ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КУМУЛЯТИВНЫХ СУММ

Основные положения

Издание официальное

БЗ 1—2002/364

ГОССТАНДАРТ РОССИИ
Москва

gost.e-ecolog.ru

Предисловие

1 РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 125 «Статистические методы в управлении качеством продукции»,

Открытым акционерным обществом «Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем» (АО «НИЦ КД»)

2 ПРИНЯТ И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Госстандарта России от 3 апреля 2002 г. № 124-ст

3 Настоящий стандарт разработан на основе международного технического отчета ИСО/ТО 7871—97 «Контрольные карты кумулятивных сумм. Руководство по управлению качеством и анализу данных с помощью метода кумулятивных сумм»

4 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

© ИПК Издательство стандартов, 2002

Настоящий стандарт не может быть полностью или частично воспроизведен, тиражирован и распространен в качестве официального издания без разрешения Госстандарта России

Содержание

1 Область применения 1
2 Нормативные ссылки 1
3 Определения, обозначения и сокращения 1
4 Основные положения 2
5 Построение КУСУМ-карты 3
6 Правила принятия решений при мониторинге и управлении процессом 5
7 Правила принятия решения для анализа предыдущих данных 6
8 Выполнение процедуры КУСУМ с помощью табличных данных 7
Приложение А Масштабирование контрольной карты кумулятивных сумм 8
Приложение Б Вычисление локальных средних 9
Приложение В Пример работы с усеченной V-маской 11
Приложение Г Локальные разрешающие линии 13
Приложение Д Библиография 14

Введение

Контрольная карта кумулятивных сумм (далее КУСУМ-карта) — информативное графическое представление данных, которые упорядочены в логической последовательности. Для расчета значений кумулятивных сумм используют случайные переменные или их функции. Часто их порядок соответствует порядку проведения наблюдений во времени.

КУСУМ-карта предназначена для проверки процесса на отклонение чаще всего от среднего арифметического значения (далее — среднего), равного некоторому опорному значению. Опорное значение часто называют целевым значением или целью. Для более сложных процедур КУСУМ эти два понятия — целевое и опорное значения следует различать. Из каждого полученного значения показателя качества вычитают опорное значение и получают значения кумулятивных сумм этих разностей, которые наносят на карту.

На такой карте интерес представляют не абсолютные значения сумм, а угол наклона графика, определяемый по последовательным точкам. Именно угол наклона так называемых «локальных средних» служит мерой изменения случайной величины. Если локальное среднее серии наблюдений более целевого значения, то кривая наклонена вверх, если менее — вниз. Чем больше угол наклона линии, представляющей локальное среднее по отношению к целевому значению, тем больше отклонение данных от опорного значения.

КУСУМ-карты являются одним из распространенных статистических методов обнаружения изменения показателя качества и установления причин этого изменения.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ КУМУЛЯТИВНЫХ СУММ

Основные положения

Statistical methods. Cumulative sum control charts. General aspects

Дата введения 2003—01—01

1 Область применения

Настоящий стандарт устанавливает основные принципы применения контрольных карт кумулятивных сумм (далее — КУСУМ-карт), методы их построения, а также основные правила принятия решений.

Настоящий стандарт предназначен для управляющих на уровне цеха и служб управления качеством, технологов и мастеров, разрабатывающих конкретные процедуры и КУСУМ-карты с целью детального анализа и управления процессами на основе выбранных статистик.

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ Р 50779.10—2000 (ИСО 3534-1—93) Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения

ГОСТ Р 50779.11—2000 (ИСО 3534-2—93) Статистические методы. Статистическое управление качеством. Термины и определения

ГОСТ Р 50779.21—96 Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение

ГОСТ Р 50779.40—96 (ИСО 7870—93) Статистические методы. Контрольные карты. Общее руководство и введение

ГОСТ Р 50779.41—96 (ИСО 7873—93) Статистические методы. Контрольные карты для арифметического среднего с предупреждающими границами

ГОСТ Р 50779.42—99 (ИСО 8258—91) Статистические методы. Контрольные карты Шухарта

ГОСТ Р 50779.70—99 (ИСО 2859-0—95) Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по альтернативному признаку. Часть 0. Введение в систему выборочного контроля по альтернативному признаку на основе приемлемого уровня качества AQL

ГОСТ Р 50779.71—99 (ИСО 2859-1—89) Статистические методы. Процедуры выборочного контроля по альтернативному признаку. Часть 1. Планы выборочного контроля последовательных партий на основе приемлемого уровня качества AQL

ГОСТ Р 51814.3—2001 Системы качества в автомобилестроении. Методы статистического управления процессами

3 Определения, обозначения и сокращения

3.1 В настоящем стандарте применяются термины с соответствующими определениями по ГОСТ Р 50779.10, ГОСТ Р 50779.11.

3.2 В настоящем стандарте применяются следующие обозначения и сокращения:

i — текущий номер наблюдений; $i = 0,1,2, \ldots$;

A — масштаб вертикальной оси; $A = \alpha\hat{\sigma}$;

Издание официальное

α — коэффициент масштаба;

σ — стандартное отклонение;

$\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения;

y_r — наблюдаемая переменная (показатель качества); $r = 1, \ldots, i$;

C_i — кумулятивная сумма;

$\overline{Y}$ — среднее арифметическое;

T — опорное (эталонное) значение;

f — коэффициент наклона (тангенс угла наклона разрешающей линии по отношению к горизонтальной оси на КУСУМ-карте);

H — интервал решений;

d — число выборочных интервалов;

s — выборочное стандартное отклонение;

V_{max} — максимальная высота в критерии «перекрытий»;

ARL — средняя длина серии (выборок);

AQL — приемлемый уровень качества.

4 Основные положения

4.1 Метод кумулятивных сумм служит визуальным средством обнаружения изменения показателя качества и последующего установления причин этого изменения.

4.2 Основные требования по применению КУСУМ-карт следующие:

а) результаты наблюдения должны быть получены в такой форме, чтобы любая численная разность между двумя значениями переменной имела одинаковую размерность по всему диапазону данного показателя;

б) последовательность точек на карте должна подчиняться логике, основанной на нормальной работе процесса. Наблюдения могут быть проведены последовательно во времени или в порядке поступления единиц продукции, образуя естественную последовательность, например наблюдение за показателем качества продукции или управлением процесса, а также упорядочены согласно значениям некоторой вспомогательной переменной. Тогда КУСУМ-карта — это метод исследования соотношений между значениями переменных.

4.3 Требования к данным

4.3.1 КУСУМ-карты строят, используя два основных типа данных: количественные и альтернативные (ГОСТ Р 50779.40; ГОСТ Р 50779.42).

