202	84,487
100	24,615	36,614	41,403	46,693	49,697	53,103	57,155	62,378	70,372	75,724	86,175

Таблица 35

Зависимость коэффициентов G, H от $\frac{d}{\sigma}$ и B.

B	G, H	Значения коэффициентов G и H при d/σ, равном										
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
0	G	0,9389	0,9963	1,0758	1,1522	1,2105	1,2400	1,2502	1,2527	1,2532	1,2533	1,2533
	H	1,7450	1,3709	1,2766	1,3805	1,7926	2,2625	4,9929	—	—	—	—
0,1	G	0,9411	1,0040	1,0754	1,1516	1,2142	1,2535	1,2752	1,2888	1,3002	1,3118	1,3247
	H	1,7520	1,3838	1,2745	1,3481	1,6300	2,1196	2,6694	2,9256	2,8296	2,6144	2,4073
0,2	G	0,9411	1,0040	1,0743	1,1502	1,2242	1,2909	1,3493	1,4018	1,4535	1,4878	1,5716
	H	1 7520	1,3843	1,2705	1,2729	1,3510	1,4643	1,5669	1,6045	1,5680	1,4761	1,4261
0,3	G	0,9411	1,0040	1,0730	1,1484	1,2367	1,3423	1,4639	1,5987	1,7478	1,9171	2,1160
	H	1,7520	1,3849	1,2655	1,1952	1,1461	1,1347	1,1571	1,1929	1,2242	1,2473	1,2707
0,4	G	0,9411	1,0040	1,0719	1,1469	1,2344	1,3888	1,5840	1,8442	2,1840	2,6244	3,1976
	H	1,7520	1,3854	1,2616	1,1417	1,0261	0,9830	0,9854	1,0080	1,1166	1,2385	1,4003
0,5	G	0,9411	1,0040	1,0715	1,1277	1,2510	1,4079	1,6390	1,9748	2,4630	3,1788	4,2446
	H	1,7520	1,3850	1,2601	1,1061	0,9991	0,9385	0,9366	0,9874	1,0946	1,2715	1,5435

$B = \frac{|a - \sigma_{a_i}|}{d}$, где σ_{a_i} — значение уровня амплитуды напряжения цикла, ближайшее к ожидаемому среднему значению предела выносливости a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М.: «Наука», 1973, с. 899.

2. A. C. Cohen. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. Technometrics, vol. 18, N 1, 1976, pp. 99—103.

3. A. C. Cohen. Multi—Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution. Technometrics, vol 17, N 3, 1975, pp. 347—350.

4. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983, с. 416.

5. Скрипник В. М., Назин А. Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск, 1981, с. 143.

6. Mann N. R., Fertig K. W., Scheuer E. M. Tolerance Bounds and a New Goodness — of — Fit Test for Two—Parameter Weibull or Extreme—Value Distribution. Aerospace Research Laboratories, Wright—Patterson, Air Force Base, Ohio, ARL 71—0077, May 1971.

7. David F. N., Johnson N. L. Statistical Treatment of Censored Data, 1954, Part 1. Biometrika, v. 41, pp. 228—240.

8. Pearson E. S., Hartley H. O. Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1, 1966, vol. 2, 1972. Cambridge University Press.

9. Степнов М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. М.: Машиностроение, 1985, с. 231.

10. Справочник по специальным функциям под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Изд. Наука, 1979, с. 830.

11. Хальд А. Математическая статистика с техническим приложением, М.: «Иностранная литература», 1956, с. 664.

12. Owen D. B. The power of Student's t-test. J. Amer. Statist. ASS, v. 60, 1965, N 309, p. 320.

13. Bartlett M. S. Properties of Sufficiency and Statistical Test. Proc. Roy. Soc. A., v. 160, 1937, p. 268.

14. Cohran W. G. The X^2-test of Goodness of Fit. Ann. Math. Stat., v. 23, 1952, pp. 315—345, 525—540.

15. Pearson E. S., Hartley H. O. Charts of the Power Function for Analysis of Variance tests Derived from the Non—Central F-distribution. Biometrika, v. 38, 1951, p. 112.