Количественные данные — это результат наблюдений, проводимых с помощью измерения и записи численных значений данного показателя качества, рассматриваемых единиц выборки, что предполагает некоторую непрерывную шкалу для этого показателя.

Альтернативные данные — это результаты наблюдений наличия (или отсутствия) определенного признака или атрибута для каждой рассматриваемой единицы выборки и подсчета числа единиц выборки, имеющих (или не имеющих) данный признак, или числа таких признаков, имеющихся в единице продукции, группе, на данной площади, в данном объеме или выборке.

Примечание — КУСУМ-карты на практике в основном применяют для количественных данных.

4.3.2 Данные, наносимые на карту, должны соответствовать требованиям перечислений а) и б) пункта 4.2.

Для работы с КУСУМ-картой используют кумулятивные (накопленные) суммы случайной переменной или функции случайной переменной, начиная с некоторого момента времени либо какого-то события. Статистиками, значения которых накапливают, например могут быть:

1) значение переменной (показателя качества);

2) разность между измеренным значением переменной и ее математическим ожиданием;

3) разность между измеренным значением переменной и некоторым целевым или опорным значением;

4) последовательные разности между значениями переменной или абсолютные значения разностей;

5) выборочное среднее;

6) размах выборки.

При применении КУСУМ-карты как средства реального представления данных необязательно указывать распределение вероятностей и требовать независимости между последовательными на-

блюдениями. Эти условия важны для принятия решений, но не для представления данных. КУСУМ-карта может помочь в выявлении свойств распределения вероятностей, таких как корреляция в серии или цикличное поведение.

4.4 Цель построения контрольной карты

При построении контрольной карты следует определить цель. На основе этого можно осуществлять мониторинг и проводить анализ предыдущих данных процесса:

а) при мониторинге: целью построения контрольной карты может быть отслеживание поведения серии наблюдений относительно некоторого установленного или стандартного опорного значения, как при процедурах управления качеством. При этом каждый раз средние уровни всех рассматриваемых интервалов сравнивают с опорным значением. Правила принятия решения при мониторинге приведены в разделе 6;

б) при анализе предыдущих данных: целью построения контрольной карты может быть изучение накопленных данных в результате наблюдений, сгруппированных некоторым логическим образом, для обнаружения любых различий между группами точек. При этом рассматривают различия между соседними интервалами, которые могут служить предварительными данными для определения последующих интервалов; формального стандартного или опорного значения здесь нет. В основном, базой для выбора интервалов и оценивания точек, в которых происходят изменения, является вид самой КУСУМ-карты.

4.5 Правила принятия решений применяют в зависимости от установленной цели, они основаны на:

- простом принятии решений, основанном на логике при визуальном контроле (по графику или по табличным данным);
- выборе интервала решения с использованием такой характеристики, как средняя длина серии выборок (ARL);
- масках (полной V-маски, усеченной V-маски, параллельной маски и других);
- критерии «перекрытий», основанном на построении на КУСУМ-карте.

Подробное изложение правил принятия решений приведено в [1] — [4].

5 Построение КУСУМ-карты

5.1 Вычисление значений кумулятивных сумм

Значения кумулятивных сумм C_i откладывают на оси ординат в зависимости от текущего номера наблюдений i, который принимает последовательные целые значения $i = 0, 1, 2, \ldots$ (0 — начало координат). Устанавливают масштаб A вертикальной оси; по горизонтальной оси один интервал соответствует значению A по шкале кумулятивных сумм (КУСУМ). Этот масштаб может быть выражен как кратное оценки стандартного отклонения наносимых значений $\hat{\sigma}$, тогда $A = \alpha\hat{\sigma}$,

где α — коэффициент масштаба в соответствии с приложением А,

$\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения σ (определяется по ГОСТ Р 50779.42).

Каждое последующее наблюдение приводит к разности значения наблюдаемой переменной и опорного значения. Значения разностей суммируют, образуя кумулятивные суммы C_i по формуле

$$C_i = \sum_{r=1}^{i} (y_r - T), \qquad (1)$$

где y_r — значение наблюдаемой переменной;

T — опорное (или целевое) значение;

i — номер выборки.

Примечания

1 Кумулятивные суммы C_r могут быть рассчитаны и другими способами, в зависимости от того, какая выбрана статистика:

а) для разности абсолютного значения отклонения и его математического ожидания E (за опорное значение T здесь принято среднее арифметическое значение наблюдаемых переменных $\overline{Y}$) по формуле

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} \left[\left| y_r - \overline{Y} \right| - E \left\{ \left| y_r - \overline{Y} \right| \right\} \right]; \qquad (2)$$

б) для последовательных разностей по формуле

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} (y_r - y_{r-1}); \quad (3)$$

в) для отклонений абсолютного значения последовательных разностей от его математического ожидания по формуле

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} [\,|\,(y_r - y_{r-1})\,| - E\{\,|\,(y_r - y_{r-1})|\,\}\,]; \quad (4)$$

г) для отклонений размаха R_r двух последовательных пар наблюдений от его математического ожидания $E\{R_r\}$ по формуле

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} [R_r - E\{R_r\}]. \quad (5)$$

Способы расчета кумулятивных сумм приведены в [2].

2 Иногда опорное значение T называют эталонным.

5.2 Выбор опорного значения

Опорное значение T устанавливают в зависимости от конкретной ситуации и от типа данных, с которыми необходимо работать:

1) При управлении процессом. Во многих случаях T — установленная цель или целевой уровень показателя качества. На основе КУСУМ-карты получают информацию о неточной настройке процесса на T. Иногда в качестве T выбирают не целевое значение, а средний уровень показателя качества, рассчитанный по предыдущей серии данных, полученной при работе стабильного процесса.

2) При анализе предыдущих данных. При анализе серии накопленных данных целью является среднее арифметическое всей серии. Такой выбор T приведет кривую КУСУМ к виду, когда начало и конец графика будут иметь одно и то же значение ординат.

3) При планировании экспериментов. Двоичные данные последовательности, кодируемые числами 0 и 1, требуют надлежащего оценивания доли откликов с кодом 1. Эту долю затем используют как целевое значение. Можно использовать общую долю для всего эксперимента или в случае последовательных экспериментов с двоичным откликом цель можно устанавливать на долю, рассчитанную по первому интервалу эксперимента. Позднее ее можно изменить, если она окажется неподходящей.

4) При выборочном приемочном контроле, например при контроле по альтернативному признаку, в качестве целевого значения можно использовать долю несоответствующих единиц продукции в выборке или приемлемый уровень качества AQL. Значения AQL устанавливают в нормативных документах или в контракте (ГОСТ Р 50779.70; ГОСТ Р 50779.71). Целевое или опорное значение в этом случае — AQL.