16. Fox M. Charts of the power of the F-test. Ann. Math. Stat., v. 27, 1956, p. 484.

17. Shapiro S. S., Wilk M. B. An Analysis of Variance Test for Normality (complete samples). Biometrika, v. 52, 1965, p. 591.

18. Shapiro S. S., Wilk M. B., Chen H. J. A comparative study of Variance test for Normality. J. Amer. Stat. Ass, 1968, N 324, v. 63, pp. 1343—1372.

19. Patnaik P. B. The Non—Central X^2—and F-Distribution and their applications. Biometrika, v. 36, 1949, pp. 202—232.

20. Eisenhart C. The Power Function of the X^2-test. Bull. Amer. Math. Soc., v. 44, 1938, p. 32.

21. Dixon W. T. Power under Normality of Several Nonparametric Tests. Ann. Math. statist., v. 25, 1954, p. 620.

22. Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.

23. Тюрин Ю. Н. Непараметрические методы статистики. М.: Знание, 1978.

24. Stephens M. A. Use of the Kolmogorov—Smirnov, Cramer — von Misec and Related statistics without Extensive Tables. J. R. Statist. Soc., B., 32, 1970, pp. 115—122.

25. Stephens M. A. Tests for Normality Stanford Univ. Dept. of Statistics. Tech. Report., N 152, 1969.

26. Stephens M. A. Kolmogorov — type Tests for Exponentiality When the Scale Parameters is Unknown. Stanford Univ Dept. of Statist. Tech. Report, N 154, 1970.

27. Т. Хеттмансперггер. Статистические выводы, основанные на рангах. М.: Финансы и статистика, 1987, с. 334.

28. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика. 1983, с. 518.

29. Iman R. L. An approximation to the Exact Destribution of the Wilcoxon signed rank Test Statistic. Commun. Statist. 1974, v. 3, pp. 795—806.

30. Iman R. L. An Approximation to the Wicloxon — Mann — Whitney rank sum Test Statistic. Commun. Statist., 1976, A5, pp. 587—598.

31. Iman R. L., Davenport J. New Approximation to the Exact Distribution at the Kruskal — Wallis Test statistic. Commun. Statist, 1976, A5, pp. 1385—1348.

32. Sundrum R. M. The Power of Wilcoxon's Two—sample Test, J. Roy. Statist. Soc. B, v. 15, 1953, p. 246.

33. Massey F. T. A Note on the Power of a Non-parametric Test. Ann. Math. Stat., v. 21, 1950, p. 440, v. 23, 1952, p. 637.

34. Arnold H. J. Small Sample Power of the one Sample Wilcoxon Tests for Non—Normal Shift Alternatives, Ann. Math. Statist. v. 36, 1965, p. 1767.

35. Van der Vaart H. R. Some Remarks on the Power Function of Wilcoxon's Test for the Problem of two-samples. I, II Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. A, v. 53, 1950, pp. 494—507.

36. Van der Vaart H. R. An Investigation on the Power Function of Wilcoxon's Two Sample Test it the Underlying Distribution are not Normal. Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. A, v. 56, 1953, p. 438.

37. Hodges J. L., Lehman E. L. The Efficiency of Some Nonparametric competitors of the t-Test. — Ann. Math. Statist. v. 27, 1956, p. 324.

38. Halperih M. Extension of the Wilcoxon—Mann—Whitney Test to Samples Censored at the Some Fixed Point. J. Amer. Statist. Ass., v. 55, N 289, 1960, pp. 125—138.

39. J. L. Gastwirth. Assymptotically most Powerful Rank Test for the two-sample problem with censored Data. Ann. Math. Statist., v. 36, N 4, 1965, pp. 1243—1247.