5.3 Меры вариации

Основная статистическая мера вариации — выборочное стандартное отклонение s (оценка σ). Для масштабирования карты и создания базы для критериев значимости необходима мера собственной кратковременной вариации в серии. Оценка и расчет выборочного стандартного отклонения s приведены в ГОСТ Р 50779.21.

Если такая мера вариации, как оценка выборочного стандартного отклонения не подходит из-за характера производственного процесса или выборочной процедуры, то вариацию можно оценить с помощью такой статистики, как размах выборки (ГОСТ Р 5077.42, ГОСТ Р 51814.3).

5.4 Предварительные шаги при построении КУСУМ-карты

При построении КУСУМ-карты необходимо сделать следующие предварительные шаги:

1) В зависимости от задачи выбрать надлежащее опорное или целевое значение из приведенных ниже:

а) центр поля допуска;

б) удовлетворительный уровень работоспособности процесса, который с разумной вероятностью может быть достигнут;

в) средний уровень процесса за предыдущий или типичный период времени или интервал;

г) средний уровень всей серии результатов измерений переменной, когда предусмотрен анализ предыдущих данных.

Обоснование выбора опорного или целевого значения приведено в [3].

2) Выбрать подходящую меру вариации.

3) Выбрать масштаб шкалы (приложение А).

4) Обучить персонал работе с КУСУМ-картой.

5.5 Необходимая информация

КУСУМ-карта должна содержать следующую необходимую информацию:

а) целевое значение (которое может сопровождаться кратким указанием причин его выбора, например установленное среднее арифметическое значение);

б) стандартное отклонение значений переменной (которое может сопровождаться комментариями по методу его оценки);

в) характер наблюдений (исходные значения, выборочные средние, число несоответствий и т.п.);

г) наименование, указывающее назначение карты (например «КУСУМ-карта для управления...» или «КУСУМ-карта для анализа предыдущих данных...»);

д) обозначение осей;

е) возникающие или вносимые изменения при работе процесса. Они могут быть помечены в соответствующих точках шкалы выборочных интервалов *i* для анализа кривой КУСУМ. Например, новая партия материала для производственного процесса, смена персонала или изменение методов работы.

5.6 Выбор начальной точки для построения КУСУМ-карты

В большинстве случаев для построения карты за начальную точку рекомендуется брать нуль с возможностью нанесения положительных и отрицательных значений КУСУМ. Выбор начальной точки не влияет на последующий анализ данных. Если предпочтительны неотрицательные значения, кривую можно начать строить с подходящего положительного значения. Например, когда контрольная карта продолжает предыдущую или кривая КУСУМ выходит за верхнюю или нижнюю границы карты, рекомендуют начать новую карту (или интервал) со значения, соответствующего общему уровню процесса перед окончанием ведения предыдущей карты (или интервала).

5.7 Вычисление локальных средних проводят в соответствии с приложением Б.

6 Правила принятия решений при мониторинге и управлении процессом

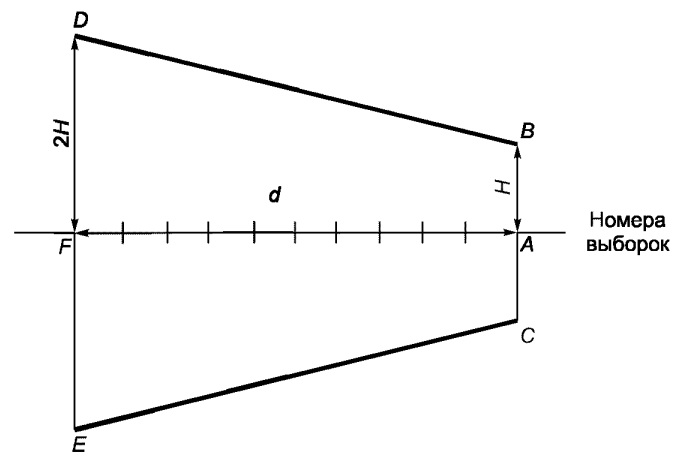
6.1 При мониторинге и управлении процессом процедура КУСУМ помогает решать две задачи:

- обнаружение значимых сдвигов (изменений) процесса от целевого уровня;
- определение точек их возникновения.

6.2 Правила принятия решений

Основное правило принятия решений заключается в построении на КУСУМ-карте V-маски и определении значимых изменений при выходе точек кривой КУСУМ за линии V-маски. Существуют три различных формы масок, они идентичны по принципу построения и действию: полная V-маска, усеченная V-маска и параллельная маска. Наиболее распространенная из них — усеченная V-маска.

Схематическое изображение усеченной V-маски или шаблона V-маски приведено на рисунке 1. Отрезки *AB* и *AC* называют интервалами решений и обозначают *H*, а линии *BD*, *CE* — разрешающими линиями.



Обозначения:
$H = AB = AC = 5\hat{\sigma}$ — интервалы решений;
$2H = DF = FE = 10\hat{\sigma}$;
$d = 10$ — число выборочных интервалов;
CE и *BD* — разрешающие линии

Рисунок 1 — Шаблон усеченной V-маски

Для удобства работы на местах с КУСУМ-картой применяют шаблон V-маски, который можно сделать из прозрачного пластика, плотной бумаги или пленки. На практике для построения шаблона от оси AF, проходящей параллельно горизонтальной оси КУСУМ-карты, откладывают отрезки $H = AB = AC = 5\hat{\sigma}$, перпендикулярно AF. На расстоянии $d = 10$ выборочных интервалов влево от точки A перпендикулярно оси AF откладывают отрезки $FD = FE = 10\hat{\sigma}$. Значения $5\hat{\sigma}$ и $10\hat{\sigma}$ могут быть вычислены на основе значений $\hat{\sigma}$ и масштабного множителя. Пояснения по выбору масштаба приведены в приложении А. Шаблон применяют, помещая опорную точку A на любую нанесенную точку на контрольной карте. Рекомендуется выбирать последнюю нанесенную на карту точку, но это может быть и точка в любом предыдущем интервале. Если какая-либо из предшествовавших точек окажется вне наклонных разрешающих линий BD и CE (или их продолжений), то это сигнал о значимом отклонении процесса от целевого значения. Если вся кривая КУСУМ находится между лучами, то существенного сдвига нет.

Пример работы с усеченной V-маской приведен в приложении В.

Расчет и построение локальных разрешающих линий изложены в приложении Б.

6.3 Чтобы определить эффективность процедур принятия решений на основе V-масок, необходимо рассмотреть такую характеристику, как среднее число серии выборок (ARL). ARL — является случайной величиной и характеризует среднее число выборок, на основе которого принимается решение о корректировке процесса при одном и том же среднем значении контролируемого параметра процесса (ГОСТ Р 50779.41). Если не возникает реального изменения процесса, ARL должна быть большой и характеризовать среднее число сотен выборок, так как любые сигналы о выходе процесса из статистически управляемого состояния будут тогда ложными тревогами. Если возникает большой сдвиг от цели, рекомендуют назначать величину ARL малой для быстрого обнаружения изменения состояния процесса. Взаимосвязь правил принятия решений и величины отклонения контролируемого параметра от цели можно представить кривой средней длины серии выборок, дающей возможность сравнения правил принятия решений аналогично оперативной характеристике для процедур выборочного контроля (ГОСТ Р 50779.70; ГОСТ Р 50779.71).

Примечание — Иногда вместо ARL применяют другие характеристики, например такие, как мода или медиана длины серии выборок.

Когда действительное состояние процесса неудовлетворительно, правило принятия решения должно давать как можно более ранний сигнал об изменении процесса, то есть ARL должно быть малое, и наоборот.

Например:

Действительное состояние процесса	**Сигнал КУСУМ-карты**
На цели или около нее	Большое ARL (мало ложных тревог)
Существенное отклонение от цели	Малое ARL (быстрое обнаружение)

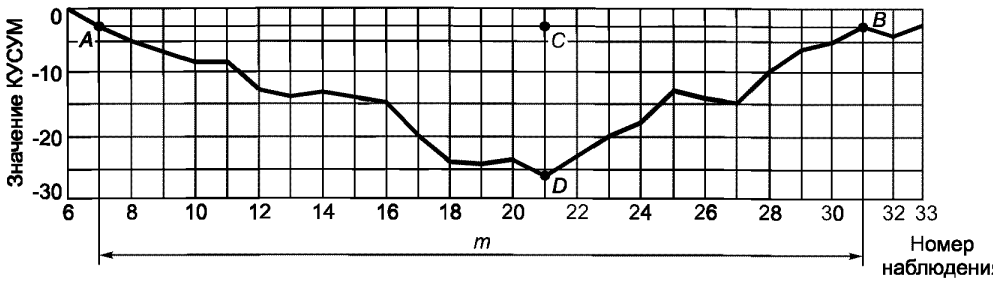
При сравнении поведения ARL КУСУМ-карт и контрольных карт Шухарта ARL КУСУМ-карт более эффективны, а именно: ARL имеют большие значения для процесса, находящегося на цели, и малые значения при значительном сдвиге процесса от цели — при значении $1{,}0\hat{\sigma}$. Сравнительный анализ КУСУМ-карт и контрольных карт Шухарта приведен в [4].

7 Правила принятия решения для анализа предыдущих данных

7.1 При анализе данных, полученных при проведении длинных серий наблюдений, могут быть применены несколько критериев по оценке различия данных между последовательными интервалами. Одни из них — критерий «перекрытия».

При рассмотрении КУСУМ-карты и анализе возможных точек изменения среднего уровня контролируемой переменной основой разбиения на интервалы являются локальные максимумы и минимумы кривой. Критерий оценки значимости такого изменения — максимальная степень отклонения кривой КУСУМ от прямой, соединяющей крайние точки графика на интервале выборок, в котором подозревается изменение.

Для КУСУМ-карты максимальную высоту V_{max}, нормированную делением на стандартное отклонение, определяют с помощью построения хорды AB (см. рисунок 2), соединяющей точки графика в концах последовательности значений КУСУМ, и измерением максимального вертикального расстояния CD от подозреваемой точки на графике до хорды. Этот максимум возникнет в



Обозначение:
$CD = V_{max}$;
m — интервал выборок

Рисунок 2 — Применение критерия «перекрытий» к КУСУМ-карте (данные из таблицы В.1 приложения В)

видимой точке перегиба кривой (в максимуме или минимуме) или в точке, где наклон становится круче или сглаживается. Такие точки на графике называют «углами».

Если доступны исходные данные при вычислении КУСУМ, максимальную высоту V_{max} можно вычислить по формуле

$$V_{max} = C_r - C_i - \frac{r-i}{j-i}(C_j - C_i), \quad m = j - i, \tag{6}$$

где r — номер выборки, соответствующей точке возможного изменения в последовательности от $i + 1$ до j (то есть i, r и j — последовательные «углы» КУСУМ-карты);

C_r, C_i, C_j, — значения кумулятивных сумм в соответствующих точках r, i, j возможного перегиба кривой КУСУМ;

m — интервал выборки; $m = j - i$.

Анализ превышения значения V_{max} над перекрытием можно проводить непосредственным измерением по карте, с помощью номограммы и подсчета вероятности превышения V_{max} над перекрытием в соответствии с [1].

8 Выполнение процедуры КУСУМ с помощью табличных данных

В случае, если целью процедуры КУСУМ является обнаружение нестандартных состояний без представления графической зависимости последовательных данных, то значения каждой точки последовательности (во времени) можно представить в табличной форме. В этом случае численное правило принятия решений заменяет правило принятия решений на основе усеченной V-маски, как указано в [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)

Масштабирование контрольной карты кумулятивных сумм

А.1 Соотношение между шкалами КУСУМ-карты, то есть значениями КУСУМ и номерами выборок определяет вид контрольной карты. Слишком широкое деление шкалы КУСУМ даст кривую в виде пилы, на которой будет трудно обнаружить мелкие изменения, а большие сдвиги среднего быстро выведут кривую за пределы графика. Слишком узкое деление шкалы подавит малые вариации, но может также подавить реальные изменения среднего арифметического измеряемых данных.

Широко применяют соотношение размера единицы шкалы КУСУМ примерно в $2\hat{\sigma}$ на один интервал выборки, то есть масштаб $A = 2\hat{\sigma}$. Это соотношение можно применять в следующих трех случаях, приведенных в А.2, А.3, А.4.

А.2 Выбирают удобный интервал шкалы для номеров выборок. Например, расстояние между выборками с номерами i и $i + 1$; $i + 1$ и $i + 2$ и так далее 5 мм для настольной контрольной карты (1—2 см — для настенной).

Интервал по шкале КУСУМ выбирают примерно $2\hat{\sigma}$ единиц измеряемой переменной. При десятичной сетке предпочтительно округлить $2\hat{\sigma}$ до одного из целых чисел 1,0, 2,0, 4,0, 5,0 или другого кратного им. Если $2\hat{\sigma}$ оказалось посредине между принятыми числами, предпочтительно меньшее. Если $2\hat{\sigma}$ соответствует 10 мм между номерами выборок по шкале i, надо взять 10 мм = 5 единиц шкалы КУСУМ (а не 10 мм = 10 единиц шкалы КУСУМ).

А.3 Выбирают удобную шкалу КУСУМ и затем принимают расстояние $2\hat{\sigma}$ за единицу шкалы i на один интервал выборки.