40. E. A. Gehan. A generalized Wilcoxon Test for Comparing Arbitrarity Synglycensored samples. Biometrika, v. 52, N 1, 1965, pp. 203—223.

41. Klotz J. Small sample Power and Efficiency for the one Sample Wilcoxon and Normal Scores Test. Ann. Math. Stat., v. 34, 1963, p. 624.

42. Kruskal W. H., Walles W. A. Use of Ranks in one-criterion Variance Analysis. J. Amer. Statist. Ass., v. 47, 1952, p. 583, v. 48, 1953, p. 907.

43. Andrews F. C., Asymptotic Behavior of some rank Tests for Analysis of Variance. Ann. Math. Stat., v. 25, 1954, N 4, p. 724.

44. Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В. Усталость легких конструкционных сплавов.: Машиностроение, 1973, с. 318.

45. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. О статистической обработке многократноцензурированной выборки при испытаниях на усталость. Зав. лаб. № 7, 1984, с. 145—148.

46. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Экономический аспект планирования усталостных испытаний образцов и элементов конструкций из легких сплавов. Зав. лабор., 1981, № 2, с. 73—75.

47. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности оценки квантили предела выносливости в связи с вариацией выборочных параметров уравнений кривых усталости. Зав. лаб., 1987, № 11, с. 73—76.

48. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности определения пределов ограниченной выносливости элементов конструкций из легких сплавов. Известия ВУЗов. Машиностроение, № 8, 1981, с. 21—24.

49. Когаев В. П. Методы статистической обработки результатов усталостных испытаний. Зав. лаб., 1957, № 5, с. 612—620.

50. Dixon W. T., Mood A. M. J. Amer. Statist. Ass., v. 43, 1948, p. 109.

51. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. Планирование усталостных испытаний, проведенных методом «вверх-вниз». Зав. лаб. № 10, 1981, с. 74—77.

52. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях методами «вверх-вниз» и «пробитов». Зав. лаб. № 1, 1990, с. 51—55.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. **РАЗРАБОТАНЫ**

Государственным комитетом РСФСР по делам науки и высшей школы

Академией наук СССР
Государственным комитетом СССР по управлению качеством продукции и стандартам

ВНЕСЕНЫ Государственным комитетом РСФСР по делам науки высшей школы

РАЗРАБОТЧИКИ

М. Н. Степнов, д-р техн. наук; **А. П. Гусенков**, чл.-кор. АН СССР; **В. Л. Соболев**, канд. техн. наук (руководители темы); **Л. В. Агамиров**, канд. техн. наук; **А. А. Фортунин**

2. **УТВЕРЖДЕНЫ И ВВЕДЕНЫ В ДЕЙСТВИЕ** Постановлением Государственного комитета СССР по управлению качеством продукции и стандартам от 27.06.91 № 1164

3. Срок проверки — 1997 г., периодичность проверки — 5 лет

4. Введены впервые

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения 1
2. Планирование прямых механических испытаний и статистическая обработка результатов измерений 2
3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов механических испытаний 36
4. Планирование и статистическая обработка результатов испытаний на усталость 72
Приложение 111
Список литературы 165
Информационные данные 168

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Расчеты и испытания на прочность в машиностроении

ПЛАНИРОВАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

РД 50—705—91

Редактор *Т. С. Шеко*
Технический редактор *Л. Я. Митрофанова*
Корректор *Е. И. Морозова*

Сдано в наб. 30.09.91 Подп. в печ. 15.01.92 Формат 60×84 1/16 Бумага типографская № 2 Печать высокая. Гарнитура литературная. Усл. п. л. 10,75. Усл. кр.-отт. 10,88. Уч.-изд. л. 9,85. Тир. 1820. Изд. № 1024/4 Цена 5 р.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 123557, Москва, ГСП, Новопресненский пер., 3.
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256. Зак. 1811

gost.e-ecolog.ru