Это дает небольшое преимущество сохранения точного соотношения $2\hat{\sigma}$. Например, изменение от горизонтального участка кривой КУСУМ к участку под углом 45° представит сдвиг среднего на 2σ единиц. При этом некоторые принимаемые решения на основе КУСУМ-карты можно интерпретировать в углах (или их тангенсах).

А.4 Если для сравнения контрольных карт кумулятивных сумм двух или нескольких переменных при той же последовательности измеряемых переменных желательны одинаковые коэффициенты шкал и равенство шкалы i, то можно применять приведенную КУСУМ-карту. В этом случае вместо формулы $C_i = \sum_{r=1}^{i} (y_r - T)$ применяют формулу, в которой отклонения от цели делят на оценку стандартного отклонения $\hat{\sigma}$:

$$C_i = \frac{\sum_{r=1}^{i} (y_r - T)}{\hat{\sigma}}. \qquad (A.1)$$

Эта процедура устанавливает $\hat{\sigma} = 1$,и единица шкалы i соответствует двум единицам шкалы КУСУМ. В этом случае можно сравнивать разные контрольные карты наложением или совмещением.

Недостаток данной процедуры — потеря прямого контакта с рассматриваемой переменной. Кроме того, операция по приведению значений переменных в нужный масштаб может привести к дополнительным трудностям.

А.5 При выборе коэффициента шкалы вид округления может влиять на выбор обоих коэффициентов шкал и сетки графика. Например, измерения в часах, месяцах, дюймах удобнее строить на сетке, поделенной на 12 частей, а не на 10.

А.6 Двоичные данные или счет событий, содержащие нули

Процедура КУСУМ подходит и для счетных (альтернативных) данных, но при масштабировании могут возникнуть трудности, когда данные двоичны (0 — отказ и 1 — успех) или содержат много нулей (при контроле выборок на наличие несоответствующих единиц при хорошем качестве партий продукции). Эти трудности могут быть устранены выбором интервала между точками выборок на горизонтальной оси КУСУМ-карты.

Нужна соответствующая классификация ожидаемой доли p успехов или отказов (что из них реже) с баллом 1. В случае счета событий следует оценивать среднее число событий (успехов или отказов) на выборку. Если оно больше единицы, особого масштабирования не требуется и принимается обычное соотношение $2\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения числа событий на выборку.

Для двоичного счета или счета событий, появление которых в среднем меньше единицы на выборку:

а) вычисляют среднее число выборок, необходимых для появления одного события или балла 1;

б) округляют это значение до верхнего удобного для построения целого и принимают за горизонтальный интервал КУСУМ-карты. При малых p или низкой частоте событий интервал между отдельными выборками может стать очень малым, однако отдельные выборки содержат мало информации;

в) размечают вертикальную шкалу КУСУМ-карты в интервалах той же длины, что и горизонтальную, помечают последовательные четные целые значения выше и ниже нуля;

г) значения КУСУМ рассчитываются по формулам:

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} (y_r - p) \text{ — для двоичных данных,} \qquad (A.2)$$

где p — частота назначения балла 1;

y_r — событие, $r = 1, \ldots, i$;

i — интервал

или

$$C_r = \sum_{r=1}^{i} (y_r - \mu) \text{ — для малого числа событий,} \qquad (A.3)$$

где μ — среднее число событий на выборку.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(обязательное)

Вычисление локальных средних

Б.1 Достоинства КУСУМ-карты — наглядность происходящих изменений среднего уровня процесса, представленного изменениями наклона кривой, и возможность вычисления локальных средних по любую сторону от точки предполагаемого изменения, что достигается без пересчета исходных данных.

Б.2 Простой способ приближенного оценивания локальных средних — помещение на карту транспортира. Любой наклон кривой КУСУМ можно сравнить с транспортиром и определить наклон среднего уровня.

Транспортир (см. рисунок Б.1) содержит веер линий под углами, соответствующими наклонам кривой КУСУМ для гипотетических значений средних уровней. При построении этих линий учитывают, что для каждого среднего уровня $\overline{Y}$ кривая КУСУМ будет иметь средний наклон в ($\overline{Y}$ — T) единиц КУСУМ на выборочный интервал. Для выбора необходимых значений $\overline{Y}$ часто достаточен диапазон $T \pm 2\sigma$ с разбивкой шкалы по $0{,}25\hat{\sigma}$ или $0{,}5\hat{\sigma}$.

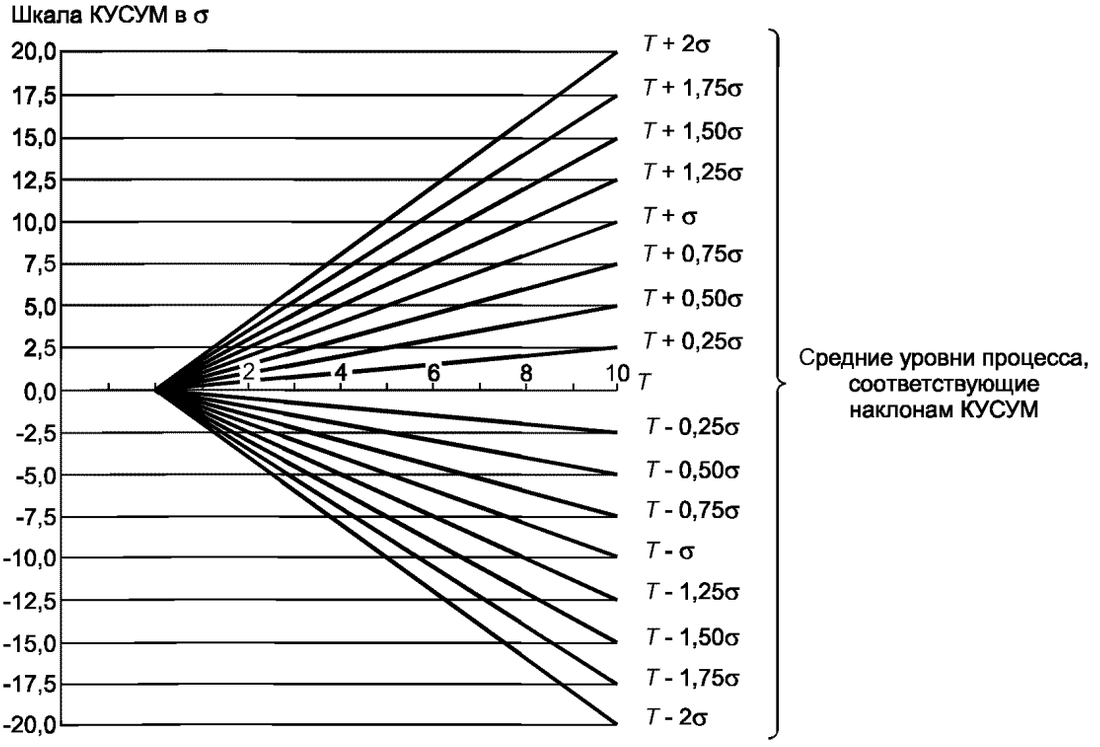


Рисунок Б.1 — Построение транспортира КУСУМ (указателя наклона) (для ясности показана нетипично крупная шкала)

Для построения транспортира проводят горизонтальную линию, параллельную оси абсцисс i, представляющую средний уровень (опорное значение) T. Длина линии соответствует 10 выборочным интервалам. Для каждого выбранного $\overline{Y}$ отмечают пару точек, которые расположены на 10 ($\overline{Y} - T$) единиц КУСУМ справа выше и ниже линии, выбранной за опорную. Соединяют каждую правую точку с левым концом опорной линии и получают веер линий.

Примечание — При применении транспортира для оценивания локальных средних значений полезны кусок прозрачного материала или параллельно перемещающаяся линейка. Сам транспортир можно выполнить на прозрачном материале и накладывать на интересующий интервал КУСУМ-карты.

Б.3 Более точную оценку локального среднего можно получить по численным значениям КУСУМ в двух точках последовательности. Эти значения считывают с контрольной карты или берут прямо из вычисленных табличных значений КУСУМ, если они доступны.

Первый шаг — определение интервала, на котором требуется вычислить среднее. Например, среднее за неделю или месяц для отчетности или за определенный интервал времени может указать на изменение условий в работе. В других случаях КУСУМ-карта может выявить точки возможного изменения как точки изменения наклона кривой КУСУМ («углы»).

Первый и последний номера выборок в требуемом интервале обозначают $i + 1$ и j. Тогда выборка с номером i — последняя точка предыдущего интервала или 0 (для первого интервала). Любое изменение КУСУМ от C_i и C_{i+1} вызвано вкладом y_{i+1} — первой точки рассматриваемого интервала, поэтому необходимы два значения КУСУМ — C_i и C_j.

Б.4 Среднее отклонение от опорного значения за интервал, то есть средний вклад значений выборки в КУСУМ, представляет собой изменение КУСУМ от C_i до C_j, деленное на число значений в интервале.

Действительный средний уровень процесса $y_{i+1, j}$ для интервала получают прибавлением опорного значения к среднему вкладу значений выборки в КУСУМ по формуле

$$\bar{y}_{i+1, j} = T + \frac{C_j - C_i}{j - i}, \qquad (Б.1)$$

где T — средний уровень процесса или опорное значение;

C_i, C_j — значения кумулятивных сумм в точках i, j соответственно;

i, j — номера выборок.

КУСУМ-карта содержит всю требуемую информацию для этой оценки и не надо обращаться к исходным данным, если вид КУСУМ-карты не указывает на выброс особых значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(справочное)

Пример работы с усеченной V-маской

В.1 Отдельные наблюдения были получены в указанном в таблице В.1 порядке, для которых установлено опорное значение T, равное 15.

Таблица В.1 — Данные для построения КУСУМ-карты

Номер наблюдения*	Полученное значение	Отклонение от опорного значения T, равного 15	Кумулятивная сумма отклонений	Номер наблюдения*	Полученное значение	Отклонение от опорного значения T, равного 15	Кумулятивная сумма отклонений
1	12	—3	—3	18	12	—3	—22
2	17	+2	—1	19	13	—2	—24
3	14	—1	—2	20	16	+1	—23
4	14	—1	—3	21	12	—3	—26
5	17	+2	—1	22	18	+3	—23
6	16	+1	0	23	18	+3	—20
7	14	—1	—1	24	17	+2	—18
8	11	—4	—5	25	20	+5	—13
9	13	—2	—7	26	15	0	—13
10	14	—1	—8	27	14	—1	—14
11	15	0	—8	28	18	+3	—11
12	11	—4	—12	29	20	+5	—6
13	14	—1	—13	30	16	+1	—5
14	16	+1	—12	31	18	+3	—2
15	13	—2	—14	32	14	—1	—3
16	14	—1	—15	33	16	+1	—2
17	11	—4	—19				

* Под наблюдением понимают любое значение характеристики выборки (см. 4.3.2 настоящего стандарта).

Для обычной контрольной карты значения, полученные в результате наблюдений, строят в зависимости от их порядковых номеров. Но из таблицы В.1 видно, что последние двенадцать значений (графа 2) сгруппированы около другого среднего уровня, чем первые двадцать.

КУСУМ-карта дает более ясное представление о поведении данных, чем обычная контрольная карта Шухарта. Значения КУСУМ (графа 4) наносят на карту в зависимости от номеров наблюдений, причем по вертикальной оси y откладывают значения КУСУМ, а по горизонтальной оси x — номера наблюдений (см. рисунок В.1).

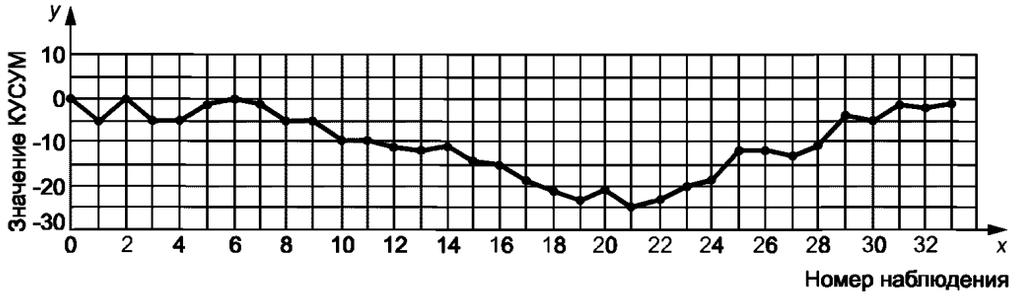


Рисунок В.1 — КУСУМ-карта для данных таблицы В.1 ($T = 15$)

КУСУМ-карту можно разделить на 3 части. Кривая КУСУМ параллельна оси x — то есть является горизонтальной для наблюдений 1—7 (включительно). Кривая идет вниз для наблюдений 8—21 несмотря на локальные выбросы в точках 14, 20. Кривая идет вверх (так же с локальными выбросами) для наблюдений 22—23.

Можно сделать следующие выводы:

а) наблюдения 1—7 представляют выборку из совокупности со средним $T = 15$;

б) наблюдения 8—21 представляют выборку из совокупности, среднее которой менее 15;

в) наблюдения 22—33 представляют выборку из совокупности, среднее которой более 15.

В.2 На рисунках В.2 и В.3 представлен шаблон усеченной V-маски, примененный в двух точках карты для данных таблицы В.1 и рисунка В.1. Значение $\hat{\sigma}$ предполагают равным 2,0. При наложении шаблона на номер 16 эта кривая остается между лучами, и интервал между номерами наблюдений 8 и 16 существенно не отличается от опорного значения 15 (см. рисунок В.2). При наложении шаблона на номер 18 кривая касается верхней разрешающей линии, указывая, что к этому времени имеется достаточно информации о сдвиге от опорного значения вниз (см. рисунок В.3).

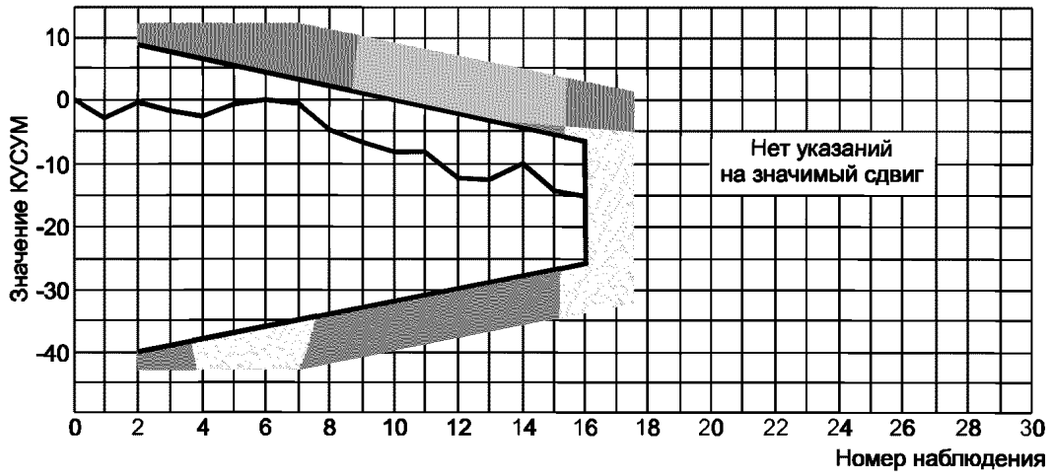


Рисунок В.2 — Шаблон усеченной V-маски, наложенный на КУСУМ-карту (нет указаний на значимый сдвиг при $T = 15$, $\hat{\sigma} = 2{,}0$)

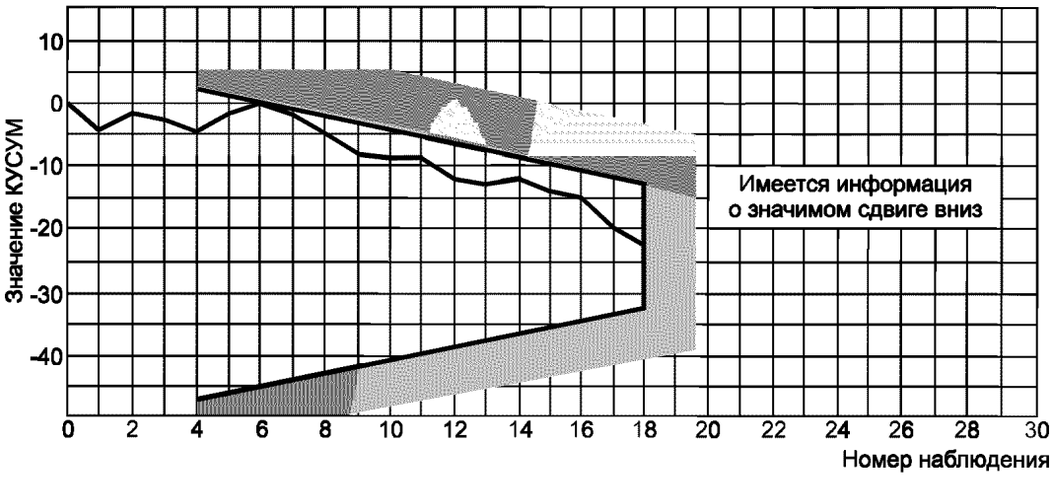


Рисунок В.3 — Шаблон усеченной V-маски, наложенный на КУСУМ-карту (имеется указание на значимый сдвиг при $T = 15$, $\hat{\sigma} = 2$)

Необходимы следующие пояснения к рисунку В.3:

а) верхняя разрешающая линия касается кривой с номерами наблюдений 6 и 7, что считается нарушением и дается сигнал о значимом сдвиге;

б) в точке касания разрешающей линии необходимо принять решение о продлении луча шаблона усеченной V-маски;

в) если шаблон усеченной V-маски передвинуть к любому номеру ранее точки 18, то сигнала не будет. Если же этот шаблон наложить на контрольную карту между номерами наблюдений 18 и 21 (конец нисходящего интервала), то будет отмечен значимый сдвиг вниз. Повторное применение шаблона усеченной V-маски не отменяет предыдущий сигнал;

г) сигнал возникает при номере наблюдения 18. Для этой точки получено достаточно информации, подтверждающей вывод об изменении среднего, но изменение предположительно произошло несколько ранее. Анализ КУСУМ-карты показывает, что первыми наблюдениями, в которых среднее сместилось от цели, были точки 7 и 8;

д) аналогичное применение шаблона усеченной V-маски далее выявляет изменение направления кривой по отношению к нижнему лучу, указывающее на сдвиг вверх к 29-й точке наблюдения;

е) в случае управления (корректировки) процесса после нанесения номера наблюдения 18 и получения сигнала при наложении шаблона следует провести управляющее действие. Для определения правильной регулировки, рекомендуется провести оценку нового среднего уровня $\bar{y}$ по формуле (Б.1):

$$C_{18} = -22,\ C_6 = 0;$$

$$\bar{y} = 15 + \frac{-22 - 0}{18 - 6} = 13{,}16.$$

Если действия по управлению отложены или неэффективны, то в случае необходимости эту оценку можно пересчитать на более поздней стадии.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
(обязательное)

Локальные разрешающие линии

Г.1 Существуют два метода применения правила принятия решения. Один метод — с применением табличных данных КУСУМ. Этот метод не предусматривает использования контрольной карты. Другой метод — с построением локальных разрешающих линий на контрольной карте. Этот метод применяют для принятия решения независимо от места появления возможного изменения. Последний метод имеет следующие преимущества: во-первых, нет необходимости строить постоянную V-маску; во-вторых, разрешающую линию можно проводить, когда наклон кривой КУСУМ подсказывает, что возможен сдвиг среднего уровня процесса. Решение не принимают, пока разрешающая линия не коснется или не пересечет кривую КУСУМ, но когда кривая КУСУМ приближается к линии решения, то можно сделать надлежащие превентивные действия. Следует избегать излишних построений на карте, так как теряется ее наглядность.

Г.2 Еще один метод использует то же построение, что при полной или усеченной V-маске. При этом необходимо контролировать кривую КУСУМ и отмечать точки возможных изменений, что обычно соответствует локальным максимумам или минимумам кривой (см. рисунок В.1 приложения В). Для номеров наблюдений 6 и 7 достигаются максимумы, для номера 21 — минимум.

Если неясно, какой из двух номеров наблюдений *6* или *7* использовать, применяют следующее правило: строят линию, нанося ее значение для номера $i - 1$, где C_i отличается от C_{i-1} хотя бы на $2f\sigma_e$ (где f — коэффициент наклона). Для данного правила принятия решения $f = 0{,}25$, так что y_i должен отличаться от y_{i-1} хотя бы на половину стандартной ошибки в направлении вероятного изменения. В случае использования номеров наблюдений *6* и *7* таблицы В.1 (см. рисунок В.1) имеем:

$$C_7 = -1;\ C_6 = 0;\ (C_7 - C_6)/\hat{\sigma} = -1/2 \text{ (при } \hat{\sigma} = 2).$$

Небольшой наклон вниз от C_7 к C_6 дает основание для помещения разрешающей линии в точку наблюдения с номером наблюдения 6.

Г.3 При наличии вероятной точки изменения *O* проводят вертикальную линию *OA* длиной $5\hat{\sigma}$ в направлении (вверх или вниз) возможного сдвига среднего. Горизонтальную линию *OD* проводят из точки вероятного изменения направо. В точке *C*, находящейся на расстоянии 10 номеров наблюдений правее *O*, проводят вторую вертикальную линию *CB* длиной $10\hat{\sigma}$ от горизонтальной линии. Концы двух вертикальных линий, соединяясь, образуют разрешающую линию *AB*, которую при необходимости можно продлить вправо. Построение показано на рисунке Г.1.

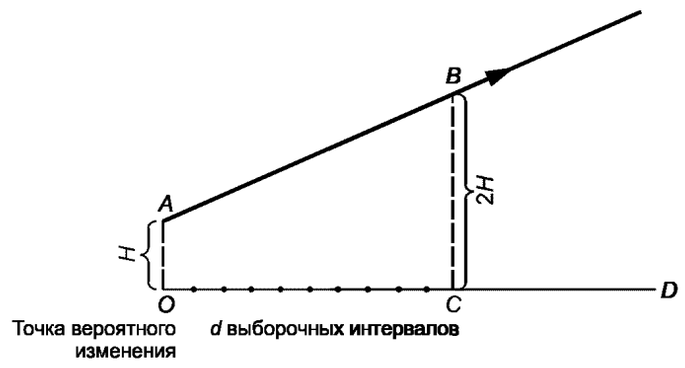


Рисунок Г.1 — Построение локальной разрешающей линии

Для более общего вида имеем:
$OA = H$;
$OC = d$ выборочных интервалов;
$CB = 2H$.
Коэффициент наклона f прямой AB рассчитывают по формуле

$$f = \frac{2H}{d}.$$

Построение на рисунке Г.1 приведено для проверки смещения среднего уровня вверх. При подозрении на смещение среднего уровня вниз линии OA и CB проводят от горизонтальной линии вниз.

Обычно для расчетов приняты следующие значения: $H = 5\hat{\sigma}$, $d = 10$.

Г.4 Применение локальной разрешающей линии показано на рисунке Г.2 для данных таблицы В.1 приложения В. Линия, проходящая через точку, полученную для номера наблюдения 6, указывает на номер наблюдения 18, то есть туда, где есть смещение от цели вниз в соответствии с линиями усеченной V-маски.

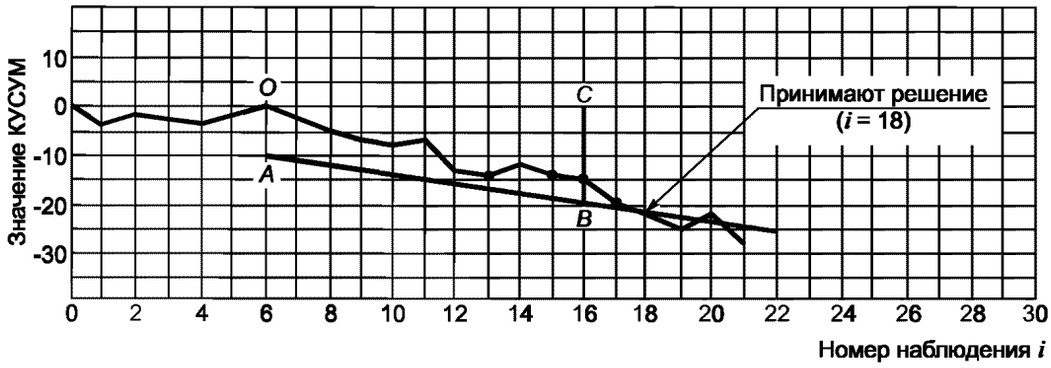


Рисунок Г.2 — Локальная разрешающая линия, построенная на КУСУМ-карте ($T = 15$, $\hat{\sigma} = 2$)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д
(справочное)

Библиография

[1] ИСО/ТО 7871—97 Контрольные карты кумулятивных сумм. Руководство по управлению качеством и анализу данных с помощью метода кумулятивных сумм

[2] Д.Химмельблау «Обнаружение и диагностика неполадок в химических и нефтехимических процессах»: Пер. с англ. — М.: Химия, 1983

[3] Вл.Боровиков (Для профессионалов) Statistica «Искусство анализа данных на компьютере». Изд-во «ПИТЕР». С.-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001

[4] Дж.Мердок «Контрольные карты»: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1986

УДК 658.311:006.354 ОКС 03.120.30 Т59 ОКСТУ 0011

Ключевые слова: контрольная карта, статистическое управление процессами, правила принятия решений, V-маска

Редактор *Т.С. Шеко*
Технический редактор *Л.А. Гусева*
Корректор *В.И. Варенцова*
Компьютерная верстка *Л.А. Круговой*

Изд. лиц. № 02354 от 14.07.2000. Сдано в набор 15.04.2002. Подписано в печать 30.05.2002. Усл. печ. л. 2,32.
Уч.-изд. л. 1,60. Тираж 265 экз. С 6018. Зак. 468.

ИПК Издательство стандартов, 107076 Москва, Колодезный пер., 14.
gost.e-ecolog.ru e-mail: gost.e-ecolog.ru
Набрано в Издательстве на ПЭВМ
Филиал ИПК Издательство стандартов — тип. «Московский печатник», 103062 Москва, Лялин пер., 6.
Плр № 080102

gost.e-ecolog.ru